УДК 006.001.57

ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

ПЕТРОВ Э. Г., ПЕТРОВ К.Э., КОСТЕНКО А.Н.

Проводится системологический анализ проблемы определения структуры одномерного параметрического ряда, предлагается обобщенная математическая модель ее оптимизации.

1. Введение

Проблема унификации и стандартизации характеристик (параметров) различных изделий: крепежа, инструмента, деталей машин, радиоэлектронных изделий и т.д. имеет большое экономическое значение, так как обеспечивает совместимость, взаимозаменяемость, ремонтопригодность изделий, унификацию технологических процессов их изготовления, снижение себестоимости и т.д. Центральной проблемой унификации и стандартизации является обоснованный выбор типоразмерного ряда изделия. Решение этой задачи имеет давнюю историю и базируется на различных подходах, начиная от субъективного формирования ряда предпочтительных чисел и оканчивая методами математического программирования, ориентированными на оптимизацию различных функционалов, учитывающих функции спроса и затрат [1]. Общим недостатком таких моделей является их ориентация на конкретную отрасль и ограниченность учитываемых факторов. Ниже приведена попытка разработки обобщенной модели оптимизации структуры параметрических рядов.

2. Основные определения

Параметр – это некоторая одномерная, скалярная характеристика любого изделия. Например, номинальное значение денежной единицы, диаметр резьбового соединительного элемента, тактовая частота процессора, емкость оперативной памяти ЭВМ и т.д.

Под параметрическим рядом будем понимать множество (счетное или несчетное) возможных значений параметра. Если изделие характеризуется одним параметром, то ряд называется однопараметрическим, если двумя и более – многопараметрическим. В данной статье рассматриваются однопараметрические ряды.

Структурой параметрического ряда назовем набор его конкретных дискретных значений.

Потребители – это пользователи, применяющие изделия в своей функциональной деятельности, а производители – это изготовители изделий.

3. Ограничения и допущения

1. Параметрический ряд является ограниченным множеством, т.е. задана верхняя и нижняя граница его возможных значений.

2. Независимо от того, дискретным или непрерывным является параметр, на основе анализа его функционального содержания можно установить целесообразную дискретность и в дальнейшем рассматривать параметрический ряд как дискретную последовательность значений мощности M.

3. Структуру параметрического ряда образуют конкретные дискретные значения. Количество элементов структуры $n \leq M$.

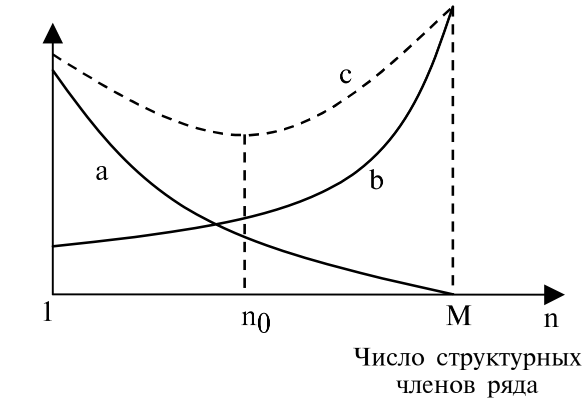
4. В общем случае, для реализации конкретного значения параметра, необходимого потребителю, можно использовать комбинацию m структурных элементов ряда. При этом m может быть ограниченным или нет. При $m = 1$ комбинации не допустимы, а потребитель может выбрать единственный структурный элемент параметрического ряда.

5. В качестве дополнительного может выступать требование, чтобы структура параметрического ряда позволяла путем комбинации реализовать любые его дискретные значения. Такое требование существует, например, для монетного параметрического ряда. При этом может быть задано ограничение на максимальное число структурных элементов, которое необходимо для формирования любого значения параметра. Указанное выше требование полного покрытия параметрического ряда структурными элементами может отсутствовать.

4. Содержательная постановка задачи

Потребителю для решения некоторых функциональных задач необходимо изделие с конкретным значением параметра. Если структура параметрического ряда включает в себя требуемое значение, потребитель выбирает этот элемент и не несет никаких потерь. В противном случае он комбинирует несколько изделий для достижения требуемого значения. При этом возникают некоторые потери, обусловленные увеличением объема, цены, веса и т.д. набора элементов по сравнению с единственным. Если точное требуемое значение при заданной структуре параметрического ряда не достижимо, потребитель выбирает изделие с ближайшим, большим или меньшим значением параметра и несет некоторые потери из-за несоответствия его функциональным требованиям.

Таким образом, возможные потери всех потребителей являются убывающей функцией числа структурных членов параметрического ряда. При приближении числа структурных членов параметрического ряда к M суммарные потери всех потребителей стремятся к нулю, как это показано на рисунке (кривая а).



Зависимость потерь от структуры параметрического ряда

С другой стороны, производитель для производства каждого типа изделия с конкретным значением параметра должен приобрести или создать специальное оборудование, оснастку, приспособления, инструменты и т.д. Кроме того, при переходе от производства одного типа изделия к другому возникают потери рабочего времени на переналадку оборудования и изменение технологического процесса. Указанные суммарные затраты тем больше, чем больше число типов выпускаемой продукции. Таким образом, с ростом числа элементов структуры параметрического ряда возрастают суммарные производственные затраты (кривая b на рисунке) при фиксированном объеме выпуска.

С учетом указанных противоречивых тенденций можно сформулировать следующую оптимизационную задачу: определить такую структуру параметрического ряда, т.е. число его элементов n, и соответствующие каждому из них конкретные значения параметра f_i, $i=\overline{1,n}$, которые минимизируют суммарные потери общества, т.е. потребителей и производителей (кривая с на рисунке).

5. Формальная постановка задачи оптимизации структуры параметрического ряда

Обозначим число членов структуры параметрического ряда n, а конкретные значения параметров каждого из них f_i, $i=\overline{1,n}$. Тогда потери потребителей будут равны

$$P_1 = P_1(n, f_i), \quad i=\overline{1,n} \ , \tag{1}$$

а затраты производителей

$$P_2 = P_2(n, f_i), \quad i=\overline{1,n} \ . \tag{2}$$

В соответствии с этими обозначениями оптимизационная модель имеет вид

$$\left\langle n^0, f^0{}_i \right\rangle = \arg\min_{n, f_i}\left[P_1(n,f_i) + P_2(n,f_i)\right]; \quad i=\overline{1,n} \tag{3}$$

при ограничениях $1 \le n \le M$;

$$f_i \in \left[f_{min}, f_{max}\right], \quad \forall i=\overline{1,n} \ . \tag{4}$$

Конструктивное решение задачи (3), (4) возможно только при конкретизации вида функций (1) и (2).

5.1. Математическая модель потерь потребителей

Пусть пользователю необходимо изделие со значением параметра $f_к$. При этом задана структура параметрического ряда, содержащая n элементов со значением параметра f_i, $i=\overline{1,n}$ и $f_к \ne f_i$, $\forall i=\overline{1,n}$. Будем полагать, что известна функция стоимости элемента от значения параметра, т.е. $S_i = S(f_i)$.

5.1.1. Ситуация 1. Требуемое значение параметра $f_к$ может быть получено комбинацией нескольких структурных элементов ряда, т.е.

$$f_к = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f_i \ , \tag{5}$$

$$\text{где} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 - \text{если } i - \text{й элемент использован} \\ \qquad \text{в комбинации ,} \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Ограничение, учитывающее допустимое число элементов, используемых в комбинации, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \le m \ . \tag{7}$$

Затраты на достижение f_k соответственно равны

$$S(f_к^ф) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i S_i(f_i) \ . \tag{8}$$

$$\text{Тогда} \quad P_{11} = S(f_к^ф) - S(f_к) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i S_i(f_i) - S(f_к), \tag{9}$$

определяет нерациональные затраты (потери) потребителя.

5.1.2. Ситуация 2. Требуемое значение параметра $f_к$ нереализуемо комбинацией структурных элементов ряда или комбинации не допустимы $(m=1)$. В этом случае пользователь выбирает изделие со значением параметра $f^ф$, ближайшим в большую или меньшую сторону к $f_к$. Предположим, что известна функция потерь потребителя при несовпадении значений параметров $f_к$ и $f^ф$, которую обозначим $S(\Delta f)$.

Не обсуждая конкретный вид этой функции, отметим, что в общем случае она различна при округлении в большую и меньшую стороны и ее вид определяется знаком, а конкретное значение модулем Δf. В некоторых случаях округление в меньшую сторону вообще недопустимо. Тогда потери потребителя в данной ситуации равны

$$P_{12} = S(\Delta f) = S(f_к, f^ф) = S\left[\ \left| f_к - \sum_{i=1}^{n} \delta_i f_i \right| \ \right],$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \le m \ . \tag{10}$$

5.1.3. Обобщенная модель потерь потребителя

В общем случае потери потребителя равны

$$P_1 = P_{12} + P_{12} = S(f_к) - \sum_{i=1}^{n} \delta_i S_i(t_i) +$$

$$+ S\left[\ \left| f_к - \sum_{i=1}^{n} \delta_i S_i f_i \right| \ \right]; \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i \le m \ ,$$

где δ_i определяется соотношением (6).

5.1.4. Частная оптимизационная задача

Потребитель стремится минимизировать свои нерациональные потери. В связи с этим сформулируем следующую оптимизационную задачу.

При заданной структуре параметрического ряда, т.е. определенных $\langle n, f_i \rangle$, известных функциях стоимости элемента от значения параметра $S_i = F_i(f_i)$, потерь за счет несовпадения параметров $S(\Delta f)$ и ограничении на число элементов m, которое можно использовать при комплексировании, выбрать такие структурные элементы ряда, которые минимизируют целевой функционал

$$P_l \to \min_{\delta_i}, \quad \sum_{i=1}^{n}\delta_i \le m. . \qquad (12)$$

5.1.5. Модель оценки потерь множества потребителей

Описанные выше модели определяют потери единичного потребителя. Синтезируем математическую модель потерь множества потребителей.

Будем полагать, что известны вид и статистические параметры функции спроса, т.е. функции плотности распределения вероятности спроса на изделия с различными значениями параметра $p(f_к)$. Эта функция может быть равновероятной, нормальной или любой другой. Все последующие рассуждения не зависят от конкретного вида функции спроса.

Определение структуры параметрического ряда $\langle n, f_i \rangle$, $i = \overline{1, n}$, т.е задание числа и конкретных значений параметра разбивает весь интервал возможных значений параметра $[f_{min}, f_{max}]$ на ряд, в общем случае не равных, отрезков $[f_i, f_{i+1}]$. Тогда вероятность попадания в каждый из них конкретного запроса $f_к$ равна

$$P(f_i, f_{i+1}) = \int_{f_i}^{f_{i+1}} p(f_К)df \ , \qquad (13)$$

при этом очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n} P(f_i, f_{i+1}) = 1. \qquad (14)$$

Предположим, что известен общий спрос на изделия на плановом периоде, равный N. Тогда количество запросов на изделия со значениями параметра, лежащими в интервале $[f_i, f_{i+1}]$, будет равно

$$N_i = P[f_i, f_{i+1}]N \ . \qquad (15)$$

Для простоты, но без потери общности, допустим, что внутри всех структурных интервалов спрос подчинен закону равной вероятности. Это означает, что рассматривается случай кусочно-постоянной аппроксимации (гистограмма) реального закона распределения. Тогда математическое ожидание отклонения требуемого значения $f_к$ от ближайших структурных в интервале $[f_i, f_{i+1}]$ равно

$$m(\Delta f_i) = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \ . \qquad (16)$$

Обозначим общие потери среднестатистического потребителя, потребность которого попала в j-й структурный интервал, через $\Delta S_{1j}[m(\Delta f_i)]$. В общем случае эти потери для каждого j-го интервала определяются путем решения частной оптимизационной задачи, приведенной в разделе 5.1.4. Тогда суммарные потери потребителей, спрос которых попал в j-й структурный интервал, равны

$$\Delta S_{1j}^{\Sigma} = \Delta S_{1j}[m(\Delta f_i)] \cdot N_1 = \Delta S_{ij}[m(\Delta f_i)] \cdot P_j N, \quad (17)$$

а суммарные потери всех потребителей изделия равны

$$\Delta S_{1\Sigma} = \sum_{j=1}^{n} \Delta S_{1j} \cdot P_j N = N \sum_{j=1}^{n} \Delta S_{1j} P_j \ . \qquad (18)$$

5.2. Математическая модель затрат производителей

Будем полагать, что затраты производителей складываются из трех составляющих: капитальных затрат на организацию производства каждого типоразмера (значения параметра) изделия (это общие затраты на оборудование, оснастку, приспособления, инструменты, производственные площади и т.д.); затрат на производство каждого изделия; затрат на переналадку оборудования при переходе от производства одного типоразмера к другому. Формализуем указанные составляющие затрат производителей.

5.2.1. Оценка капитальных затрат

Обозначим общие капитальные затраты на производство изделий с i-м значением параметра $Z_{кi}$.

Предположим, что известна зависимость $Z_{кi}$ от планового объема выпуска изделий N_i, т.е.

$$Z_{Кi} = F_К(N_i) \ . \qquad (19)$$

Эти затраты должны окупиться за некоторый нормативный срок T. Для учета этого перейдем к приведенным капитальным затратам

$$Z_{кi}^{п} = Z_{кi}(N_i) \cdot \eta = Z_{кi}(N_i) \cdot \frac{1}{T} \ , \qquad (20)$$

где η – нормативный коэффициент окупаемости капитальных затрат. Тогда величина капитальных затрат, входящих в стоимость одного изделия i-го типа с учетом (15), равна

$$Z_{Кi}^{Н} = Z_{Кi}^{П} / N_i = Z_{Кi}^{П} / NP_i \ . \qquad (21)$$

Общие суммарные приведенные капитальные затраты на производство всех N типов изделий равны

$$Z_{к\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} Z_{кi}^{п} \ . \qquad (22)$$

5.2.2. Затраты на производство единичного изделия

Величина этих затрат определяется количеством труда, материалов, энергии, необходимых для производства одного изделия i-го типа. Обозначим эти затраты через $Z_{иi}^{(1`)}$. Тогда затраты на производство партий N_i изделий будут равны

$$Z_{иi} = Z_{иi}^{(1)} \cdot N_i = Z_{иi}^{(1)} \cdot P_i N\ , \qquad (23)$$

а на производство всех типов изделий

$$Z_{и\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} Z_{иi}^{(1)} \cdot P_i N = N \sum_{i=1}^{n} Z_{иi}^{(1)} \cdot P_i\ . \qquad (24)$$

5.2.3. Затраты на переналадку оборудования

Предположим, что затраты на переналадку оборудования при переходе с производства одного типа изделия на другое одинаковы и равны $Z_н$.

Общее число переналадок оборудования при выпуске за плановый период T общего объема N изделий определяется спецификой продукции, множеством конкретных организационных, производственных, технологических факторов и может быть оценено только для каждой конкретной ситуации. Вместе с этим очевидно, что при прочих равных условиях определяющими факторами являются количество типов изделия (структурных единиц параметрического ряда n) и объем выпуска изделий каждого типа $N_i,\quad i = \overline{1, N}$. Предположим, что известна функция, определяющая число необходимых переналадок. В зависимости от количества типов n и объема выпуска каждого типа продукции $N_i,\quad i = \overline{1, n}$:

$$B = F_n(n, N_i)\ . \qquad (25)$$

Тогда общие затраты на переналадку оборудования равны

$$Z_{н\Sigma} = Z_н \cdot B\ . \qquad (26)$$

5.2.4. Математическая модель суммарных затрат производителей

С учетом всех составляющих суммарные затраты производителей на производство некоторого параметрического ряда изделий равны

$$P_2 = Z_{к\Sigma} + Z_{и\Sigma} + Z_{н\Sigma}\ , \qquad (27)$$

при этом все слагаемые являются функциями числа элементов структуры параметрического ряда n и их значений Z_i. С учетом этого в общем виде затраты производителей можно записать так:

$$P_2 = \sum_{f=1}^{M} \delta_f Z_{кf} + N \sum_{f=1}^{M} \delta_f Z_{иf}^{(1)} P_f + Z_н \times \times F_n\Big(\sum_{f=1}^{M} \delta_f, NP_f\Big), \qquad (28)$$

где M – мощность возможных дискретных значений параметра;

$$\delta_f = \begin{cases} 1 - \text{если значение f входит в структуру} \\ \qquad \text{параметрического ряда}, \\ 0 - \text{в противном случае}\ . \end{cases} \qquad (29)$$

Таким образом, конкретизированы составляющие оптимизационного функционала (3).

6. Заключение

Минимуму потерь потребителей соответствует структура параметрического ряда, которая содержит M элементов, а минимуму затрат производителей – структура с единственным элементом. Основой для компромисса является минимум суммарных потерь общества, определяемых функционалом (3). Проведенный в статье анализ показал, что рассматриваемая оптимизационная задача относится к классу задач дискретного программирования с булевыми переменными.

Предложенная оптимизационная модель является системологической и определяет подходы и методологию решения класса задач, в рамках которого возможна постановка различных частных оптимизационных задач. При решении конкретных задач возникает две проблемы:

– определение необходимой исходной информации, а также структурная и параметрическая идентификация всех функциональных зависимостей, входящих в модель (3);

– выбор для сформулированного класса комбинаторных задач эффективного по точности и вычислительной сложности численного метода решения задачи дискретного программирования с булевыми переменными.

Авторы предполагают в дальнейшем рассмотреть указанные вопросы на примере решения задач оптимизации структуры параметрических рядов комплектующих элементов ЭВМ.

Литература: 1. *Домогацкий И.А., Лапин М.С., Меткин Н.П.* Унификация инженерных решений технологической подготовки производства микросборок. М.: Изд-во стандартов, 1989. 248с.

Поступила в редколлегию 19.11.2000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Яковлев С.В.

Петров Эдуард Георгиевич, д-р техн. наук, проф., декан ф-та КН, зав. кафедрой системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, теория принятия решений. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

Петров Константин Эдуардович, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Харьковского университета внутренних дел. Научные интересы: теория принятия решений, моделирование организационных систем. Адрес: Украина, 61080, Харьков, пр. 50-летия СССР, 27, тел. 50-30-67.

Костенко Александр Николаевич, научный сотрудник кафедры системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: оптимизация в технике, математические модели и алгоритмы выбора сложных технических объектов и систем в условиях непредвиденности. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.