Проблемы бионики
1999. Вып. 51. С. 106–115 ХТУРЭ

УДК 519.7

Н.А. ГВОЗДИНСКАЯ

БУЛЕВЫ И ПРЕДИКАТНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Проблема создания математического аппарата для моделирования интеллектуальных процессов возникла уже давно. Научная мысль продвинулась довольно далеко по пути моделирования физических процессов, протекающих в окружающем нас мире. Зафиксировав некоторые начальные условия, можно с достаточно большой вероятностью предсказать конечное состояние процесса. Классическая кибернетическая схема [1] представлена на рис. 1.

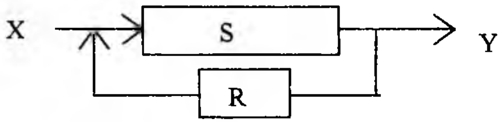


Рис. 1. Модель объекта управления с обратной связью:
X - входные параметры; Y - выходные параметры; S - модель объекта управления, т.е. модель некоторого процесса; R - оператор, обеспечивающий регулирование процесса на основании принципа обратной связи

Протекание физических процессов S достаточно хорошо формализовано. В связи с этим возник вопрос, возможна ли столь же успешная формализация интеллектуальной деятельности? Поисками ответа на поставленный вопрос занимается наука, носящая название "теория интеллекта" [2]. В качестве аппарата для описания на математическом языке, на сегодняшний день единственном, который воспринимается ЭВМ, предполагается использовать алгебру конечных предикатов. "На языке алгебры конечных предикатов можно выразить любой закон интеллекта и любую интеллектуальную деятельность, реализуемые на ЭВМ" [3].

Любой конечный n-местный предикат, алфавит которого содержит k символов, можно представить как элемент некоего поля логических скаляров. В то же время в [4] было отмечено, что существует аналогия между логической и линейной алгеброй. С учетом этого факта в работе [9] рассмотрены операции над логическими матрицами и их свойства, но приведенные примеры охватывают случай только скалярного поля $K=\{0, 1\}$. Однако все полученные результаты можно распространить и на вариант, когда полем логических скаляров является множество конечных n-местных предикатов. В этом случае каждый элемент логической матрицы представим гиперкубом размерности n. Например, рассмотрим трехместный предикат $R(x, y, z)$ над алфавитом $K=\{0, 1\}$ из $k=2$ символов. Графически его можно изобразить, как это показано на рис. 2, где каждой вершине соответствует значение предиката при образующих ее значениях аргументов x, y, z.

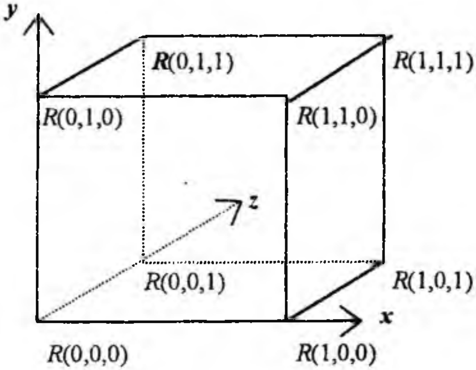
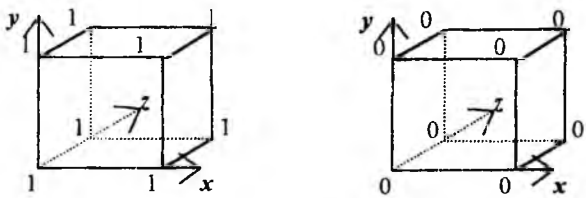


Рис. 2. Графическое представление трехместного предиката в виде трехмерного гиперкуба

Роль единичного элемента поля скаляров играет предикат, равный единице при всех значениях наборов аргументов, а роль нулевого элемента поля скаляров - предикат, равный нулю при всех значениях наборов аргументов. Графически единичный элемент представлен в виде гиперкуба, всем вершинам которого соответствуют единицы (рис. 3, а), а нулевой - гиперкубом, всем вершинам которого соответствуют нули (рис. 3, б).



а б

Рис. 3. Графическое представление единичного и нулевого элементов поля логических скаляров для случая трехместных предикатов

Согласно определениям предикатных операций [2, 11], все действия над матрицами, составленными из таких элементов, производятся поразрядно. Под *разрядом* понимается значение рассматриваемого предиката при одном из возможных наборов аргументов. Таким образом, бинарные операции (дизъюнкция и конъюнкция) предполагают, что их результатом будет элемент, каждому разряду которого соответствует значение производимой бинарной операции над одноименными разрядами участвующих в операции предикатов, где под *одноименными разрядами* понимаются значения этих предикатов от одинаковых наборов аргументов. Эти операции будут производиться по следующим правилам:

$$(P_i \vee P_j)(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n) \vee P_j(x_1, \ldots, x_n),$$

$$(P_i \wedge P_j)(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n) \wedge P_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Графически это представлено на рис. 4.

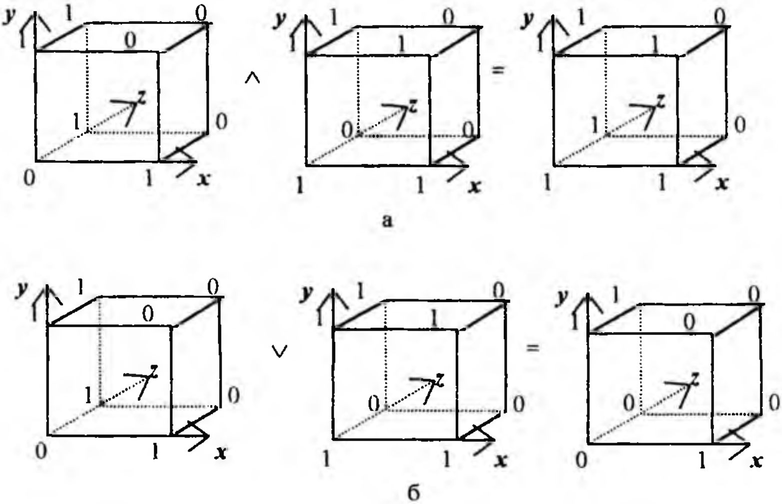


Рис. 4. Графическое представление дизъюнкции (а) и конъюнкции (б) логических скаляров в случае трехместных предикатов

Операция отрицания также проводится поразрядно. Графически это показано на рис. 5.

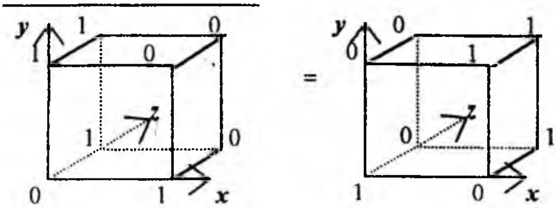


Рис. 5. Графическое представление операции отрицания логических скаляров в случае трехместных предикатов

Кроме того, систему всех конечных предикатов арности m над алфавитом из k символов можно рассматривать как логическое пространство. Полем логических скаляров для такого пространства может быть любая система всех конечных предикатов арности $n<m$. Однако алфавитом и для поля скаляров, и для множества векторов такого логического пространства должно служить одно и то же множество. Построенное таким образом пространство назовем *предикатным логическим пространством* или *пространством m-местных предикатов над скалярным полем n-местных предикатов*. Определим операции над элементами такого пространства. Дизъюнкцию и конъюнкцию векторов такого пространства будем находить по правилам, аналогичным тем, которые были введены для элементов поля логических скаляров:

$$(Q_i \vee Q_j)(x_1, \ldots, x_m)=Q_i(x_1, \ldots, x_m) \vee Q_j(x_1, \ldots, x_m),$$

$$(Q_i \wedge Q_j)(x_1, \ldots, x_m)=Q_i(x_1, \ldots, x_m) \wedge Q_j(x_1, \ldots, x_m).$$

Рассмотрим теперь поле логических скаляров, представляющее собой множество n-местных предикатов $P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $i_k \neq i_l$, l, $l=1, \ldots, n$. При этом множество индексов $\{i_1, \ldots, i_n\}$ является подмножеством множества индексов $\{1, \ldots, m\}$. В силу того, что все пространства m-местных предикатов, для которых аргументами предикатов скалярного поля служат всевозможные подмножества $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ множества $\{x_1, \ldots, x_m\}$, идентичны, будем считать, что предикаты-скаляры заданы на множестве первых n элементов множества $\{x_1, \ldots, x_m\}$, т.е. представляют собой n-местные предикаты $P(x_1, \ldots, x_n)$. Операция умножения вектора на скаляр в предикатных пространствах будет производиться по следующему правилу:

$$(P \cdot Q)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)=P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m).$$

Например, пусть полем логических скаляров служит набор одноместных предикатов $P(x)$ на двухэлементном множестве $K=\{0, 1\}$, а множество векторов представляет собой набор трехместных предикатов $R(x, y, z)$. Тогда умножение вектора на скаляр осуществляется по схеме, показанной на рис. 6. Случай, когда полем логических скаляров является множество двухместных предикатов $Q(x, y)$, представлен на рис. 7.

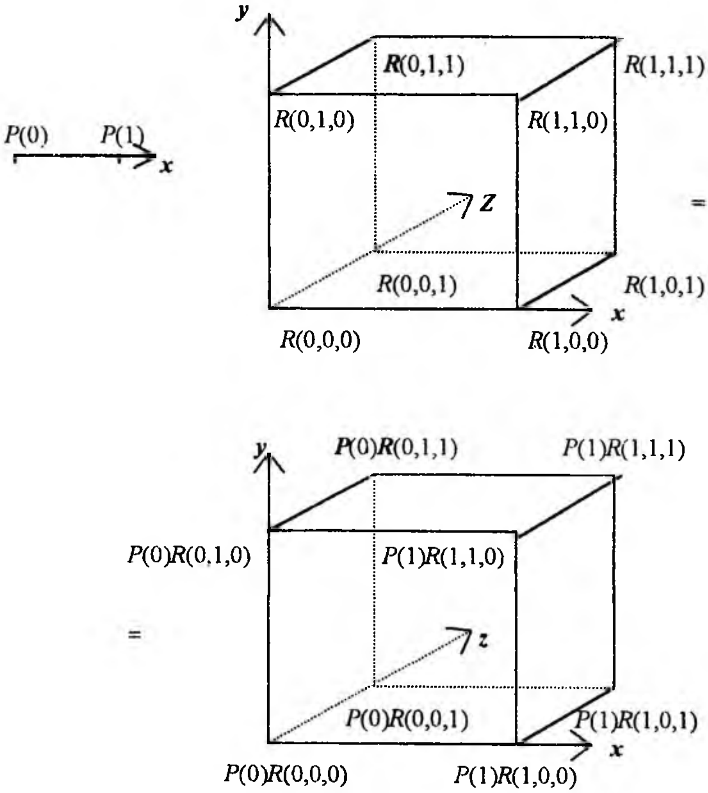


Рис. 6. Умножение логического вектора в виде трехместного предиката R(x, y, z) на логический скаляр, представленный одноместным предикатом P(x)

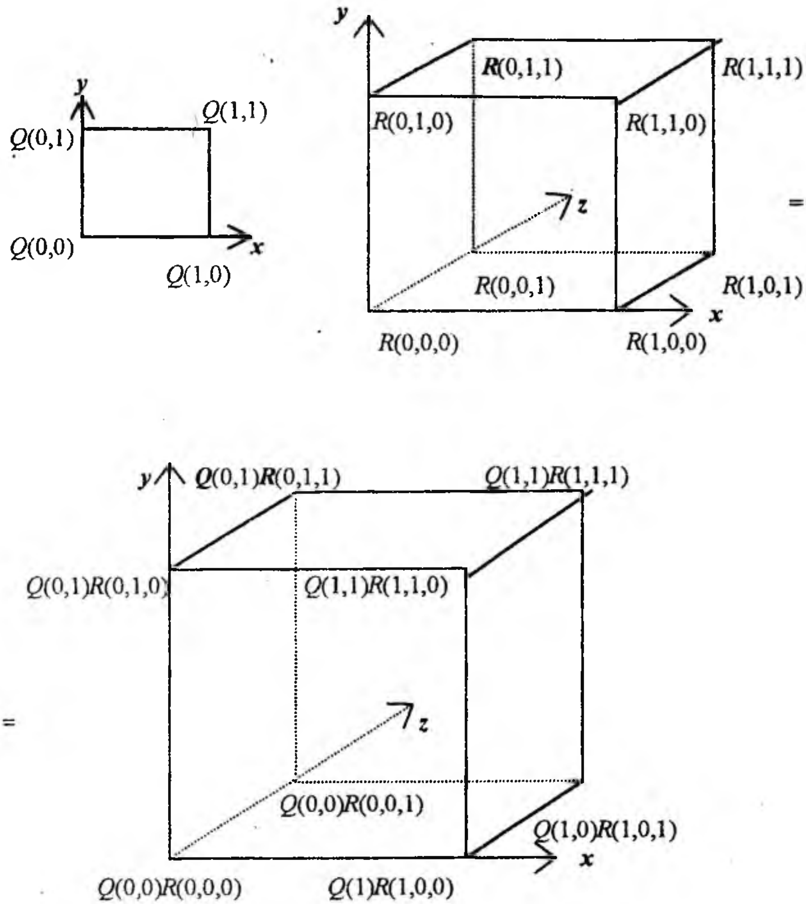


Рис 7. Умножение логического вектора в виде трехместного предиката $R(x, y, z)$, на логический скаляр, представленный двухместным предикатом $Q(x, y)$

Множество логических скаляров для описанного предикатного пространства будет иметь мощность 2^{k^n}, а количество векторов, составляющих рассматриваемое предикатное пространство, будет равно 2^{k^m} [5].

Теорема. *Пространство m-местных предикатов, заданное над скалярным полем n-местных предикатов, n<m, является совершенным.*

Доказательство. Обозначим множества m- и n-местных предикатов через L и G соответственно. Составим множество M из всевозможных наборов аргументов $x_{n+1}, ..., x_m$:

$$M=\{(x_{n+1}, ..., x_m),\ x_i \in K,\ n+1 \le i \le m\},$$

где K - алфавит, над которым заданы рассматриваемые предикаты. Для краткости записи элементы множества M будем обозначать через v. Теперь построим базис пространства L. В качестве базисных векторов возьмем предикаты вида

$$Q_v(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m)=\begin{cases}1,(x_{n+1},..,x_m)=v\\0,(x_{n+1},..,x_m)\ne v\end{cases},\quad v\in M,$$

т.е. в базисном векторе все разряды, в которых зафиксированы значения последних $(m$-$n)$ переменных, равны единице, а остальные разряды равны нулю. Индексом v базисного вектора при этом служит набор зафиксированных значений переменных $(x_{n+1}, ..., x_m)$.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $l(x_1, ..., x_m)\in L$. Его можно представить в виде следующей линейной комбинации базисных векторов:

$$l(x_1, ..., x_m)= \bigvee_{v\in M} l(x_1, ..., x_n , v)Q_v(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m), \qquad (1)$$

где $l(x_1, ..., x_n , v)$ – n-местный предикат, т.е. элемент $P_v(x_1, ..., x_n)$ скалярного поля G. Таким образом, равенство (1) можно записать в виде

$$l(x_1, ..., x_m)= \bigvee_{v\in M} P_v(x_1, ..., x_n)Q_v(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m),$$

что представляет собой разложение вектора l по построенному описанным выше способом базису. Очевидно, что разложение любого вектора по этому базису единственно. Обозначим векторы этого базиса через $a_1, ..., a_p$.

Рассмотрим любой другой базис $a'_1, ..., a'_p$ пространства L, разложение векторов которого по базису $a_1, ..., a_p$ запишется следующим образом:

$$\begin{cases}a'_1=\alpha_{11}a_1\vee...\vee\alpha_{1p}a_p\,,\\ \quad\dots\dots\dots\dots\\ a'_p=\alpha_{p1}a_1\vee...\vee\alpha_{pp}a_p\,.\end{cases} \qquad (2)$$

Тогда

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}..\alpha_{p1}\\ \dots\dots\\ \alpha_{1p}..\alpha_{pp}\end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $a_1, \ldots, a_p$ к базису $a'_1, \ldots, a'_p$[6]. Эта матрица определена однозначно в силу единственности разложения любого вектора пространства L по базису $a_1, \ldots, a_p$. Как было показано в работе [7], матрица A является обратимой. В силу того, что у любой обратимой логической матрицы существует только одна обратная, то матрица

$$B=\begin{pmatrix} \beta_{11}\cdots\beta_{p1} \\ \cdots\cdots \\ \beta_{1p}\cdots\beta_{pp} \end{pmatrix}$$

обратного перехода от базиса $a'_1, \ldots, a'_p$ к базису $a_1, \ldots, a_p$ также определена однозначно.

Возьмем произвольный вектор $l \in L$, имеющий в базисе $a_1, \ldots, a_p$ координаты $[l]=(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Обозначим координаты вектора l в базисе $a'_1, \ldots, a'_p$ через $[l]'=(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_{11}\cdots\beta_{p1} \\ \cdots\cdots\cdot \\ \beta_{1p}\cdots\beta_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Так как и λ_i, и β_{ij}, $i, j=1, \ldots, p$ определены однозначно, то и λ'_i также будет определена однозначно. Следовательно, вектор l будет иметь единственное разложение по любому базису пространства L. Это означает, что пространство L совершенно. Теорема доказана.

Вычислим размерность p такого пространства, т.е. найдем количество его базисных векторов. Согласно определению, любой вектор совершенного логического пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Число таких комбинаций будет равно $(2^{k^n})^p$. Кроме того, как было сказано выше, это число равно 2^{k^m}. Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$2^{k^m}=(2^{k^n})^p, \tag{3}$$

откуда, логарифмируя обе части по основанию 2, и находим число базисных векторов описанного выше совершенного предикатного пространства:

$$p=k^{m-n}. \tag{4}$$

В работе [6] приведен пример такого логического пространства, где в качестве поля логических скаляров рассматривается множество всех одноместных предикатов $P(x)$, а логическими векторами служат всевозможные двухместные предикаты $Q(x, y)$. Алфавитом в указанном пространствс служит множество $K=\{0, 1\}$. Очевидно, что $k=2$, $n=1$, $m=2$. Количество логических скаляров в этом примере равно четырем, а векторов - шестнадцати. Размерность этого пространства равна $2^{2-1}=2$.

Векторы булева пространства можно понимать как множество конституент единицы по m переменным, т.е. как множество точек алгебры булевых функций m переменных [8]. Следовательно, число векторов булева пространства равно 2^m. Поле логических скаляров для булева пространства содержит два элемента: ноль и единицу. Следовательно, справедливо следующее соотношение:

$$2^p=2^m,$$

где p - размерность булева пространства, т.е. число его базисных векторов. Очевидно, что

$$p=m. \tag{5}$$

Следует отметить, что операции конъюнкции, отрицания и свертки векторов [7] можно ввести только в том случае, когда рассматриваемое логическое пространство совершенно, так как в несовершенном логическом пространстве невозможно гарантировать однозначность этих операций в силу того, что разложение векторов по базису в таких пространствах не единственно [5].

Рассмотрим теперь матрицы линейных логических операторов [10]. В силу равенства (5), для булевых пространств любой матрице над полем $K=\{0, 1\}$ отвечает некоторый линейный логический оператор. Для предикатных пространств это не так. В случае таких пространств на размерность матриц, соответствующих линейным логическим операторам, накладывается следующее ограничение. Допустим, что некоторая логическая матрица $A_{q\times r}$ над полем логических скаляров, элементами которого являются конечные предикаты арности n над алфавитом из k символов, представляет собой матрицу некоторого логического оператора A, переводящего векторы предикатного пространства W размерности r в векторы предикатного пространства V размерности q. В силу равенства (4), для r и q должны выполняться следующие соотношения:

$$r=k^{m_r-n}, \tag{6}$$

$$q=k^{m_q-n}, \tag{7}$$

где m_r и m_q - арности предикатов, представляющих собой векторы пространств W и V соответственно. Из (6) и (7) следует, что указанная выше логическая матрица $A_{q\times r}$ является матрицей описанного линейного логического оператора в том и только в том случае, когда количество ее строк и количество ее столбцов представляют собой некоторую целую степень числа k.

Например, матрица

$$A=\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0)\\ (1,1) & (0,1)\\ (1,0) & (0,0)\end{pmatrix}$$

над полем одноместных предикатов над алфавитом $K=\{0, 1\}$ не соответствует ни одному линейному логическому оператору, так как число ее строк равно трем, а $k=2$. Матрица же

$$B=\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0) & (1,1) & (1,0)\\ (1,0) & (1,0) & (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}$$

соответствует линейному логическому оператору $\boldsymbol{B}$, переводящему векторы предикатного пространства W размерности 4 в векторы предикатного пространства V размерности 2. Учитывая соотношения (6) и (7), а также то, что $k=2$, а $n=1$, находим, что арность предикатов, представляющих собой векторы пространства образов V, равна $m_q=2$, а арность предикатов, представляющих собой векторы пространства прообразов W, равна $m_r=3$.

Список литературы. 1.*Кузин Л.Т.* Основы кибернетики: В 2-х томах. М.: Энергия, Т.1. Математические основы кибернетики. 1973. 504с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. Харьков: Выща шк. 1984. 143с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О проблемах теории интеллекта // Проблемы бионики, 1990. Вып. 44. С. 3-10. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Логическая алгебра // Проблемы бионики, 1991. Вып. 46. С. 1-10. 5. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Неполные и полные логические пространства // Проблемы бионики, 1991. Вып. 46. С. 10-17. 6. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических пространствах // АСУ и приборы автоматики, 1997. Вып. 106. С. 21-30. 7. *Гвоздинская Н.А.* О некоторых операциях над векторами совер-шенного логического пространства //АСУ и приборы автоматики. 1999 Вып. 109. С. 3-12. 8. *Поваров Г.Н.* О групповой инвариантности булевых функций. // Применение логики в науке и технике. М.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 263-340. 9. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических матрицах // Проблемы бионики, 1998. Вып. 48. С.12-22. 10. *Гвоздинская Н.А.* О матрицах линейных логических операторов //Проблемы бионики. 1999. Вып.50. С.25-29. 11. *Клини С.* Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480с.

Поступила в редколлегию 09.09.98