

УДК 537.84

*А. А. АЛЕКСАНДРОВА*, канд. физ.-мат. наук

**СТАЦИОНАРНОЕ МГД ОБТЕКАНИЕ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ  
НЕОДНОРОДНОСТИ**

---

Изучение физических явлений в межпланетном пространстве, в солнечной короне, в лабораторной плазме показало наличие в них неоднородностей [1], которые хорошо моделируются в рамках магнит-

ной гидродинамики [2]. В статье рассматривается МГД модель неоднородности в виде простейшей трехмерной фигуры — трехосного эллипсоида. В работе [3] получено и исследовано внутреннее поле скоростей и магнитное поле эллипсоида. Рассматривался проводящий сжимаемый эллипсоид с проницаемой поверхностью, помещенный во внешнее магнитное поле, который обтекался стационарным МГД потоком. Проводимость эллипсоида и окружающей среды предполагалась достаточно высокой, так что в этом случае справедливы уравнения магнитной гидродинамики для идеальной среды [2]. Было показано, что и в магнитной гидродинамике эллипсоид является единственной выпуклой фигурой, обладающей свойством неоднородности: если внешнее невозмущенное поле однородно, то и внутреннее поле в эллипсоиде также однородно. Однако исследование внутреннего поля обнаружило и своеобразие задач магнитной гидродинамики, связанное, с одной стороны, с анизотропией внутреннего поля, а с другой, — с неустойчивыми эллипсоидальными неоднородностями [3].

Нами продолжено исследование, начатое в работе [3]. Изучим внешнее поле скоростей, т. е. рассмотрим обтекание эллипсоидальной неоднородности в самосогласованной постановке.

Пусть МГД поток, заданный постоянным магнитным полем  $\vec{B}_1$ , звуковой скоростью  $v_{s1}$  и альфвеновской скоростью  $v_{A1}$ , обтекает неоднородность в форме эллипсоида  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ , внутренние параметры которого равны  $\vec{B}_2, v_{s2}^2, v_{A2}^2$ . Тогда полное поле скоростей  $\vec{u}_n(\vec{r})$  вне неоднородности равно сумме полей невозмущенного  $\vec{u}_0(\vec{r})$  и поля, возникшего в результате возмущения, создаваемого эллипсоидом,  $\vec{u}_b(\vec{r})$ ;  $\vec{u}_n(\vec{r}) = \vec{u}_0(\vec{r}) + \vec{u}_b(\vec{r})$ . (1). Нахождение  $\vec{u}_n$  по заданному  $\vec{u}_0$ , по заданной геометрии неоднородности и по заданным параметрам  $\vec{B}_i, v_{si}, v_{Ai}, i = 1, 2$  и составляет сущность поставленной задачи. Полное поле (1) выражается через МГД потенциал скоростей

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \int_{(V)} \frac{\vec{u}(\vec{r}') \hat{\Phi}(\theta, \varphi)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}', \quad (2)$$

где

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2\pi v_{A1}^3} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta} & -\text{ctg } \theta \cos \varphi & \frac{\sin 2\varphi (1 + \cos^2 \varphi)}{2 \sin^2 \theta} \\ -\text{ctg } \theta \cos \varphi & 1 - \frac{v_{A1}^2}{v_{s1}^2} & -\text{ctg } \theta \sin \varphi \\ \frac{\sin 2\varphi (1 + \cos^2 \varphi)}{2 \sin^2 \theta} & -\text{ctg } \theta \sin \varphi & \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta} \end{array} \right\} \quad (3)$$

следующим образом:

$$\vec{u}_n(\vec{r}) = \vec{u}_0(\vec{r}) + (v_{s2}^2 - v_{s1}^2) \text{grad div } \vec{\Pi}(\vec{r}) - v_{A1}^2 \vec{s}_1 \times \text{rot} (\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \times \vec{\Pi}(\vec{r}). \quad (4)$$

Здесь  $\vec{s}_i = \vec{B}_i/B_i$ ;  $\gamma = B_2/B_1$ ;  $\vec{u}_n(\vec{r})$  — поле, определенное во внешней области  $\vec{r} \notin V$ , существенно отличное от поля  $\vec{u}(\vec{r})$ , заданного внутри  $(V)$  (подынтегральная функция в (2)). Следовательно, внешнее поле может быть найдено простым интегрированием, если известно внутреннее поле [3].

Общая схема решения уравнения (4) состоит из двух этапов. На первом этапе при  $\vec{r} \in V$  интегральные уравнения Фредгольма II рода (4) позволяют определить внутреннее поле  $\vec{u}(\vec{r})$  непосредственно через невозмущенное поле  $\vec{u}_0(\vec{r})$ . Предполагая, что  $\vec{u}_0(\vec{r})$  — постоянно, мы получили [3], что внутренний МГД потенциал имеет вид

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \vec{u} \parallel \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, 3}; \quad j = \overline{1, 3},$$

где каждый элемент матрицы  $\delta_{ij} = P_2(x, y, z)$ , т. е. представляет собой многочлен второй степени относительно декартовых координат. А так как на потенциал действует еще оператор дифференцирования второго порядка, то получили, что внутреннее поле также постоянно и его можно записать следующим образом:  $\vec{u} = A\vec{u}_0$  (5). На втором этапе решения уравнения (4) по известному внутреннему полю (5) найдем внешнее.

При исследовании МГД потенциала (2) для внутренних точек [3] использовался метод Лагранжа [4]. Благодаря так называемой теореме взаимности Айвори [4] нахождение внешнего потенциала в электродинамике значительно упрощается, так как происходит автоматически и необходимость применения метода Лагранжа отпадает. В магнитной гидродинамике теорему, аналогичную теореме Айвори, доказать не удалось, поэтому пришли к необходимости применения для нахождения  $\vec{\Pi}(\vec{r})$ , несмотря на значительное усложнение, именно метода Лагранжа.

Введём сферическую систему координат с полюсом в точке наблюдения  $\vec{P}(\vec{r}) \in V$ :

$$x - x' = r'\alpha; \quad y - y' = r'\beta; \quad z - z' = r'\gamma,$$

где  $\beta = \cos \Theta$ ;  $\alpha = \sin \theta \cos \varphi$ ;  $\gamma = \sin \theta \sin \varphi$  — координаты точки на сфере  $(\Omega)$  единичного радиуса. Тогда внешний МГД потенциал примет вид

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \vec{u} \iint_{(\Omega)} \hat{\Phi}(\theta, \varphi) d\omega \int_{R_-}^{R_+} r' dr'. \quad (6)$$

Здесь

$$R_{\pm} = (-K \pm \sqrt{K^2 - LI})/I,$$

где  $K, L, J$  — имеют те же обозначения, что и в работе [3], а  $\vec{u}$  — компоненты внутреннего поля, найденные там же.

После интегрирования внутреннего интеграла по

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = 2u \iint_{(\Omega)} \Phi(\theta, \varphi) \frac{K}{r^2} \sqrt{K^2 - LI} d\omega. \quad (7)$$

Область интегрирования будет зависеть от положения точки наблюдения относительно эллипсоида и определяться неравенствами

$$\frac{\cos \theta \cos \bar{\theta}}{b^2} + \sin \theta \sin \bar{\theta} \left( \frac{\cos \varphi \cos \bar{\varphi}}{a^2} + \frac{\sin \varphi \sin \bar{\varphi}}{c^2} \right) < 0;$$

$$\left[ \frac{\cos \theta \cos \bar{\theta}}{b^2} + \sin \theta \sin \bar{\theta} \left( \frac{\cos \varphi \cos \bar{\varphi}}{a^2} + \frac{\sin \varphi \sin \bar{\varphi}}{c^2} \right) \right]^2 r^2 - \left[ \frac{\cos^2 \theta}{b^2} + \sin^2 \theta \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2} \right) \right] \left\{ r^2 \left[ \frac{\cos^2 \bar{\theta}}{b^2} + \sin^2 \bar{\theta} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2} \right) \right] - 1 \right\} \geq 0,$$

где  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — сферические координаты точки наблюдения.

Следует заметить, что вычисление внешнего потенциала (7) и, следовательно, построение полного обтекающего поля на произвольных расстояниях до точки наблюдения представляет собой аналитически довольно сложную задачу. Поэтому ограничимся рассмотрением поля в дальней зоне, т. е. на больших расстояниях от неоднородности, а также проанализируем МГД потенциал ближнего поля (вблизи эллипсоида), рассматривая различные частные случаи вырождения эллипсоида.

Рассмотрим поле в дальней зоне при  $r \gg \max \{a, b, c\}$ , в этом случае  $\theta \simeq \bar{\theta}$ ,  $\varphi \simeq \bar{\varphi}$ , и внешний потенциал примет вид

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{4}{3} \pi abc \frac{\hat{\Phi}(\theta, \varphi)}{r} \vec{u} = \hat{g} \frac{\vec{u}_0}{r},$$

где  $\hat{g} = \frac{4}{3} \pi abc \hat{\Phi}(\theta, \varphi) \hat{A}$  — матрица обтекания.

Тогда полное внешнее поле в дальней зоне можно записать в виде

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}_0 + [(v_{s1}^2 - v_{s2}^2) \text{grad div } \hat{g} \vec{u}_0 - v_{A1}^2 \vec{s}_1 \times \text{rot rot}(\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \times \hat{g} \vec{u}_0] / r. \quad (8)$$

Выделив отдельно зависимость от  $r$  и от полярных углов  $\theta$ ,  $\varphi$ , выражение (8) перепишем так:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}_0 + [(v_{s1}^2 - v_{s2}^2) \hat{F}(\theta, \varphi) - v_{A1}^2 \vec{s}_1 \times \hat{G}(\theta, \varphi)] / r^3,$$

$$\text{где } F(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} & \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \end{pmatrix};$$

$$\hat{G}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \hat{\rho} (\vec{u}_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \hat{\rho} u_\theta \right] \vec{i}_r +$$

$$+ \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \hat{\rho} u_r + (\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \hat{\rho} u_\varphi \right] \vec{i}_\theta -$$

$$- \left[ (\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \hat{\rho} u_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{s}_1 - \gamma \vec{s}_2) \hat{\rho} u_\varphi \right] \vec{i}_\varphi;$$

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \hat{\Phi}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix};$$

$$\hat{P} = \left\{ -1, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\},$$

таким образом, поле в дальней зоне  $\vec{u}_n(\vec{r})$ , полученное при обтекании МГД эллипсоида, примет вид

$$\vec{u}_n(\vec{r}) = \left( 1 + \frac{1}{r^3} \hat{P}(\theta, \varphi) \right) \vec{u}_0(\vec{r}), \quad (9)$$

где  $\hat{P}(\theta, \varphi)$  — некоторый оператор, который по аналогии с электродинамикой [5] можно назвать оператором (амплитудой) рассеяния; он записывается в виде матрицы и является достаточно сложным физическим понятием. Из (9) видно, что возмущение, вносимое неоднородностью в дальней зоне, убывает, как  $1/r^3$ , и существенно зависит от точки наблюдения  $\theta, \varphi$ , что отражено на рис. 1, 2

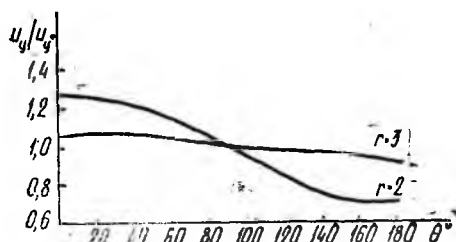


Рис. 1

В последние годы отмечается интерес к вопросам, связанным с задачей о потенциалах неоднородного эллипсоида [5]. Причем этот интерес обусловлен не только традиционными астрофизическими приложениями, потребностями прикладной электродинамики, а также в меньшей степени и задачами

магнитной гидродинамики, связанными с дифракционными эффектами. Поэтому изучим особенности внешнего МГД потенциала ближнего поля ( $a = c$ ).

МГД потенциал в направлении, совпадающем с направлением внешнего магнитного поля

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\vec{u} r^2 b^2 a^4}{2v_{A1}^2 (a^2 - b^2)} \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{\arctg \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{b \sqrt{a^2 - b^2}} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(v_{A1}^2/v_{s1}^2 - 1) & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

МГД потенциал в направлении, перпендикулярном направлению внешнего магнитного поля

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\vec{u} r^2}{v_{A1}^2} \|d_{ij}\|, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3},$$

где

$$d_{11} = \frac{a^2 b^2}{8} \left[ (2 \cos^2 \varphi + 1) \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{\arctg \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{b \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{1}{a^2} \right) - \right.$$

$$-(2 \sin^2 \bar{\varphi} + 1) \left( \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{b \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{1}{a^2} \right);$$

$$d_{12} = d_{21} = d_{23} = d_{32} = 0; \quad d_{13} = d_{31} =$$

$$= \frac{1}{8} \sin 2\bar{\varphi} b^4 a^2 \left[ \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{b \sqrt{a^2 - b^2}} \left( \frac{2}{b^2} - \frac{1}{a^2 - b^2} \right) + \frac{1}{a^2 (a^2 - b^2)} \right];$$

$$d_{22} = a^2 b^2 (1 - v_{A1}^2 / v_{s1}^2) \left[ \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{b \sqrt{a^2 - b^2}} \left( 1 - \frac{1}{a^2 - b^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left( 1 + \frac{1}{a^2 - b^2} \right) \right];$$

$$d_{33} = \frac{a^2 b^2}{8} \left[ (2 \sin^2 \bar{\varphi} + 1) \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{b \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{1}{a^2} \right) - \right.$$

$$\left. - (2 \cos^2 \bar{\varphi} + 1) \left( \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{b \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{1}{a^2} \right) \right].$$

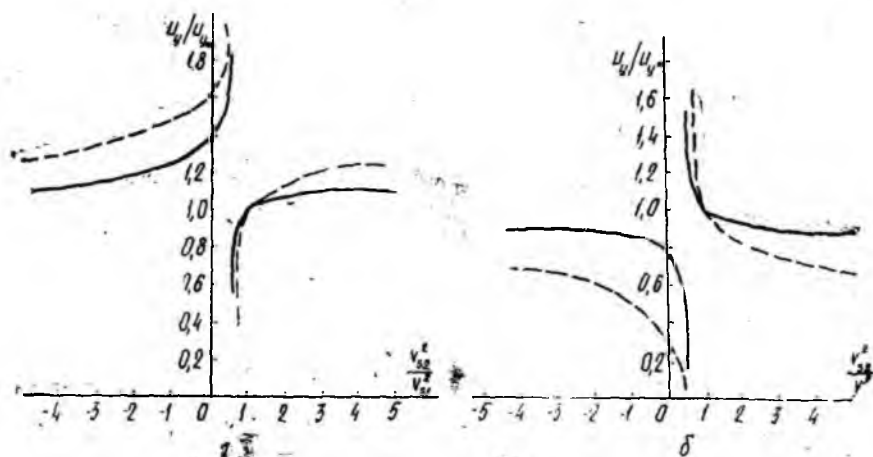


Рис. 2

Следовательно, вблизи эллипсоида потенциал пропорционален  $r^2$  и имеет достаточно сложную зависимость от углов.

Рассмотрим МГД потенциал различных предельных фигур, которые можно получить из эллипсоида вращения  $a = c$ .

Пусть эллипсоид имеет вид тонкого вытянутого цилиндра  $a = c \ll b$ .

МГД потенциал в направлении магнитного поля

$$\vec{\Pi}(r) = -\frac{\pi a^2 r^2 \vec{u}}{v_{A1}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(v_{A1}^2/v_{sl}^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

МГД потенциал в направлении, перпендикулярном магнитному полю

$$\vec{\Pi}(r) = \frac{\vec{u} r^2}{4v_{A1}^2} \begin{pmatrix} b^2 \cos 2\bar{\varphi} & 0 & \frac{\sin 2\bar{\varphi}}{2} \\ 0 & (1 - v_{A1}^2/v_{sl}^2)(b^2 - \frac{1}{2}) & 0 \\ \frac{\sin 2\bar{\varphi}}{2} & 0 & -b^2 \cos 2\bar{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что рассеивающей неоднородностью является сплюснутый эллипсоид вращения  $a = c \gg b$ .

МГД потенциал в направлении магнитного поля

$$\vec{\Pi}(r) = \frac{\pi r^2 \vec{u} (b^2 - ab \frac{\pi}{2})}{v_{A1}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(v_{A1}^2/v_{sl}^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

МГД потенциал в направлении, перпендикулярном магнитному полю

$$\vec{\Pi}(r) = \frac{\vec{u} r^2 \pi}{2v_{A1}^2} \begin{pmatrix} -\frac{ab}{8}(1 + 2\sin^2 \bar{\varphi}) & 0 & 0 \\ 0 & (v_{A1}^2/v_{sl}^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ab}{3}(1 + 2\cos^2 \bar{\varphi}) \end{pmatrix}.$$

Наконец, если обтекаемая неоднородность имеет геометрию шара, то МГД потенциал в ближнем поле будет иметь вид

$$\vec{\Pi}(r) = \vec{u} r^2 \|l_{ij}\| \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Для краткости выпишем один из элементов матрицы

$$l_{22} = \left( \frac{1}{v_{A1}^2} - \frac{1}{v_{sl}^2} \right) \left[ \frac{4}{3} \cos^2 \bar{\theta} \sin^3 \bar{\theta} - \frac{2}{3} \cos \bar{\theta} \sin^3 \bar{\theta} + \right. \\ \left. - 2 \sin^3 \bar{\theta} - \frac{1}{5} \sin^5 \bar{\theta} - \frac{\bar{\theta}}{2} \sin^2 \bar{\theta} - \frac{1}{4} \sin^2 \bar{\theta} \sin 2\bar{\theta} \right].$$

Зная потенциал в любом направлении  $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$  и применяя соотношение (4), легко найти ближнее поле в любой точке.

Таким образом, метод интегральных уравнений в принципе полностью и математически достаточно точно решает задачу обтекания МГД жидкостью тел эллипсоидальной формы.

Список литературы: 1. Westphal K. O., Mc Kenzie J. F. Interacting of Magnetoacoustic and Entropy Waves with Normal MGD shock Waves // The physics of Fluids. 1969. Vol. 12, № 6. P. 1228-1236. 2. Электродинамика плазмы / А. И. Ахизер, И. А. Ахизер, Р. В. Половин и др. М., 1974. 720 с. 3. Александрова А. А., Хижняк Н. А. Исследование внутренних магнитного и скоростного

полей эллипсоида // *Магнит. гидродинамика*. 1989. № 4. С. 106—110. 4. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М. ; Л. 1946. 317 с. 5. *Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. К., 1986. 279 с.

*Поступила в редколлегию 27.11.89*