О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НА МНОЖЕСТВЕ m-РАЗРЯДНЫХ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

А. Д. Плотников

Харьков

Процесс переработки информации в дискретных вычислительных устройствах часто заключается в преобразовании n входных чисел (переменных) длиной m разрядов в одно выходное число такой же длины. Вычислительные устройства в основном строятся на системе элементов, выполняющих булевы операции, однако, применение аппарата булевой алгебры для синтеза указанных устройств затруднительно. В связи с этим целесообразно рассмотреть как обобщение булевой алгебры такие операции, у которых каждый из аргументов, как и сама функция, есть какое-то одно из 2^m m-разрядных двоичных чисел. Очевидно, что при $m = 1$ приходим к функциям обычной булевой алгебры.

Итак, пусть имеется множество M двоичных чисел длиной m разрядов. Множество M конечно и содержит 2^m элементов. Любое число $X \in M$ можно записать в виде

$$X = \sum_i 2^i x_i,$$

где $i = 0,1, \ldots, m-1$, а $x_i = 0,1$. Если все разряды X равны нулю (единице), то такое число назовем характеристической константой нуль (единица) и обозначим ρ_0 (соответственно ρ_1).

Функции, определенные для всевозможных наборов аргументов, выбираемых из множества M, и принимающие значения только из множества M, будем называть L-функциями.

Теперь необходимо отыскать полные системы функций в множестве z-функций.

В принципе L-функции являются частным случаем функций k-значной логики при $k = 2^m$, поэтому можно было бы воспользоваться одной из существующих полных систем многозначной логики, например, системой Поста. Однако это неприемлемо из-за сложной схемной реализации функций, входящих в эти системы, набором двоичных логических элементов.

Известны также так называемые поразрядные операции [1, 2], применяемые для описания логического преобразования информации. Так, операция поразрядной конъюнкции двух двоичных чисел длиной m разрядов формулируется как двоичное число такой же длины, получаемое по следующему правилу: i-тый разряд результирующего числа Z равен результату булевой операции конъюнкции i-тых разрядов исходных чисел X и Y

$$Z = X \cap Y,$$

где каждое $z_i = x_i \wedge y_i$.

Поразрядные операции легко реализуются схемой, составленной из двоичных элементов, однако они не позволяют выразить функции, у которых существует зависимость между разрядами. Иными словами, при помощи поразрядных операций нельзя составить функцию n аргументов, у которой i-тый разряд является булевой функцией произвольного количества (или всех m) разрядов любого (или каждого) из аргументов. При этом способ образования результирующего разряда может меняться от разряда к разряду.

Цель заданной статьи — предложить функционально полную систему L-операций, легко реализуемых схемой из двоичных логических элементов, пригодную для описания работы дискретных вычислительных устройств.

Из (3) следует, что число L-функций n аргументов $(2^m)^{(2^m)^n} = 2^{m2^{mn}}$.

Определение 1. Элементарной μ-наклонной L-операцией $Z = Z_\mu(X)$, где $X \in M$, а μ — целое фиксированное число, будем называть величину $Z \in \boldsymbol{M}$, если каждый разряд z_i $(i = 0,1, \ldots, m-1)$ числа Z есть одна и та же для всех i булева функция $i + \mu$-го разряда числа X. Указанная булева функция называется производящей для элементарной L-операции одного аргумента.

Если $i + \mu < 0$ либо $i + \mu > m - 1$, то $i + \mu$-й разряд X называется мнимым и полагается равным нулю.

Если $\mu = 0$, то элементарная L-операция одного аргумента называется правильной. Другими словами, правильная L-операция одного аргумента есть поразрядная операция одного аргумента.

Определение 2. Элементарной $\mu\nu$-наклонной L-операцией $Z = Z_{\mu\nu}(X, Y)$, где $X, Y \in M$, а μ и ν — целые фиксированные числа, будем называть величину $Z \in \boldsymbol{M}$, если каждое z_i $(i = 0,1, \ldots, m-1)$ числа Z есть одна и та же для всех i булева функция $i + \mu$-го разряда X и $i + \nu$-го разряда Y. Указанная булева функция называется производящей для элементарной L-операции двух аргументов.

Если $i + \mu < 0$ (или $i + \nu < 0$) либо $i + \mu > m - 1$ (или $i + \nu = m - 1$), то $i + \mu$-й разряд X (соответственно $i + \nu$-й разряд Y) называется мнимым и полагается равным нулю.

Если $\mu = \nu = 0$, то элементарная L-операция двух аргументов называется правильной. Иначе говоря, правильная L-операция двух аргументов есть поразрядная операция двух аргументов.

Аналогично можно ввести элементарные L-операции n аргументов, но так как элементарные L-операции n аргументов могут быть представлены суперпозицией элементарных L-операций двух аргументов, мы будем рассматривать только элементарные L-операции одного и двух аргументов.

Если понятие замкнутости множества функций определять так, как в [3], то, очевидно, имеет место следующее предложение.

Теорема 1. Множество $\boldsymbol{T}$ всех правильных L-операций функционально замкнуто.

Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Если булевы функции, образующие функционально полную систему функций, являются производящими для совокупности правильных z-операций, то указанная совокупность функционально полна в множестве $\boldsymbol{T}$ правильных L-операций.

О мощности множества $\boldsymbol{T}$ позволяет судить следующее предложение.

Теорема 3. Число всех правильных L-операций, определенных на множество $\boldsymbol{M}$ и зависящих от n аргументов, равно $2^{2^{mn}}$.

Действительно, существует всего 2^{mn} различных наборов аргументов. На каждом наборе правильная L-функция может принимать только два значения (если одно из значений обозначим Z, то другое значение равно

$\overline{Z}$). Здесь $\overline{Z}$ означает правильное L-отрицание Z. Отсюда следует утверждение теоремы. Множество $\boldsymbol{T}$ правильных L-операций, где $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{M}$, будем называть базовым.

По аналогии с тем, как это делается в булевой алгебре, будем говорить об «истинности» или «ложности» L-функции, если значение последней равно характеристической константе ρ_1 (соответственно ρ_0).

Так как любая булева функция может рассматриваться в качестве производящей для правильной L-функции (т. е. булева функция конъюнкции, является проводящей для правильной L-коньюнкции, булева функция отрицания является производящей для правильного Z-отрицания и т. д.), то имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Если имеется истинная (или ложная) булева функция, то «истинная» (соответственно «ложная») L-функция может быть построена путем замены булевых переменных переменными из множества $\boldsymbol{M}$, констант «нуль» и «единица» алгебры логики соответственно характеристическими константами ρ_0 и ρ_1, а булевых операций — соответствующими правильными L-операциями.

Другими словами, для множества правильных L-функций справедливы все соотношения булевой алгебры при условии замены переменных, констант и функций алгебры логики соответствующими переменными, константами и функциями из множества правильных L-функций. Например, все приемы минимизации булевых функций применимы и к множеству правильных L-функций.

Определение 3. Оператором сдвига числа X, принадлежащего множеству M, будем называть число $2^{\pm\mu}X \in \boldsymbol{M}$, которое получается путем изменения весовых коэффициентов двоичного разложения X на величину $\pm\mu$

$$2^{\pm\mu}X = \sum 2^{i\pm\mu}x_i = \sum_i 2^i x_{i\mp\mu}.$$

Легко доказать следующие соотношения:

$$Z = Z_\mu(X) = Z(2^{-\mu}X),$$

т. е. всякая элементарная μ-наклонная L-операция может быть сведена к правильной L-операции одного аргумента при помощи оператора сдвига.

$$Z = Z_{\mu\nu}(X,\ Y) = Z(2^{-\mu}X,\ 2^{-\nu}Y),$$

т. е. всякая элементарная $\mu\nu$-наклонная L-операция может быть сведена к правильной L-операции двух аргументов при помощи оператора сдвига.

Очевидно, свойство оператора сдвига состоит в следующем:

$$2^{\mu}X \circ 2^{\nu}Y = 2^{\mu}(X \circ 2^{\nu-\mu}Y),$$

где $(\circ)$ — символ некоторой L-операции, равной нулю (характеристической константе нуль) на нулевом наборе аргументов.

В результате того, что множество $\boldsymbol{M}$ содержит только числа от 0 до $2^m - 1$, имеет место еще одно важное свойство оператора сдвига:

$$2^{\mu}X = 0,$$

если $|\mu| \geqslant m$.

Пусть символы $\bigcap$ и $\bigcup$, связывающие переменные из $\boldsymbol{M}$, обозначают соответственно правильные L-конъюнкцию и L-дизъюнкцию. Тогда, например, правильная L-дизъюнкция чисел X и Y (обозначение: $X \bigcup Y$), принадлежащих множеству $\boldsymbol{M}$, будет определять величину $Z \in \boldsymbol{M}$, получаемую по следующему правилу:

$$Z = X \bigcup Y = \sum_i 2^i (x_i \vee y_i),$$

где $\vee$ — символ булевой операции дизъюнкции.

Известно, что булевы переменные связывает соотношение

$$x + y = (x \vee y) + (x \wedge y).$$

Тогда для переменных X и Y, принадлежащих множеству $\boldsymbol{M}$, можно записать

$$X + Y = \sum_i 2^i (x_i + y_i) = \sum_i 2^i (x_i \vee y_i) + \sum_i 2^i (x_i \wedge y_i).$$

Или иначе

$$X + Y = (X \cup Y) + (X \cap Y).$$

Отсюда следует, что правильная L-дизъюнкция двух чисел равна их сумме тогда и только тогда, когда правильная L-конъюнкция этих чисел равна нулю

$$X + Y = X \cup Y, \text{ если } X \cap Y = 0.$$

Лемма. Всякое число X, принадлежащее множеству $\boldsymbol{M}$, можно представить правильной L-дизъюнкцией m аргументов $X_i \in \boldsymbol{M}$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, где каждое $X_i = 2^i x_i$, т. е.

$$X = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{m-1} = \bigcup_i X_i.$$

Доказательство получаем при условии, что

$$2^i x_i + 2^j x_j = 2^i x_i \cup 2^j x_j,$$

если $i \neq j$.

Теорема 5. Всякая совокупность правильных L-операций, функционально полная на базовом множестве $\boldsymbol{T}$, константа «единица» и оператор сдвига $2^\mu X$, где $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (m-1)$, образуют функционально полную систему L-функций.

При $m = 1$ теорема верна, так как множество правильных Z-операций совпадает с множеством всех функций булевой алгебры, а $\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{M}$.

Пусть $m > 1$ и L-функция Z зависит от n аргументов. Предположим, что i-й разряд Z есть некоторая булева функция j_0, $j_1, \ldots, j_s$-го разрядов X_1, l_0, $l_1, \ldots l_p$-го разрядов $X_2, \ldots$, q_0, $q_1, \ldots$, q_t-го разрядов X_n. Тогда для любого z_i можно записать

$$z_i = 2^{-j_0} (X_1 \cap 2^{j_0}) \circ 2^{-j_1} (X_1 \cap 2^{j_1}) \circ \ldots \circ 2^{-j_s} (X_1 \cap 2^{j_s}) \circ$$

$$\circ 2^{-l_0} (X_2 \cap 2^{l_0}) \circ 2^{-l_1} (X_2 \cap 2^{l_1}) \circ \ldots \circ 2^{-l_p} (X_2 \cap 2^{l_p}) \circ$$

$$\circ \ldots \circ 2^{-q_0} (X_n \cap 2^{q_0}) \circ 2^{-q_1} (X_n \cap 2^{q_1}) \circ \ldots \circ 2^{-q_t} (X_n \cap 2^{q_t}),$$

где i, j, l, q, s, p и $t = 0, 1, \ldots, m-1$, а $\circ$ — символ соответствующей (не обязательно одной и той же) L-операции.

Тогда на основании леммы

$$Z = \bigcup_i Z_i, \text{ где } Z_i = 2^i z_i.$$

Этим доказательство исчерпывается.

Аналогичные результаты могут быть получены, если $\boldsymbol{M}$ — множество -ичных чисел длиной m разрядов.

Рассмотренная функционально полная система L-функций, помимо приложений к анализу и синтезу вычислительных устройств, может быть применена для описания и преобразования программ цифровых вычислительных машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. W. Peterson, M. O. Rabin. On codes for checking logical operations, IBM j. Res. Devel., 3, № 2 (1959). (см. также «Кибернетический сборник», № 4. Изд-во иностр. лит-ры, 1962.

2. Ю. Г. Заренин. Корректирующие коды для передачи и переработки информации. Изд-во «Техника», Киев, 1965.

3. С. В. Яблонский. Функциональные построения в k-значной логике. Труды матем. ин-та им. Стеклова, LI. Изд-во АН СССР, 1958.