УДК 519.21

СИНТЕЗ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО ЕГО ФРАГМЕНТАМ. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА СИНТЕЗА

КРИПАК А.А., КРИПАК С.А.

Описывается процедура синтеза стохастической матрицы марковского процесса по его фрагментам. Составляется программа, реализующая указанный синтез.

1. Разбиение марковского процесса на фрагменты

Пусть дана стохастическая матрица некоторого марковского процесса (однородного или неоднородного) $-P(s,t)$, размерности $n\times n$. В дальнейшем будем опускать зависимость матрицы от времени и обозначать её P[2].

Опишем общую схему синтеза [3]. Рассмотрим событие B, состоящее в том, что в момент времени t процесс будет находиться в классе состояний $1,2,..,n-1$: $B=(x(t)\in\{1,...,n-1\})$. Будем предполагать, что $P(B)>0$. Это позволяет ввести на пространстве $<\Omega,F,P>$ условные вероятности $P_B(A)=P(A/B)$ $\forall$ $A\in F$ и, тем самым, перейти к пространству $<\Omega,F,P_B>$[1]. Очевидно, что $P_B(A)$, задающая вероятность (меру) на F, удовлетворяет требованиям:

1) $P_B(A)=P(AB)/P(B)\geq 0$, $\forall$ $A\in F$.
2) $P_B(\Omega)=P(\Omega B)/P(B)=P(B)/P(B)=1$.
3) $P_B(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)=[P(A_1)+P(A_2)+$ $+P(A_n)]/P(B)=P_B(A_1)+P_B(A_2)+...+P_B(A_n)$, $A_i\cap A_k=\varnothing$, $i\neq k$.

Тогда переходные вероятности примут вид:

$$P_B(x(t)=j/x(t-1)=i)=P(x(t)=j/B,x(t-1)=i)=$$

$$=p_{ij}/\sum_{i=1}^{n-1}p_{ij},\quad i,j=1,2,...n-1.$$

Таким образом, мы можем построить стохастическую матрицу P’ размерности $(n-1)\times(n-1)$, которая получена из исходной выбрасыванием состояния n. Аналогично, можно выбрасывать любое состояние k, $1\leq k\leq n$ или группу состояний.

Введём следующие обозначения. Обозначим $I=\{1,2,...,n\}$ – множество всех индесов процесса. Пусть множество индексов I_1 получено из множества I путем выбрасывания некоторого числа индексов. Под матрицей P^{I1} будем понимать стохастическую матрицу, полученную из исходной стохастической матрицы P путём выбрасывания тех строк и столбцов, индексы которых не содержатся в I_1, с последующим делением оставшихся элементов строки на их сумму. Эта процедура носит название нормирование матрицы.

Исследуем возможность восстановить исходную стохастическую матрицу P по заданной системе фрагментов. Сформулируем необходимые и достаточные условия восстановления.

2. Объединение двух фрагментов

Введем множество индексов $I=\{1,2,3,...,n\}$. Множества I_1, I_2 получены из множества I путем выбрасывания некоторого числа индексов. Получены два фрагмента P^{I1} и P^{I2}, $I_1\subset I$, $I_2\subset I$. Предположим, что $I_1\cap I_2=I_0\neq\varnothing$, $I_1\cup I_2=I$.

Для каждой строки $i\in I_0$ обозначим:

$$S_{1i}=\sum_{j\in I_1\backslash I_0}p_{ij},\quad S_{2i}=\sum_{j\in I_2\backslash I_0}p_{ij},$$

$$S'_{1_i}=\sum_{j\in I_1\backslash I_0}p_{ij}^{I_1},\tag{1}$$

$$S'_{2_i}=\sum_{j\in I_2\backslash I_0}p_{ij}^{I_1}.\tag{2}$$

Поскольку

$$p_{ij}^{I_1}=p_{ij}/(1-S_{2i}),\ j\in I_1,\tag{3}$$

$$p_{ij}^{I_2}=p_{ij}/(1-S_{1i}),\ j\in I_2,\tag{4}$$

то, просуммировав обе части равенств (в первом случае по $j\in I_1\backslash I_0$, а во втором по $j\in I_2\backslash I_0$), получим систему:

$$S'_{1i}=S_{1i}/(1-S_{2i}),$$
$$S'_{2i}=S_{1i}/(1-S_{1i}),$$

Это система уравнений относительно S_{1i}, S_{2i}.. Решив её, найдём:

$$S_{1i}=S'_{1i}\frac{1-S'_{2i}}{1-S'_{1i}S'_{2i}},$$

$$S_{2i}=S'_{2i}\frac{1-S'_{1i}}{1-S'_{1i}S'_{2i}}.$$

Тогда из (3), (4) можем найти:

$$p_{ij}=p_{ij}^{I_1}\frac{1-S'_{2i}}{1-S'_{1i}S'_{2i}},i\in I_0,j\in I_1,\tag{5}$$

$$p_{ij}=p_{ij}^{I_2}\frac{1-S'_{1i}}{1-S'_{1i}S'_{2i}},i\in I_0,j\in I_2,\tag{6}$$

где S'_{1i},S'_{2i} определены в (1),(2).

Таким образом, по формулам (5),(6) можно вычислить элементы строк I_0 матрицы P.

Заметим, что для элементов p_{ij}, $i\in I_0$, $j\in I_0$, формулы (5),(6) должны давать одинаковый результат, т.е. матрицы P^{I1} и P^{I2} не являются независимыми:

$$p_{ij}^{I_1}(1-S'_{2i})=p_{ij}^{I_2}(1-S'_{1i}),i\in I_0,j\in I_0.\tag{7}$$

Это означает, что ij-й элемент достаточно задать только в одном из фрагментов P^{I1}, P^{I2}, $i\in I_0$, $j\in I_0$ (блоки $I_0\times I_0$ матриц P^{I1} и P^{I2} могут быть известны не полностью). Фрагменты P^{I1} и P^{I2} будут независимы тогда и только тогда, когда множество $I_0=I_1\cap I_2$ содержит всего один элемент. В этом случае условие (7) будет всегда выполнено. Будем называть его условием согласования.

В определении элементов строк I_0 матрицы P участвовали только элементы строк I_0 фрагментов P^{I1} и P^{I2}, причём для нахождения i-й строки матрицы P используются элементы той же строки матриц P^{I1} и P^{I2}. Кроме того, если $I_1\cup I_2=I_3\neq I$, то, проведя аналогичные рассуждения, по формулам (5), (6) найдём элементы строк I_0 матрицы P^{I3}.

Очевидно, что если I_2MI_1, то по матрице P^{I1} можно найти P^{I2}.

3. Необходимые и достаточные условия синтеза

Пусть даны множества индексов $I_1, I_2, ..., I_m$. Обозначим $I_S=I_1\cup I_2\cup...\cup I_m$. Введём множество

$$B_k=\{i: k\in I_i,\ 1\le i\le m\}. \qquad (8)$$

В этом множестве содержатся номера i и тех множеств I_i, которые включают в себя индекс k.

Лемма. Если $\forall\ i, j\in I_S\ \exists k: i, j\in I_k,\ 1\le k\le m$ и, кроме того, $I_i\ne I_S$, $i=1,2, ..., m$, то каждое из множеств B_k содержит не менее двух элементов.

Доказательство.

B_k содержит по крайней мере 1 элемент $i_o\ \exists k\in I_{io}$. Так как $I_{io}\ne I_S$, то

$\exists j\in I_S\backslash I_{io}\ \exists i_1: j, k\in I_{i1}$.

Значит, множество B_k содержит ещё и элемент i_1. Лемма доказана.

Пусть A_k – собственное подмножество множества

$$B_k: A_k\subset B_k,\ A_k\ne B_k,\ A_k\ne\varnothing. \qquad (9)$$

При сделанных в лемме предположениях оно существует. Обозначим

$$M_{Ak} = (\bigcup_{j\in Ak} I_i) \cap (\bigcup_{i\in B_k\backslash A_k} I_i). \qquad (10)$$

Очевидно, что $k\in M_{Ak}$.

Найдём необходимые и достаточные условия того, что по фрагментам $P^{I1}, P^{I2}, ..., P^{Im}$ можно произвести синтез матрицы P^{IS}, где $I_S=I_1\cup I_2\cup...\cup I_m$.

Будем предполагать, что $I_i\ne I_S$, $i=1,2,...,m$, в противном случае задача окажется уже решённой.

Теорема. *Пусть* $I_1\cup I_2\cup...\cup I_m=I_S$. *Для того чтобы по фрагментам* $P^{I1}, P^{I2}, ..., P^{Im}$ *произвести синтез матрицы* P^{IS}, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *для любых пересекающихся фрагментов выполнялось условие согласования* (7);

2) *для любой пары индексов* $i, j\in I_S$ *существовало множество* I_k *из набора* $I_1, I_2, ..., I_m$, *содержащее эти индексы одновременно, т.е.* $\forall\ i,j\in I_S\exists k: i, j\in I_k,\ 1\le k\le m$;

3) $\forall k\in I_S,\ \forall A_k\subset B_k\ \exists j\in M_{Ak}\ p^{Ir}_{kj>0},\ r\in B_k$, где A_k, B_k определены в (8)-(10).

Доказательство.

1) *Необходимость.*

Необходимость первого условия очевидна.

Докажем необходимость второго условия. Проведем доказательство от противного. Предположим, что $\exists i_0, j_0\in I_\Sigma: \forall I_k\ i_0\notin I_k,\ j_0\notin I_k$. Далее обозначим $I_0=\{i_0, j_0\}$.

Введем произвольную стохастическую матрицу P^{I0}. Условие согласования выполнено для любого элемента P^{I0}, так как пересечение I0 с любым другим множеством из $I_1, I_2, ..., I_m$ будет содержать не более одного элемента. Кроме того, фиксированной матрице $P^{I\Sigma}$ соответствует единственная матрица PI0. Значит, наше предположение неверно и условие 2 теоремы является необходимым.

Докажем необходимость третьего условия. Доказательство проведем от противного. Предположим, что синтез произвести можно, но условие 3 не выполнено. Предположим, что $\exists k\in I_\Sigma\ \exists A_k\subset B_k$, $\forall j\in M_{Ak}$, $p^{I}_{kj} = 0$. Обозначим:

$$M_1 = \bigcup_{j\in Ak} I_i,\quad M_2 = \bigcup_{j\in Bk\backslash Ak} I_i,\ M_1\cap M_2=MA_k\quad .$$

Тогда элементы k-й строки матрицы $P^{I\Sigma}$ имеют вид

$$p^{I_\Sigma}_{ij} = \alpha\cdot p^{M_1}_{ij}, j\in M_1,$$

$$p^{I_\Sigma}_{ij} = (1-\alpha)\cdot p^{M_2}_{ij}, j\in M_2,$$

где $\alpha\in[0, 1]$ – задается произвольным образом, т.е. однозначно определить k-ю строку не удается. Значит, наше предположение неверно и условие 3 теоремы является необходимым.

2) *Достаточность.*

Найдем строку к матрицы $P^{I\Sigma}$. Ввиду условия 2 теоремы и леммы множество Bk содержит не менее двух элементов. Возьмем некоторое $i_1\in$Bк и рассмотрим

$$M_1 = I_{i1} \cap (\bigcup_{i\in B_k; i\ne i1} I_i),$$

Согласно условию 3 существует $p^{I_{i2}}_{kj} \succ 0$, $j_1\in M_1$, $i_2\in B_k/\{i1\}$. Поскольку $k\in I_{i1}\cap I_{i2}$, то мы можем определить к-ю строку матрицы $P^{Ii1\cup Ii2}$.

Если $I_{i1}\cup I_{i2}\ne I_\Sigma$, то рассмотрим

$$M_2 = (I_{i1}\cup I_{i2}) \cap (\bigcup_{i\in B_k; i\ne i1, i2} Ii),.$$

Согласно условию 3 теоремы существует $p^{I_{i3}}_{kj_2} \succ 0$, $j2\in M2$, $i3\in Bk/\{i1,i2\}$. Поскольку $k\in(I_{i1}\cup I_{i2})\cap I_{i3}$, то мы можем определить к-ую строку матрицы $P^{Ii1\cup Ii2\cup Ii3}$.

Продолжаем процесс до тех пор, пока не определим к-ю строку матрицы $P^{I\Sigma}$. То же выполняем и для других строк матрицы $P^{I\Sigma}$. Это полностью доказывает теорему.

Доказательство достаточности дает метод нахождения матрицы $P^{I\Sigma}$ по ее фрагментам.

Условие 2 теоремы говорит о том, что каждый ij-элемент должен присутствовать хотя бы в одной из матриц $P^{I1}, P^{I2}, ..., P^{Im}$. Условие 3 теоремы связано с тем, что при пересечении фрагментов не все элементы из пересечения должны быть равны 0.

Следствие. Для того чтобы по фрагментам P^{I1}, $P^{I2}, ..., P^{Im}$ произвести синтез матрицы P, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись все условия теоремы и $I_{\Sigma=\{1,...,n\}}$.

4. Невыполнение условия согласования

Рассмотрим подробнее случай, когда условие 1 теоремы не выполняется, а условия 2, 3 выполняются. Это может быть в том случае, когда во фрагменты $P^{I1}, P^{I2}, ..., P^{Im}$ были внесены некоторые погрешности, например, при измерениях.

Будем синтезировать такую матрицу P, которая отличалась бы от своих фрагментов минимальным образом, т.е. чтобы фрагменты матрицы P минимально отличались от искаженных фрагментов $\mathcal{P}^{I1}, \mathcal{P}^{I2}, ..., \mathcal{P}^{Im}$.

В качестве функционала, задающего отклонение от фрагментов, можно взять сумму квадратов отклонений элементов фрагментов $P^{I1}, P^{I2}, ..., P^{Im}$ от элементов искаженных фрагментов $\mathcal{P}^{I1}, \mathcal{P}^{I2}, ..., \mathcal{P}^{Im}$.

Введем обозначение

$$B_{kj}=\{i: k,j\in I_i,\ 1\le i\le m\}.$$

Очевидно, что B_{kj} содержится в B_k: $\bigcup_{j=1}^{n} B_{kj} = B_k$.

В силу выполнения условия 2 теоремы $B_{kj}\ne\varnothing$. Тогда мы можем записать следующую задачу на условный экстремум:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in Bk}\sum_{j\in Ii}(P_{kj}\cdot\alpha_k^i - P_{kj}^{Ii})^2 \to \min, \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{kj} = 1, k = 1,2,...,n, \qquad (12)$$

$$\alpha\cdot k^i = 1/\sum_{j=1}^{n} P_{kj}^{Ii}, \qquad (13)$$

$$P_{kj} \ge 0, k=1,2,...,n, j=1,2,...,n. \qquad (14)$$

Поскольку элементы каждой из строк матрицы P оптимизируются независимо от других строк, то задача эквивалентна n более простым задачам, где функционал зависит только от элементов строки k. Для простоты записи будем писать x_j вместо P_{kj} и P_j^{Ii} вместо P_{kj}^{Ii}.

С учетом переобозначений задача (11)-(14) примет вид

$$\sum_{i\in Bk}\sum_{j\in Ii}(x_j\alpha^i - P_j^{Ii})^2 \to \min, \qquad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \qquad (16)$$

$$\alpha^i = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad (17)$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,...,n. \qquad (18)$$

5. Решение задачи минимизации

Изменим постановку задачи. Если бы условия согласования были выполнены, то $x_j = \beta_i P_j^{Ii}, i\in B_{kj}$, j=1, 2, ..., n. Будем искать такую матрицу P (т.е. строку x), которая бы отклонялась от величины $\beta_i P_j^{Ii}$ минимальным образом. С учетом этого задача (15) - (18) примет вид

$$\sum_{i\in Bk}\sum_{j\in Ii}(x_j - P_j^{Ii}\beta_i)^2 \to \min_{x,\beta}, \qquad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \qquad (20)$$

$$\beta = \sum_{j\in Ii} x_j, \qquad (21)$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,...,n. \qquad (22)$$

Это есть задача квадратичного программирования. Она имеет единственное решение, которое всегда может быть найдено. Уравнение связи (21) делает bi зависимыми (как и в случае, когда условие согласования выполнено). Очевидно, что когда условие согласования выполнено, решением задачи будет то, которое находилось по ранее описанным формулам, так как те значения обращают функцию цели в ноль (глобальный минимум), а в силу свойств целевой функции существует единственный минимум, причем глобальный, с неотрицательным значением целевой функции.

Используя метод Лагранжа, получаем систему линейных уравнений. Решив полученную систему, получим решение для строки k матрицы P. Аналогично поступаем для всех строчек матрицы P.

Данную систему можем решать либо точным методом (метод Гаусса, метод главных элементов, метод квадратных корней), либо итерационным (метод итераций, метод Зейделя). В данной работе систему решаем методом Гаусса.

6. Программная реализация

Был программно реализован метод синтеза марковского процесса (как однородного, так и неоднородного) по его фрагментам.

Программа позволяет задавать исходные данные-фрагменты стохастической матрицы исследуемого процесса, образующие базис, с клавиатуры (для реальных физических или социально-экономических процессов с многочисленными внутренними связями, например, занятость населения, его возрастная структура и образование). Предусмотрено формирование фрагментов стохастической матрицы случайным образом, что позволяет использовать данный программный продукт для теоретических исследований в области теории вероятностей и математической статистики.

На основании теоретических исследований, приведенных в данной работе, программный продукт дает возможность проводить синтез в случае, когда условие согласования как выполняется, так и не выполняется. Это позволяет проводить синтез в случаях, когда измерения были проведены с некоторыми погрешностями или в условиях неполной информации об исследуемом процессе. Это обстоятельство позволяет использовать данный программный продукт для реальных задач, так как на практике, в большинстве случаев, не удается получить полную и достоверную информацию об исследуемом процессе. Допускается исследовать процесс не только в определенный фиксированный момент времени, но и наблюдать за ним в динамике, зная начальный и конечный моменты времени.

Литература: 1. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука. 1985. 319 с. 2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир. 1985. 285 с. 3. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Синтез стохастической матрицы по системе ее фрагментов. ХТУРЭ. Харьков, 1997. 8 с. Рус. Деп в УкрИНТЭИ 23.01.97 №76-Уі97.

Поступила в редколлегию 21.01.99

Рецензент: д-р физ.-мат. наук. Руткас А.Г.

Крипак Андрей Анатольевич, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и математическая статистика. Адрес: Украина, 310141, ул. Клочковская, 199-Б, кв. 17.

Крипак Сергей Анатольевич, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, математическая статистика и программирование. Адрес: Украина, 310141, ул. Клочковская, 199-Б, кв. 17.