

## ФУНКЦИЯ ГРИНА И ЕЕ РАЗЛИЧНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Полные нелинейные уравнения магнитной гидродинамики столь сложны, что часто поддаются лишь приближенному решению. При этом приходится вводить существенные упрощения, концентрируя внимание на основных физических механизмах в каждом исследуемом явлении. При переходе к линейному приближению возникает возможность построить подход, позволяющий единым образом рассматривать магнитогиродинамические краевые задачи. Как известно, при описании линейного отклика произвольной системы на внешнее воздействие естественным образом возникает функция Грина. Как правило, функция Грина допускает наглядное толкование, описывая распределения полей или возмущений от порождающих их сосредоточенных источников. Для получения же поля, порожденного некоторым распределением источников, эффект от каждой элементарной его части суммируется. Именно суммирование возмущений от каждой точки источника позволяет получить полное решение краевой задачи в виде свертки фундаментального решения и правой части системы линейных дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики в пространстве обобщенных функций. Таким образом, краевая магнитогиродинамическая задача с помощью функции Грина переформулируется в интегрально-дифференциальные уравнения, более естественным образом включающие в себя граничные и начальные условия и обладающие значительно большей физической наглядностью, что позволяет существенно упростить алгоритм решения краевых МГД задач. Поэтому задача описания фундаментального решения линейной магнитной гидродинамики или, другими словами, задача нахождения тензорной функции Грина имеет важное значение.

Рассмотрим малые возмущения в МГД среде с ненулевой первоначальной скоростью  $\mathbf{U}_1$ , постоянной плотностью  $\rho_1$  и магнитным полем  $\mathbf{B}_1$ , то есть предполагаем рассмотрение системы классических линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики [1]. Тогда функция Грина или фундаментальное решение краевой задачи определяется следующей системой дифференциальных уравнений с  $\delta$ -образной правой частью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{u} + \frac{V_{s1}}{\rho_1} \nabla \tilde{\rho} + \frac{1}{4\pi \rho_1} [\mathbf{B}_1 \text{rot} \mathbf{b}] &= \mathbf{S}'_u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \text{rot}[\mathbf{U}_1 \mathbf{b}] + \text{rot}[\mathbf{B}_1 \mathbf{u}] &= \mathbf{S}'_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_1 \text{div} \mathbf{u} + \text{div}(\tilde{\rho} \mathbf{U}_1) &= S'_\rho \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}, \mathbf{b}, \tilde{\rho}$  – отклонения скорости, магнитного поля и плотности от их равновесных значений  $\mathbf{U}_1, \mathbf{B}_1, \rho_1$ ;  $V_{s1}$  – скорость звука;  $\mathbf{S}'_u, \mathbf{S}'_b$  – произвольные постоянные векторы и  $S'_\rho$  – произвольная постоянная.

Несмотря на то, что речь идет собственно о функции Грина, фактически находятся выражения для скорости, магнитного поля и плотности, удовлетворяющие системе уравнений (1), которые условно обозначим соответственно как  $\hat{\Gamma}'_u, \hat{\Gamma}'_b, \hat{\Gamma}'_\rho$  и представим в виде [2]:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}'_u(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \mathbf{G}_{u\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') S'_\rho + \hat{\mathbf{G}}_{uu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{S}'_u + \hat{\mathbf{G}}_{ub}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{S}'_b, \\ \hat{\Gamma}'_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \mathbf{G}_{b\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') S'_\rho + \hat{\mathbf{G}}_{ub}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{S}'_u + \hat{\mathbf{G}}_{bb}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{S}'_b, \\ \hat{\Gamma}'_\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= G_{\rho\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') S'_\rho + \mathbf{G}_{\rho u}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{S}'_u + \mathbf{G}_{\rho b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{S}'_b, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{G}}_{uu}, \hat{\mathbf{G}}_{ub}, \hat{\mathbf{G}}_{bu}, \hat{\mathbf{G}}_{bb}$  – тензоры второго ранга,  $\mathbf{G}_{\rho u}, \mathbf{G}_{u\rho}, \mathbf{G}_{\rho b}, \mathbf{G}_{b\rho}$  – тензоры первого ранга,  $G_{\rho\rho}$  – тензор нулевого ранга. Представление решения в виде (2) следует из утверждения, что всякий

тензор может быть представлен в виде суммы трех диад [3], это особого рода тензор, формально обозначающийся в виде скалярного произведения  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , записанного в (2) справа.

Решение  $\hat{\Gamma}_u, \hat{\Gamma}_b, \hat{\Gamma}_\rho$  ищется в виде преобразования Фурье-Лапласа с неизвестными весовыми функциями  $\hat{\mathbf{g}}_u(q, \mathbf{p}), \hat{\mathbf{g}}_b(q, \mathbf{p}), \hat{\mathbf{g}}_\rho(q, \mathbf{p})$ :

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}_u(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ \hat{\Gamma}_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ \hat{\Gamma}_\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \end{cases} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C dq \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-iq(t - t') + ip(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \begin{cases} \hat{\mathbf{g}}_u(q, \mathbf{p}) \\ \hat{\mathbf{g}}_b(q, \mathbf{p}) \\ \hat{\mathbf{g}}_\rho(q, \mathbf{p}) \end{cases} d\mathbf{p}, \quad (3)$$

где кривая интегрирования  $C$  представляет собой бесконечную прямую, параллельную действительной оси ( $\text{Re}q$ ) комплексной плоскости  $q$ . Подставив (3) в (1), получим следующую систему уравнений относительно весовых функций  $\hat{\mathbf{g}}_u, \hat{\mathbf{g}}_b, \hat{\mathbf{g}}_\rho$ :

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{U}_1 \mathbf{p}) - q\} \hat{\mathbf{g}}_u + V_{S1}^2 \mathbf{p} \hat{\mathbf{g}}_\rho + \frac{1}{4\pi \rho_1} [\mathbf{B}_1 [\mathbf{p} \hat{\mathbf{g}}_b]] &= -iS_u, \\ \{(\mathbf{U}_1 \mathbf{p}) - q\} \hat{\mathbf{g}}_b - \mathbf{U}_1 (\mathbf{p} \hat{\mathbf{g}}_b) + [\mathbf{p} [\mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{g}}_u]] &= -iS_b, \\ \{(\mathbf{U}_1 \mathbf{p}) - q\} \hat{\mathbf{g}}_\rho + \rho_1 (\mathbf{p} \hat{\mathbf{g}}_u) &= -iS_\rho. \end{aligned}$$

После преобразований найдем следующее уравнение для  $\hat{\mathbf{g}}_u$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_u \left( (\mathbf{U}_1 \mathbf{p} - q)^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2 \right) - (V_{S1}^2 + V_{A1}^2) \mathbf{p} (\mathbf{p} \hat{\mathbf{g}}_u) + V_{A1}^2 \mathbf{p} (\mathbf{s}_1 \hat{\mathbf{g}}_u) (\mathbf{s}_1 \mathbf{p}) + V_{A1}^2 \mathbf{s}_1 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p}) (\mathbf{p} \hat{\mathbf{g}}_u) &= \\ = \hat{\varepsilon}_u (\mathbf{U}_1 \mathbf{p} - q) - \frac{V_{S1}^2 \mathbf{p} \varepsilon_\rho}{\rho_1} + \{(\mathbf{p} \hat{\varepsilon}_b) [\mathbf{B}_1 [\mathbf{p} \mathbf{U}_1]] - [\mathbf{B}_1 [\mathbf{p} \hat{\varepsilon}_b]]\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $V_{A1}^2 = \frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}$  – Альфвеновская скорость;  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{B}_1 / B_1$ .

Для дальнейшего важно введение базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , непосредственно связанного с выделенным направлением невозмущенного магнитного поля  $\mathbf{s}_1$ , а именно:  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1$ . Это естественным образом напоминает о наличии анизотропии магнитогидродинамической среды по отношению к невозмущенному магнитному полю. Во введенном базисе соотношение (5) записывается в матричном виде следующим образом:

$$\hat{A} \hat{\mathbf{g}}_u = \hat{\Omega}, \quad (6)$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} q'^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2 - (V_{S1}^2 + V_{A1}^2) p_1 & -V_{S1}^2 p_1 p_2 & -(V_{S1}^2 + V_{A1}^2) p_1 p_3 \\ -V_{S1}^2 p_1 p_2 & q'^2 - V_{S1}^2 p_2^2 & -V_{S1}^2 p_2 p_3 \\ -(V_{S1}^2 + V_{A1}^2) p_3 p_1 & -V_{S1}^2 p_2 p_3 & q^{\odot 2} - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2 - (V_{S1}^2 + V_{A1}^2) p_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{u1} q' - \frac{V_{S1}^2 \varepsilon_\rho p_1}{\rho_1} + \frac{1}{4\pi\rho_1} \left[ \varepsilon_{b1} p_2 - \varepsilon_{b2} p_1 + (\mathbf{p} \hat{\varepsilon}_b) (p_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{B}_1 - U_{11} p_2 B_1) \right] \\ \varepsilon_{u2} q' - \frac{V_{S1}^2 \varepsilon_\rho p_2}{\rho_1} + \frac{1}{4\pi\rho_1} \left[ \varepsilon_{b2} p_2 - \varepsilon_{b2} p_2 + (\mathbf{p} \hat{\varepsilon}_b) (p_2 \mathbf{U}_1 \mathbf{B}_1 - U_{12} p_2 B_1) \right] \\ \varepsilon_{u3} q' - \frac{V_{S1}^2 \varepsilon_\rho p_3}{\rho_1} + \frac{1}{4\pi\rho_1} \left[ \varepsilon_{b3} p_2 - \varepsilon_{b2} p_3 + (\mathbf{p} \hat{\varepsilon}_b) (p_3 \mathbf{U}_1 \mathbf{B}_1 - U_{13} p_2 B_1) \right] \end{pmatrix}$$

$q' = \mathbf{U}_1 \mathbf{p} - q; \hat{\mathbf{g}}_u = \{g_{u1}, g_{u2}, g_{u3}\}; \hat{\mathbf{g}}_b = \{g_{b1}, g_{b2}, g_{b3}\}; \mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}; \mathbf{U}_1 = \{U_{11}, U_{12}, U_{13}\}$ .  
Решение системы (6) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{g}}_u = \frac{1}{\det \hat{A}} \hat{A}^c \hat{\Omega},$$

где матрица  $\hat{A}^c$  имеет следующие элементы  $\hat{A}^c = \|A_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= q'^4 - [q'^2 (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) + V_{A1}^2 V_{S1}^2 p_2^2] (p_2^2 + p_3^2); \\ A_{12} &= A_{21} = V_{S1}^2 p_1 p_2 (q'^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2); \\ A_{13} &= A_{31} = [q'^2 (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) - V_{A1}^2 V_{S1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2] p_1 p_3; \\ A_{22} &= [q'^2 - V_{A1}^2 p^2 - V_{S1}^2 (p_1^2 + p_3^2)] (q'^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2); \\ A_{23} &= A_{32} = V_{S1}^2 p_2 p_3 (q'^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2); \\ A_{33} &= q'^4 - [q'^2 (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) + V_{A1}^2 V_{S1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2] (p_2^2 + p_1^2); \end{aligned} \quad (7)$$

а ее определитель равен

$$\det \hat{A} = [(q - \mathbf{pU}_1)^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2] [(q - \mathbf{pU}_1)^4 - (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) (q - \mathbf{pU}_1)^2 p^2 + V_{A1}^2 V_{S1}^2 p^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2]. \quad (8)$$

Для того, чтобы полученное решение привести к виду (2), представим  $\hat{\Omega}$  в виде суммы диад

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \hat{\varepsilon}_u (q - \mathbf{pU}_1) - \frac{V_{S1}^2 \hat{\varepsilon}_p}{\rho_1} \mathbf{p} + \frac{1}{4\pi\rho_1} (\mathbf{s}_1 \mathbf{p}) \hat{\varepsilon}_b + \frac{1}{4\pi\rho_1} \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & -p_3 & 0 \end{pmatrix} \hat{\varepsilon}_b + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho_1 q} [\mathbf{p}(\mathbf{U}_1 \mathbf{B}_1) - \mathbf{U}_1 B_1 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})] \cdot \mathbf{p} \hat{\varepsilon}_{bb}. \end{aligned}$$

Отсюда весовая функция тензора первого ранга  $\hat{\mathbf{G}}_{up}$  примет вид:

$$\hat{\mathbf{g}}_{up} = -\frac{V_{S1}^2 \hat{A}^c \cdot \mathbf{p}}{\rho_1 \det \hat{A}},$$

а весовые функции тензоров второго ранга  $\hat{\mathbf{G}}_{uu}$  и  $\hat{\mathbf{G}}_{ub}$  будут соответственно равны

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_{uu} &= (q - \mathbf{pU}_1) \frac{\hat{A}^c}{\det \hat{A}}; \\ \hat{\mathbf{g}}_{ub} &= \frac{1}{4\pi\rho_1} \frac{\hat{A}^c}{\det \hat{A}} \left\{ \mathbf{s}_1 \mathbf{p} - \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{q} [\mathbf{p}(\mathbf{U}_1 \mathbf{B}_1) - \mathbf{U}_1 B_1 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})] \cdot \mathbf{p} \right\} \end{aligned}$$

Аналогично находятся весовые функции остальных тензоров в (2).

Для краткости в полном развернутом виде выпишем только тензор второго ранга  $\hat{\mathbf{G}}_{uu}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}_{uu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \hat{\mathbf{F}}_{uu} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \\ \hat{\mathbf{F}}_{uu} &= \|F_{ij}\|_{i,j=1,2,3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где элементы дифференциального оператора  $\hat{\mathbf{F}}_{uu}$  следующие:

$$\begin{aligned}
F_{11} &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^4 - \left[ (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^2 - V_{A1}^2 V_{S1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right) \right]; \\
F_{22} &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^2 - V_{A1}^2 \Delta - V_{S1}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^2 - V_{A1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right); \\
F_{33} &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^4 - \left[ (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^2 - V_{A1}^2 V_{S1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right) \right]; \\
F_{12} = F_{21} &= V_{S1}^2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^2 - V_{A1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \\
F_{23} = F_{32} &= V_{S1}^2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^2 - V_{A1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right) \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2}; \\
F_{13} = F_{31} &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right)^2 (V_{A1}^2 + V_{S1}^2) - V_{S1}^2 V_{A1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1 \nabla \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}.
\end{aligned}$$

а преобразование Фурье-Лапласа, зависящее от сдвига пространственных и временных переменных, получено в виде:

$$I(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty + i\sigma_0}^{\infty + i\sigma_0} e^{-iq(t-t')} dq \iiint_{\infty} \frac{e^{ip(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\Delta(\mathbf{p}, q) \delta(\mathbf{p}, q)} d\mathbf{p}. \quad (10)$$

Как видно из (10), в пространственно-временном выражении для функции Грина интегрирование проводится в бесконечных пределах. И для вычисления интеграла необходимо задать способ обхода полюсов, лежащих на пути интегрирования. Полюса имеют место при тех значениях  $\mathbf{p}, q$ , которые удовлетворяют дисперсионным магнитогидродинамическим уравнениям

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{p}, q) &= (q - \mathbf{U}_1 \mathbf{p})^4 - (V_{S1}^2 + V_{A1}^2) (q - \mathbf{U}_1 \mathbf{p})^2 \mathbf{p}^2 + V_{A1}^2 V_{S1}^2 \mathbf{p}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2 = 0 \\
\delta(\mathbf{p}, q) &= (q - \mathbf{U}_1 \mathbf{p})^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{p})^2 = 0
\end{aligned} \quad (11)$$

Эти полюсы соответствуют реально существующим в движущейся МГД среде свободным магнитогидродинамическим волнам. В случае незатухающих волн полюсы лежат на действительной оси. Поскольку уравнения (1) для функции Грина являются дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных, то они имеют несколько линейно независимых решений. И из интегральной записи (10) можно получить все эти решения соответствующим выбором обхода полюсов. Рассматриваемая функция Грина описывает поле, возникающее в результате действия мгновенного точечного источника, расположенного в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$ . Естественно потребовать, чтобы до момента включения источника  $t = t'$  поле было тождественно равно нулю. Это требование определяет правила обхода полюсов при интегрировании выражения (10). Действительно, для того, чтобы функция Грина обращалась в нуль при  $t < t'$ , необходимо при интегрировании по  $q$  все полюсы, возникающие на пути интегрирования, обходить сверху. Следует заметить, что тем самым мы автоматически выполняем принцип Мандельштам [4], согласно которому поток энергии на бесконечности направлен от источника. Это требование накладывает условие на групповую скорость, в то время, как принцип Зоммерфельда, требующий наличие только расходящихся волн, накладывает условие на фазовую скорость волн, которая, вообще говоря, не совпадает с групповой. Т.е. принцип Зоммерфельда не всегда является достаточным требованием, особенно, если рассматриваются движущиеся среды.

Таким образом, функция Грина уравнений магнитной гидродинамики для движущихся сред в общем случае является тензорной функцией положения двух точек: точки наблюдения  $\mathbf{r}$  и точки источника  $\mathbf{r}'$ , для которой выписаны все ее спектральные компоненты (9).

Известно, что дисперсионные уравнения для плоских монохроматических магнитогидродинамических волн эквивалентны условиям обращения в нуль знаменателя (11) в разложении Фурье-Лапласа для функции Грина. Они имеют следующий вид для магнитозвуковых:

$$(\omega - \mathbf{U}_1 \mathbf{k})^4 - (V_{s1}^2 + V_{A1}^2)(\omega - \mathbf{U}_1 \mathbf{k})^2 k^2 + V_{A1}^2 V_{s1}^2 k^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{k})^2 = 0 \quad (12)$$

и для альфвеновских волн:

$$(\omega - \mathbf{U}_1 \mathbf{k})^2 - V_{A1}^2 (\mathbf{s}_1 \mathbf{k})^2 = 0 \quad (13)$$

Видно, что в дисперсионные уравнения (12,13) входит скалярное произведение  $(\mathbf{U}_1 \mathbf{k})$  волнового вектора  $\mathbf{k}$  на невозмущенную скорость перемещения среды  $\mathbf{U}_1$ . Это означает, что закон распространения волн в движущейся среде зависит от угла между направлениями волнового вектора и скорости среды, что лишний раз подчеркивает известную истину о том, что движущаяся среда обладает анизотропией по отношению к выделенному направлению скорости движения среды. Но наличие скалярного произведения  $(\mathbf{s}_1 \mathbf{k})$  волнового вектора  $\mathbf{k}$  на направление возмущенного магнитного поля  $\mathbf{s}_1$  говорит о том, что скорость распространения зависит от направления ее распространения по отношению к магнитному полю, т.е. налицо магнитная анизотропия. В итоге имеются две явно выделенные оси анизотропии, магнитная и скоростная, что значительно усложняют исследование МГД волн в движущихся средах.

Дисперсионные уравнения (12,13) описывают три моды волнового движения, вызванные различными восстанавливающими силами. Магнитное натяжение приводит к появлению альфвеновских волн (13). Совместное действие магнитного давления и давления проводящей жидкости образуют две магнитозвуковые волны (ускоренную и замедленную) (12). Иная природа этих волн в сравнении со звуковыми и электромагнитными представляет несомненный интерес как к непосредственному изучению, так и к рассмотрению их рассеивания на различных препятствиях. При решении краевой МГД задачи в дифференциальной постановке локальные граничные и начальные условия могут удовлетворяться либо волнами одной и той же моды колебаний, либо для их удовлетворения требуется привлечение нескольких мод. При интегральной постановке этот непростой вопрос решается автоматически. Это обусловлено самой физикой рассматриваемого явления. Механизм появления в среде рассеянных волн сводится к возникновению в ней под действием основной волны индуцированных источников, приводящих к излучению новых (вторичных) рассеянных волн, интерференция которых и дает требуемые моды колебаний, что лежит в основе принципа погашения [1] магнитной гидродинамики. Наличие найденной функции Грина (9), всегда предполагает представление исходных дифференциальных уравнений в интегральной форме, а использование дополнительного утверждения, а именно принципа погашения, приводит к новому формализму решения краевых задач методом интегральных уравнений линейной магнитной гидродинамики.

Как уже отмечалось, функция Грина допускает наглядное толкование, описывая распределение полей или возмущений от порождающих их сосредоточенных источников.

Вернемся к найденной функции Грина. Как видно из соотношения (10), в знаменателе этой функции стоят выражения  $\Delta(\mathbf{p}, q)$ ;  $\delta(\mathbf{p}, q)$  (11), представляющие собой дисперсионные уравнения магнитозвуковых и альфвеновских волн. Т.е., в общем случае компоненты весовых функций  $(\hat{\mathbf{g}}_{in})$  для альфвеновских и магнитозвуковых волн взаимно переплетаются. Оказывается, однако, что для некоторого класса задач, рассматривающих дифракцию МГД волн на плоско-параллельных структурах, компоненты весовой функции могут распадаться на две: альфвеновскую и магнитозвуковые, что подтверждается работой [2], в которой построена функция Грина для частного одномерного случая задания магнитного поля.

В общем случае это связано с инвариантностью функции Грина относительно выбора

координатного базиса  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ , который мы привязали к невозмущенному магнитному полю.

Допустив, что один из базисных векторов постоянен и фиксирован ( $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1$ ), получаем, что функция Грина инвариантна поверхности, поперечной вектору  $\mathbf{e}_2$ . В этом случае функция Грина (9) представляется в виде:

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \begin{pmatrix} G_A & 0 \\ 0 & G_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & G_{23} \\ 0 & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

т.е. произошло разделение на альфвеновскую  $G_A$  и магнитозвуковую  $G_M$  компоненты. При этом в [5,6] было получено явное выражение для  $G_A$  при отсутствии невозмущенного движения среды:

$$G_A = \frac{1}{2V_{A1}} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \theta \left( t - t' - \frac{|x_3 - x'_3|}{V_{A1}} \right),$$

где  $\theta(t)$  – функция Хевисайда.

В случае же нулевого газового давления, когда  $V_s \equiv 0$ , функция Грина (13) еще более упрощается, она становится равной

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} G_A & 0 & 0 \\ 0 & (V_{A1}^2 \Delta + \omega^2) F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где  $G_A = \frac{1}{2V_{A1}} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \exp \left( \frac{-i\omega |x_3 - x'_3|}{V_{A1}} \right)$ ,  $F = \frac{\exp[-i\omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / V_{A1}]}{4\pi V_{A1}^2 \omega^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ,

отсюда видно, что на альфвеновскую компоненту параметр  $V_s$  не влияет, а магнитозвуковые компоненты  $G_{22}, G_{33}$  напоминают функцию Грина макроскопической электродинамики [7].

Из найденного фундаментального решения (9) легко получить известную из литературы акустическую функцию Грина, которая является частным случаем рассматриваемой задачи.

При отсутствии магнитного поля ( $\mathbf{B} \equiv 0$ ) и невозмущенного движения среды ( $\mathbf{U}_1 \equiv 0$ ) функция  $\mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  приобретает вид:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{\omega^2 - V_{s1}^2 p^2} dp$$

и легко вычисляется согласно теореме о вычетах

$$\mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi V_{s1}^2} \frac{\exp \left( -i \frac{\omega}{V_{s1}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

а компоненты дифференциального оператора  $\hat{\mathbf{F}}_{\text{ин}}$  упрощаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) & -\frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & 1 + \frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) & -\frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & -\frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & 1 + \frac{V_{S1}^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \end{pmatrix},$$

что окончательно можно записать в виде:

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \left( \hat{\varepsilon} - \frac{V_{s1}^2}{\omega^2} \nabla \times \nabla \times \hat{\varepsilon} \right) \mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

здесь  $\hat{\varepsilon}$  – единичный аффинор. Эта функция была получена в [8] при выводе интегральных уравнений акустики неоднородной жидкости. Временная зависимость рассматривается как  $\exp(i\omega t)$ .

Наконец, рассмотрим функцию Грина для стационарного МГД потока [9], заданного альфвеновской скоростью  $V_{A1}$ , звуковой скоростью  $V_{S1}$  и невозмущенным магнитным полем  $\mathbf{B}_1$ . Она имеет вид:

$$\mathbf{G}(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = \frac{\hat{\Phi}(\theta, \varphi)}{2\pi V_{A1}^2 |\mathbf{R}|},$$

т.е., стационарная магнитогидродинамическая функция Грина имеет особенность типа  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ , а зависимость от полярных углов  $\theta, \varphi$  радиус-вектора  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  задается матрицей, также записанной в базисе, так же как и прежде связанным с выделенным направлением магнитного поля:

$$\hat{\Phi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta} & -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi & -\frac{\sin 2\varphi(1 + \cos^2 \theta)}{2 \sin^2 \theta} \\ -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi & 1 - \frac{V_{A1}^2}{V_{S1}^2} & -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \\ -\frac{\sin 2\varphi(1 + \cos^2 \theta)}{2 \sin^2 \theta} & -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi & \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

**Список литературы:** 1. *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* Краевые задачи магнитной гидродинамики. Харьков: НПО Тест-Радио, 1993. 230 с. 2. *Harold Wetzner.* Green's function for two-dimensional magnetohydrodynamic waves // *The physics of Fluids.* 1961. V.4, № 10. P.1238-1245. 3. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: АН СССР, 1951. 426 с. 4. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1971. 5. *Александрова А.А., Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения магнитной гидродинамики // *Магнитная гидродинамика.* 1979. № 3, С.3-9. 6. *Александрова А.А., Александров Ю.Н.* Движущаяся неоднородность в МГД среде // *ЖТФ.* 1997. Т.67, №5. С.6-11. 7. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 278 с. 8. *Виноградов А. Г., Муратов Р. З.* Интегральные уравнения акустики неоднородной идеальной жидкости // *ДАН СССР.* 1976. Т.226, №2. С.310-314. 9. *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* Исследование внутренних магнитного и скоростного полей эллипсоида // *Магнитная гидродинамика.* 1990. № 1. С.5-12.

*Харьковский военный университет*  
*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 01.10.2001*