

Н. Г. ЗУЕВ, канд. физ.-мат. наук, А. М. ТИТАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
И. П. ЧЕРЕДНИКОВ, М. АБДЕРРАЗИК

АНАЛИЗ АМПЛИТУДНЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗОННЫХ СИСТЕМ

Одним из важных вопросов применения метода гармонического баланса при исследовании нелинейных систем является задача анализа резонансных явлений нелинейных параметрических зонных систем, работающих в высших зонах параметрической неустойчивости (параметрические зонные системы $PZnS$). В работе [1] при исследовании параметрического генератора были рассмотрены первые две зоны неустойчивости. Было установлено, что процессы в $PZnS$ с сильными полями внешнего возбуждения (накачки) в высших зонах неустойчивости происходят с гораздо большей глубиной модуляции и более сложными условиями параметрического возбуждения. Поэтому представляет интерес обобщить известные и новые результаты, рассмотреть особенности процессов в высших зонах неустойчивости.

Целью работы является обоснование применения метода гармонического баланса при исследовании амплитудных и частотных характеристик для слабо и сильно нелинейных параметрических зонных систем.

Классическая схема индуктивного параметрического генератора представляет собой два магнитных сердечника с обмотками: накачки – W_1 , резонансными – W_2 .

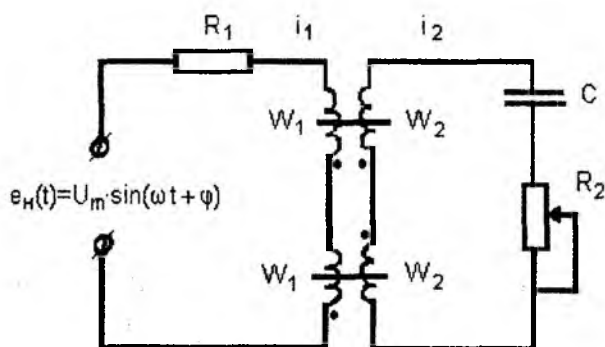


Рис. 1

Схема параметрического зонного устройства, фазировка обмоток и обозначение элементов приведены на рис.1. При построении математической модели пренебрегаем магнитным потоком рассеивания, используем законы Кирхгофа и полного тока. Нелинейную зависимость напряженности магнитного поля H от магнитной индукции B в сердечнике аппроксимируем гиперболическим синусом $H = \alpha \cdot sh \beta B$, где α и β – постоянные коэффициенты. После соответствующих преобразований [2], при синусоидальном напряжении накачки $e(t) = U_m \cdot \sin(\tau + \varphi)$ получим:

$$\begin{cases} \dot{x} + \gamma_1 \cdot sh \frac{x}{2} \cdot ch \frac{y}{2} = U'_m \cdot \sin(\tau + \varphi), \\ \ddot{y} + \gamma_2 \cdot ch \frac{x}{2} \cdot sh \frac{y}{2} + \gamma_3 \cdot \frac{d}{d\tau} \left(ch \frac{x}{2} \cdot sh \frac{y}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } x = \beta \cdot (B_I + B_{II}); \quad y = \beta \cdot (B_I - B_{II}); \quad \gamma_1 = \frac{R_1}{L_1 \cdot \omega}; \quad \gamma_2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \gamma_3 = \frac{R_2}{L_2 \cdot \omega};$$

$U'_m = \frac{\beta \cdot U_m}{S \cdot W_1 \cdot \omega}$; $L_{1,2} = \frac{S \cdot W_{1,2}^2}{\alpha \cdot \beta \cdot l}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{C \cdot L_2}$; B_I и B_{II} – индукция магнитного поля в первом и втором магнитных сердечниках.

Решение системы (1) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot B_n \cdot \sin \tau, \\ y &= 2 \cdot B_n \cdot \sin[n \cdot (\tau + \varphi_n)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $2 \cdot B_n$ - амплитуда сигнала накачки; $2 \cdot B_n$ - амплитуда исследуемой n - й гармоники на выходе параметрического зонного устройства.

Введем обозначения: $I_j(B_n) = I_{j,n}$, $I_j(B_n) = I_{j,n}$, где $I_{j,n}$, $I_{j,n}$ - модифицированные функции Бесселя, j - неотрицательные целые числа, n - натуральные числа. После громоздких преобразований из системы (1) получим выражения для синусной и косинусной составляющих:

$$\begin{aligned} & -n^2 \cdot B_n \cdot \cos \cdot n \cdot \varphi_n + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_2 \cdot \left\{ (-1)^{(n+1)(j-1)} \cdot I_{(2 \cdot j-2)n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} - \right. \\ & \left. - (-1)^{(n+1)j-1} \cdot I_{2 \cdot j,n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} \right\} \cos(2 \cdot j-1) \cdot n \cdot \varphi_n + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} n \cdot \gamma_3 \cdot \left\{ (-1)^{(n+1)(j-1)} \cdot I_{(2 \cdot j-2)n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} - \right. \\ & \left. - (-1)^{(n+1)j-1} \cdot I_{2 \cdot j,n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} \right\} \sin(2 \cdot j-1) \cdot n \cdot \varphi_n = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

(синусная составляющая),

$$\begin{aligned} & -n^2 \cdot B_n \cdot \sin \cdot n \cdot \varphi_n + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_2 \cdot \left\{ (-1)^{(n+1)(j-1)} \cdot I_{(2 \cdot j-2)n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} + \right. \\ & \left. + (-1)^{(n+1)j-1} \cdot I_{2 \cdot j,n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} \right\} \sin(2 \cdot j-1) \cdot n \cdot \varphi_n + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} n \cdot \gamma_3 \cdot \left\{ (-1)^{(n+1)(j-1)} \cdot I_{(2 \cdot j-2)n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} - \right. \\ & \left. - (-1)^{(n+1)j-1} \cdot I_{2 \cdot j,n,n} \cdot I_{2 \cdot j-1,n} \right\} \cos(2 \cdot j-1) \cdot n \cdot \varphi_n = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

(косинусная составляющая).

Получим графики зависимостей амплитуд n -х гармоник как функций амплитуд сигналов накачки $B_n = f(B_n)$. В формулах для расчета γ_1 , γ_2 , γ_3 примем значения коэффициентов, равные соответственно $l=0.0267$, $C=3 \cdot 10^{-7}$, $S=6 \cdot 10^{-6}$, $W_2=75$, $\omega=2 \cdot \pi \cdot 10^3$. Для коэффициентов аппроксимации α и β рассмотрим два случая, соответствующие режимам сильной и слабой нелинейности. При аппроксимации гиперболическим синусом для слабо нелинейного случая $\alpha=0,365$, $\beta=12,12$. Для сильно нелинейного случая, при котором кривая намагничивания близка к прямоугольной, $\alpha=0.244 \cdot 10^{-4}$, $\beta=37,5$.

Из (3) и (4) после ряда преобразований, ограничиваясь наиболее существенными членами [2], получим уравнения для определения амплитудных характеристик в виде:

$$\left(n^2 \cdot B_n - \gamma_2 \cdot I_{0,n} I_{1,n} \right)^2 + \left(n \gamma_3 \cdot I_{0,n} \cdot I_{1,n} \right)^2 = I_{2,n,n}^2 \cdot I_{1,n}^2 \cdot \left(\gamma_2^2 + n^2 \cdot \gamma^2 \right) \quad (5)$$

На координатной плоскости (B_n, B_n) построим множество точек, удовлетворяющих уравнению (5). На рис. 2 приведены амплитудные характеристики для слабо (а) и сильно (б) нелинейных систем. Для того чтобы не загромождать графики, на рис. 2б показаны только три гармоники - 1,4,7, пунктиром показаны соответствующие «скелетные» кривые. Из рис. 2 видно, что в сильно нелинейном случае максимумы амплитуд n -х гармоник значительно выше, чем соответствующие максимумы в слабо нелинейном случае. С увеличением сопротивления R_2 максимумы амплитуд гармоник уменьшаются, а значения B_n , дающие максимумы, сдвигаются вправо (увеличиваются). Из анализа амплитудных характеристик следует, что

переход от одной зоны возбуждения к следующей осуществляется путем изменения амплитуды сигнала накачки при фиксированной частоте накачки.

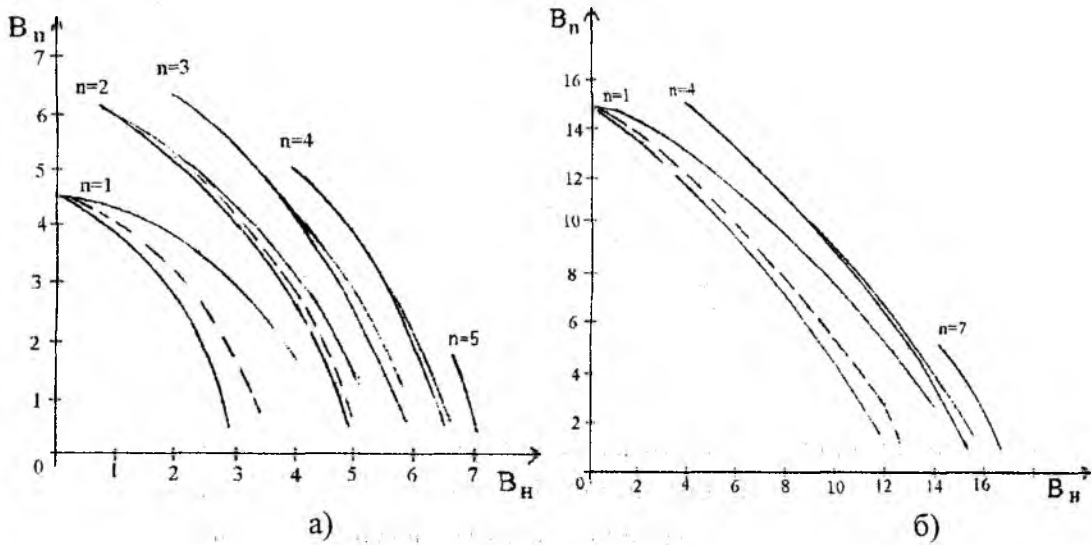


Рис. 2

Следует отметить, что, уменьшая потери в резонансном контуре, можно получить и другие, более высокие гармоники. Так, при $R_2 = 10^{-3}$ Ом может возбуждаться 7 гармоник в случае слабой нелинейности и 10 гармоник – в случае сильно нелинейной системы; при $R_2 = 10^{-9}$ Ом может возникнуть 11 и 16 гармоник соответственно. При этом с уменьшением сопротивления R_2 возрастает не только число возбуждаемых гармоник, но и их амплитуда. Номер гармоники, имеющей наибольшую амплитуду, также возрастает с уменьшением R_2 . Так, в случае сильно нелинейной системы при $R_2 = 0,1$ Ом наибольшую амплитуду из всех возбуждаемых имеет третья гармоника, при $R_2 = 10^{-3}$ Ом – четвертая гармоника, при $R_2 = 10^{-9}$ – шестая. В случае слабо нелинейной системы имеем следующее: при $R_2 = 0,1$ Ом наибольшую амплитуду имеет третья гармоника, при $R_2 = 10^{-3}$ Ом – четвертая, при $R_2 = 10^{-9}$ – шестая. Это видно на рис. 3, где приведены амплитудные характеристики для различных R_2 .

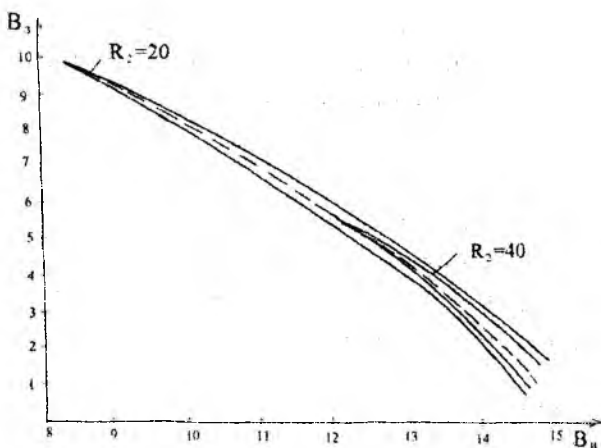


Рис. 3

Для изучения частотных свойств параметрической системы обратимся еще раз к уравнению (5), зафиксируем V_H , будем менять частоту накачки f . В этом случае воспользуемся коэффициентами

$$\gamma_2 = \frac{\omega_0^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2}, \quad \gamma_3 = \frac{L_2 \cdot R_2}{2 \cdot \pi \cdot f}$$

в которые входит частота накачки. Расчетные резонансные кривые (амплитудно-частотные характеристики для третьей зоны) для случаев слабо (а) и сильно (б) нелинейных параметрических систем приведены на рис. 4.

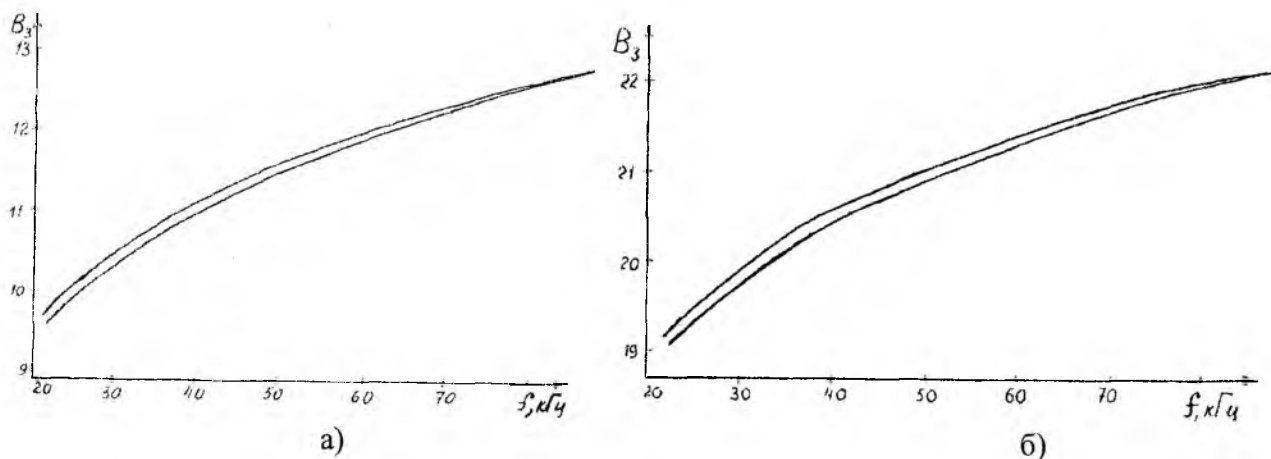


Рис. 4

На рис. 5 приведена амплитудно-частотная характеристика третьей гармоники для сильно нелинейного случая при $R_2 = 20$ Ом, 40 Ом. Из анализа резонансных кривых следует, что при уменьшении R_2 происходит возрастание амплитуд высших гармоник. Также уменьшение затухания ведет к увеличению затягивания колебаний. Как показали исследования, в PZnS, сильная нелинейность приводит к нарушению рационального отношения между частотами параметрически возбуждаемых колебаний и накачки.

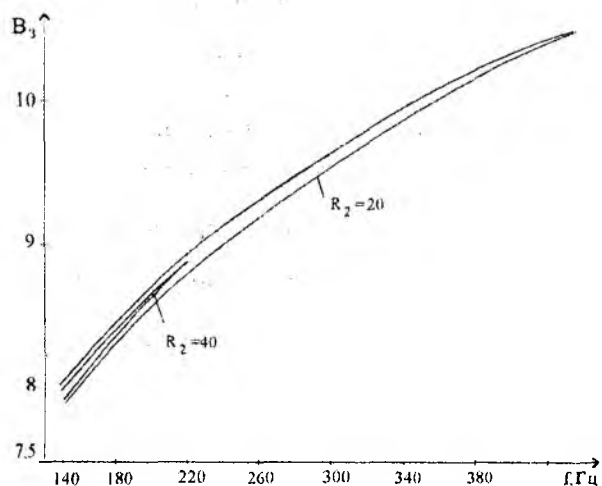


Рис. 5

На рис. 6 приведены экспериментальные частотные характеристики параметрического зонного устройства в высших зонах неустойчивости [3]. Номера зон указаны соответственно $n=1...5$. Параметрическое зонное устройство создано на двух ферритовых сердечниках M2000 с размерами $7 \times 4 \times 3$, $W_1=W_2=20$ витков, емкость линейного конденсатора в резонансной цепи лежит в пределах $0,001..1,1$ мкФ, частота накачки изменялась в пределах $10-60$ кГц, напряжение накачки изменялось в пределах $0...20$ В. Кривые (рис. 6а) получены путем настройки резонансного контура изменением напряжения накачки на частоту параметрических колебаний, равную 60 кГц. На всех рисунках приведено качественное изменение амплитуды колебаний в параметрическом зонном устройстве, так как количественная оценка вызывает большие трудности (измерительная аппаратура фиксирует амплитуду основной гармоники соответствующей зоны неустойчивости).

Частота f_n параметрических зонных колебаний измерялась цифровым частотомером ЧЗ-33 с погрешностью порядка $0,1$ %. Как видно из полученных экспериментальных частотных характеристик, при частоте $f = 60 \text{ кГц} = \text{const}$ на рис. 6а наблюдается кратное рациональное отношение частот накачки и параметрических колебаний, т.е. выполняется классическое условие $\frac{f_n}{f} = \frac{n}{2}$. Частотная характеристика, приведенная на рис. 6б (в соответствующих зонах указаны частоты f_n), получена при постоянной амплитуде накачки, т.е. $B_m = \text{const}$. Изменение частоты накачки f вызывает изменение параметров ферритовых сердечников, что

На рис. 6 приведены экспериментальные частотные характеристики параметрического зонного устройства в высших зонах неустойчивости [3]. Номера зон указаны соответственно $n=1...5$. Параметрическое зонное устройство создано на двух ферритовых сердечниках M2000 с размерами $7 \times 4 \times 3$, $W_1=W_2=20$ витков, емкость линейного конденсатора в резонансной цепи лежит в пределах $0,001..1,1$ мкФ, частота накачки изменялась в пределах $10-60$ кГц, напряжение накачки изменялось в пределах $0...20$ В. Кривые (рис. 6а) получены путем настройки резонансного контура изменением напряжения накачки на частоту параметрических колебаний, равную 60 кГц. На всех рисунках приведено качественное изменение амплитуды колебаний в параметрическом зонном устройстве, так как количественная оценка вызывает большие трудности (измерительная аппаратура фиксирует амплитуду основной гармоники соответствующей зоны неустойчивости).

сказывается на изменении средней интегральной индуктивности \bar{L}_i и, естественно, на средней собственной частоте контура. При этом в самих зонах неустойчивости четко выполняется условие $\frac{f_H}{f} = \frac{n}{2}$, а при переходе от зоны к зоне это условие не выполняется при фиксированной частоте накачки, т.е. нарушается рациональное отношение и наблюдается смещение зон неустойчивости. Причем рабочая область частот накачки сокращается в 2...4 раза в зависимости от параметров сердечника и резонансного контура.

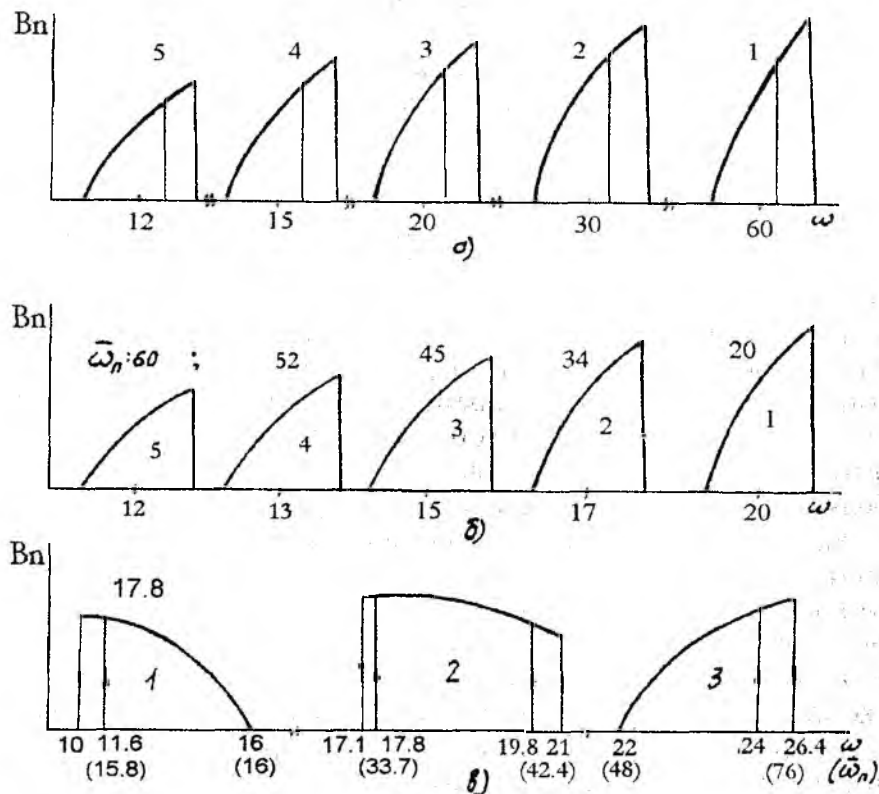


Рис. 6

Так, согласно рис. 6б, при изменении f от низких частот к высоким наблюдается следующее. При $f=12$ кГц в параметрическом зонном устройстве наблюдаются колебания с частотой $f_n = 60$ кГц, а уже при $f = 20$ кГц возбуждаются параметрические зонные колебания с частотой $\omega_n = 20$ кГц. Таким образом, в данном случае нарушается известное условие ра-

ционального отношения частот $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ резонанса, например для первой зоны неустойчивости имеется неравенство $\frac{f_n}{f} \neq \frac{n}{2}$, т.е. $\frac{20}{15} \neq \frac{5}{2}$.

На рис. 6в приведено еще одно неизвестное свойство нелинейных параметрических зонных систем при частоте накачки 16 кГц и емкости резонансного контура $C=0,11$ мкФ. Так, если во второй зоне неустойчивости создать условие для двустороннего жесткого режима (выбором равенства реактивных сопротивлений резонансного контура), то при переходе в первую зону неустойчивости со стороны второй зоны (от высоких частот накачки к низким) наблюдается мягкий режим возбуждения параметрических зонных колебаний. При дальнейшем уменьшении частоты ω наблюдается жесткий срыв колебаний. Это говорит о том, что в первой зоне неустойчивости преобладает индуктивный характер сопротивления в контуре.

При переходе в третью зону неустойчивости со стороны второй также наблюдается мягкий режим возбуждения колебаний, а дальнейшее увеличение частоты f приводит соответственно к жесткому их срыву. Это явление соответствует емкостному режиму резонансного

контура. Физика этого явления состоит в том, что при увеличении частоты f уменьшается \bar{L}_* , как и в случае, приведенном на рис. 6б, что приводит к изменению f_n . На оси частот (рис. 6в) в скобках приведены значения средних частот параметрических зонных колебаний. Полученные результаты показывают, что при изменении частоты накачки от 11,6 до 16 кГц в первой зоне неустойчивости наблюдаются стабильные колебания с частотой порядка 16 кГц. Во второй зоне неустойчивости частоты параметрических колебаний и накачки мало отличаются друг от друга как при возбуждении параметрических колебаний, так и при их гашении.

В третьей зоне неустойчивости при движении частоты накачки со стороны второй зоны возбуждаются колебания с частотой, не соответствующей условию $\frac{f_n}{f} = \frac{n}{2}$. Так, для $f=21$ кГц параметрические зонные колебания должны иметь частоту 63 кГц, а реально $f_3=48$ кГц. При увеличении частоты накачки частота параметрических колебаний догоняет частоту накачки,

и, в случае их кратного равенства (при выполнении условия $\frac{f_n}{f} = \frac{n}{2}$), происходит срыв параметрических зонных колебаний. Жесткое возбуждение со стороны четвертой зоны неустойчивости также наблюдается при рациональном кратном равенстве f и f_3 . Правда, в этом наблюдается обычное затягивание.

Для проверки достоверности теоретических и экспериментальных результатов была разработана структура алгоритма исследования параметрических зонных устройств (рис. 7). Исходными данными при проведении исследований являются тип используемого нелинейного энергоемкого элемента (для индуктивных устройств – ферромагнитного сердечника), диапазон изменения входных воздействий, тип параметрического устройства. Алгоритм подразделяется на две большие ветви: аналитического и экспериментального исследований. Общей частью для них является формулировка требований, предъявляемых к параметрическому зонному устройству, и определение исходных данных.

Ветвь аналитических исследований включает в себя этапы: определение желаемой внутренней структуры параметрического зонного устройства; построение физической модели, которая должна отражать требуемую структуру параметрического устройства, содержать соответствующее количество управляющих входов и информационных выходов. На основании физической модели строится математическая модель и определяются входящие в нее постоянные коэффициенты. На следующем этапе выбирают и анализируют функции аппроксимации нелинейной характеристики магнитного элемента, рассчитывают коэффициенты аппроксимирующей функции. Далее проводят анализ многозначного магнитного элемента, включающий в себя определение структуры и построение функции аппроксимации нелинейной многозначной характеристики. Исследование параметрического зонного устройства заключается в расчете и построении аналитических амплитудных и частотных характеристик, расчете переходных процессов и устойчивости с применением фазовых портретов, анализе быстродействия. Завершающим этапом аналитического исследования является проверка соответствия полученных теоретических характеристик заявленным требованиям и инженерный (конструкторский) расчет параметрического зонного устройства с учетом существенной нелинейности. Отличительной особенностью рассмотренной части алгоритма является обзор и анализ функций аппроксимации нелинейной характеристики энергоемкого элемента, анализ многозначного магнитного элемента, использование для исследований переходных процессов и устойчивости параметрического зонного устройства фазовых портретов, учет нелинейности характеристик при аналитическом инженерном расчете параметрических зонных устройств.

После проведения теоретических исследований необходимо подтвердить полученные результаты экспериментально. Экспериментальная ветвь алгоритма состоит из исследований магнитных сердечников и исследования непосредственно самого параметрического устройства. Первая часть включает в себя получение вольтамперных характеристик магнитных сердечников, используемых в параметрических зонных устройствах, получение кривых магнитной проницаемости и петли гистерезиса. Исследование параметрического устройства включает в себя определение входных и выходных значений и форм токов и напряжений при раз-

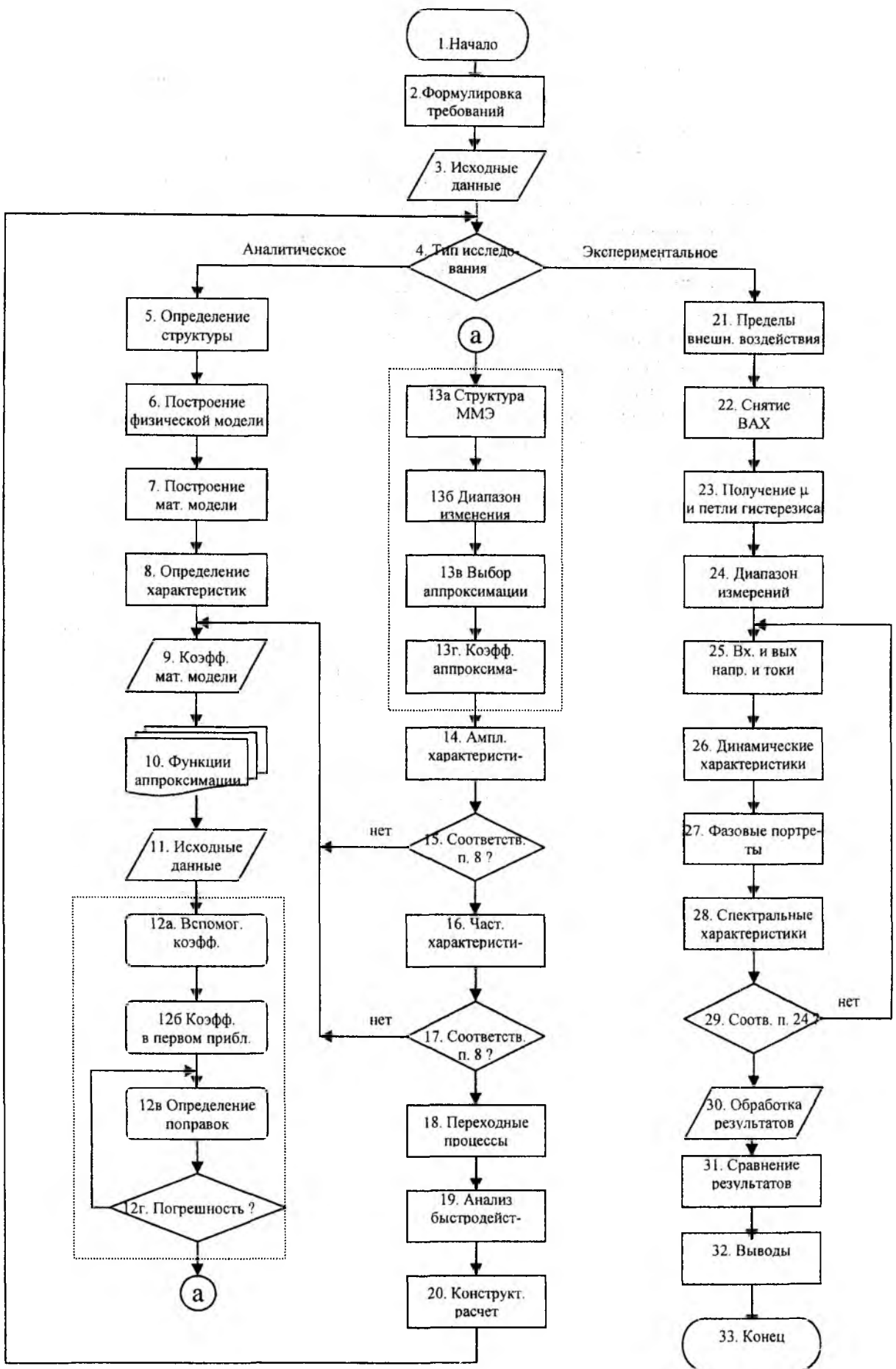


Рис. 7

личных внешних воздействиях (при изменении амплитуды и частоты накачки) в различных зонах параметрической неустойчивости, получение характеристик динамической и дифференциальной индуктивностей, коэффициента модуляции, снятие амплитудных, частотных, спектральных характеристик параметрических зонных устройств.

Завершающим этапом исследования является обработка полученных экспериментальных результатов, определение погрешностей, сравнение теоретически и экспериментально полученных характеристик. В результате проведения исследований делается общее заключение о выявленных закономерностях полученных амплитудных, частотных, спектральных характеристик, о соответствии полученных результатов заявленным требованиям. Предлагаемая методика содержит последовательность этапов теоретического и экспериментального изучения параметрических зонных устройств, включая высшие зоны параметрической неустойчивости, с учетом их характерных особенностей (существенной нелинейности характеристик, особенностей различных видов аппроксимирующих функций и т.д.).

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов показывает, что применение метода гармонического баланса позволяет описывать зоны неустойчивости ($n=1\dots$), в которых наблюдается рациональное отношение частот собственной и накачки (расстройка контура). Кроме того, при сильной нелинейности может быть как иррациональная, так и смешанная расстройка контура (критические частоты). Этот вопрос представляет практический интерес и требует дополнительных исследований.

Полученные результаты можно обобщить следующим образом. В работе обоснована возможность применения метода гармонического баланса для исследования амплитудных и частотных характеристик слабо и сильно нелинейных параметрических систем, работающих в зонах неустойчивости. Установлено, что при прочих равных условиях сильно нелинейная система дает более богатый спектр гармоник и для гашения параметрически возбуждаемых колебаний требуется заметно большие значения активных потерь. При анализе параметрических зонных устройств в высших зонах параметрической неустойчивости применен предложенный алгоритм, который позволяет систематизировать порядок проведения теоретических и экспериментальных исследований. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы при исследовании и проектировании нелинейных и нелинейно-параметрических систем, работающих в высших зонах параметрической неустойчивости.

Список литературы: 1 Булгаков Б. М., Чередников П. И., Степанов В. П. Исследование параметрического усилителя-модулятора // М.: Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19, №8. С. 80-86. 2. К расчету характеристик нелинейных индуктивностей / Зуев Н. Г., Магиденко В. Э., Титаренко А. М., Чередников П. И.: Харьк. ин-т радиоэлектроники. Харьков, 1984. Деп. в УкрНИИТИ 11.11.1984. №1877 Ук – 84. 3. А. С. №1529254 СССР, МКИ G06g 7/48. Устройство для моделирования динамических объектов / Чередников П. И. Харьковский ин-т радиоэлектроники. Опубл. 15.12.86. Бюл. №46.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 22.03.2002