

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ
ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ**

Ханін Г.С.

e-mail: hlib.khanin@nure.ua

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Рибалко А.П.
Харківський національний університет радіоелектроніки
м. Харків, Україна

This work considers the problem of heat conduction in composite materials with a complex internal structure. A mathematical model describing stationary heat transfer in a heterogeneous medium with piecewise-constant thermal conductivity coefficients is presented. The composite is represented by an elementary cell consisting of a matrix region and inclusion regions with different thermal properties. Appropriate boundary conditions and interface conditions describing ideal thermal contact between components are formulated. To effectively describe complex geometries, the *R*-functions method is applied for constructing analytical representations of the computational domain and boundary conditions.

Композиційні матеріали є багатофазними матеріальними системами, що складаються з двох або більше компонентів з різними фізичними та механічними властивостями. У більшості випадків композит включає матрицю, яка формує основу матеріалу, та армовану фазу (волокна, частинки або пористу структуру), що забезпечує покращення необхідних характеристик. Така структура дозволяє поєднувати властивості різних матеріалів і отримувати характеристики, які не можуть бути досягнуті в однорідних матеріалах.

Одним із важливих класів композитів є композити з металевою матрицею, у яких метал або металевий сплав виступає як матриця, а армовані компоненти можуть бути представлені керамічними частинками (наприклад, SiC або Al_2O_3), волокнами чи іншими металами. Такі матеріали характеризуються підвищенням відношенням міцності до маси, високою жорсткістю, зносостійкістю та покращеними теплофізичними властивостями порівняно з традиційними матеріалами. Важливими параметрами є об'ємна частка армованого компонента, геометрія включень, їх розподіл у матриці та характеристики міжфазної поверхні. Саме інтерфейс між матрицею та армованою фазою значною мірою впливає на теплові та механічні характеристики матеріалу [1].

У задачах теплопровідності композитні матеріали розглядаються як неоднорідні середовища, у яких коефіцієнт теплопровідності змінюється від однієї фази до іншої. У класичних моделях тепловий процес описується рівняннями теплопровідності з кусково-сталими або просторово змінними коефіцієнтами, що відображають наявність декількох матеріальних компонентів. Проте для складних неоднорідних середовищ стандартне рівняння

теплопровідності не завжди дозволяє адекватно описати реальні процеси теплової дифузії [2].

Нижче наведено математичну модель для пошуку теплопровідності компонентного матеріалу із заданими крайовими умовами та умовами спряження.

Розглядається елементарна комірка композитного матеріалу, що займає область

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L\}.$$

Область складається з двох підобластей

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

де Ω_1 – область матричного матеріалу, Ω_2 – область включень.

Температурне поле в композиті визначається рівнянням стаціонарної теплопровідності

$$\nabla \cdot (\lambda(x, y, z) \nabla T(x, y, z)) = 0,$$

де $T(x, y, z)$ – температура в точці композиту, $\lambda(x, y, z)$ – коефіцієнт теплопровідності середовища.

Коефіцієнт теплопровідності середовища задається кусково-сталою функцією

$$\lambda(x, y, z) = \begin{cases} \lambda_1, & (x, y, z) \in \Omega_1; \\ \lambda_2, & (x, y, z) \in \Omega_2, \end{cases}$$

де $\lambda(x, y, z)$ – локальний коефіцієнт теплопровідності середовища, λ_1 – коефіцієнт теплопровідності матеріалу матриці, λ_2 – коефіцієнт теплопровідності матеріалу включення.

Для моделювання теплового потоку через композит задається перепад температур на протилежних гранях елементарної комірки.

На межі

$$x = 0$$

задається температура

$$T = T_0.$$

На межі

$$x = L$$

задається температура

$$T = T_1,$$

де T_0 – температура на лівій грані елементарної комірки, T_1 – температура на правій грані елементарної комірки.

На інших гранях елементарної комірки приймаються умови теплоізоляції $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$, де $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$ – похідна температури за нормаллю до поверхні. Отже, на гранях

$$y = 0, y = L$$

виконується умова

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

а на гранях

$$z = 0, z = L$$

виконується умова

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

На поверхні розділу компонентів виконуються умови ідеального теплового контакту.

Наявність складної геометрії включень і меж поділу між компонентами значно ускладнює побудову математичних моделей та чисельних методів розв'язання відповідних крайових задач. У зв'язку з цим актуальним є застосування сучасних методів математичного моделювання, що дозволяють ефективно враховувати складну геометрію області та умови спряження між компонентами композиту.

Одним із таких підходів є метод R -функцій, який був запропонований для аналітичного опису геометрично складних областей та побудови точних або наближених розв'язків крайових задач математичної фізики. Основною ідеєю методу є використання спеціальних алгебраїчних операцій – R -операцій, що дозволяють об'єднувати прості геометричні області в більш складні, зберігаючи при цьому інформацію про їх межі [3].

У задачах теплопровідності композитів метод R -функцій дозволяє формувати математичну модель таким чином, щоб геометрія області та граничні умови були враховані безпосередньо в аналітичній формі шуканого розв'язку. Це дає можливість будувати так звані структурні функції, які автоматично задовольняють задані крайові умови на поверхні тіла або на межах поділу між компонентами. Подібний підхід значно спрощує побудову апроксимаційних розв'язків та зменшує складність чисельних алгоритмів [3].

Список використаних джерел:

1. A Review of Metal Foam and Metal Matrix Composites for Heat Exchangers and Heat Sinks / X.-H. Han et al. *Heat Transfer Engineering*. 2012. Vol. 33, no. 12. P. 991–1009. DOI: 10.1080/01457632.2012.659613.
2. Atangana A., Toufik M. A piecewise heat equation with constant and variable order coefficients: A new approach to capture crossover behaviors in heat diffusion. *AIMS Mathematics*. 2022. Vol. 7, no. 5. P. 8374–8389. DOI: 10.3934/math.2022467
3. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. Київ : Наукова думка, 1978. 140 с.