УДК 519.713

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧАХ НОРМАЛИЗАЦИИ

ЛЮБЧЕНКО В.А., ПУТЯТИН Е.П.

Впервые рассматриваются модели разложения проективных преобразований на более простые: аффинные, перспективы, центральное проектирование. Предлагается алгоритм нормализации для одного из разложений.

Распознавание образов – одна из важнейших функций интеллекта. Задачи распознавания представляются особенно актуальными и трудными, если входное изображение подвергнуто геометрическим преобразованиям. При решении этих задач подбирается математическая модель, которая наиболее точно отвечает требованиям решаемой задачи. В большинстве случаев достаточно рассматривать преобразования, отвечающие аффинной группе, а иногда и ее подгруппам.

Однако преобразования изображений в ряде технических задач выходят за рамки аффинной группы (аэрофотосъемка, видеосъемка поверхности Земли и т.д.). Для этих задач используют математические модели, которые основываются на проективных преобразованиях. Такие преобразования наиболее точно описывают реальные геометрические изменения объектов. Координатная зависимость при этом описывается формулами

$$x'=\frac{b_{11}x+b_{12}y+b_{13}}{b_{31}x+b_{32}y+b_{33}},\ y'=\frac{b_{21}x+b_{22}y+b_{23}}{b_{31}x+b_{32}y+b_{33}}, \quad (1)$$

где $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=0$. Матрицу преобразования обозначим П.

Множество проективных преобразований образует группу [1].

Нормализация изображений [2], подвергнутых влиянию проективного преобразования, достаточно сложная задача, поэтому представляет интерес получить ее разложения на более простые составные.

В литературе приводится доказательство того, что всякое проективное отображение может быть осуществлено путем надлежащего перемещения плоскости в пространстве и последующего перспективного отображения (из надлежащим образом выбранного центра перспективы) [3]. Как будет показано ниже, такое представление проективного преобразования возможно в том случае, когда центр перспективы выбран таким образом, чтобы коэффициент $b_{33}\neq 0$. В этом случае преобразование представимо в виде

$$x'=\frac{b_{11}x+b_{12}y+b_{13}}{b_{31}x+b_{32}y+1},\ y'=\frac{b_{21}x+b_{22}y+b_{23}}{b_{31}x+b_{32}y+1}. \quad (2)$$

Однако оно не покрывает все множество проективных преобразований. Поэтому целесообразно рассматривать 3 вида преобразований, а именно преобразования, отвечающие условиям $b_{32}\neq 0$, $b_{33}\neq 0$, $b_{31}\neq 0$. Матрицы этих преобразований представимы соответственно в виде:

$$П_1=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 1 & b_{33} \end{pmatrix},\ П_2=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

$$П_3=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 1 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1. Пусть $П_1$ являются преобразованиями П при условии $b_{32}\neq 0$. Тогда $П_1$ допускают разложения

$$П_1 = АНС, \quad (3)$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & 1 & a_{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – аффинные преобразования; $H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Если имеет место равенство (3), то композиция преобразований АНС должна однозначно представляться параметрами преобразований $П_1$. Действительно, из системы уравнений

$$\begin{cases} b_{11}=a_{11}+a_{13}a_{31}, & b_{21}=a_{21}+a_{23}a_{31}, & b_{31}=a_{31}, \\ b_{12}=a_{13}, & b_{22}=a_{23}, & b_{33}=a_{33}, \\ b_{13}=a_{13}a_{33}+a_{12}, & b_{23}=a_{23}a_{33}+a_{22}, & \end{cases}$$

следует система уравнений:

$$a_{11}=b_{11}-b_{12}b_{31},\quad a_{21}=b_{21}-b_{22}b_{31},\quad a_{31}=b_{31},$$

$$a_{12}=b_{13}-b_{12}b_{33},\quad a_{22}=b_{23}-b_{22}b_{33},\quad a_{32}=b_{32},$$

$$a_{13}=b_{12},\quad a_{23}=b_{22},$$

что доказывает однозначность представления.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию преобразования, задаваемого матрицей Н, т.е. преобразования координаты которого имеют зависимость

$$x'=\frac{x}{y},\quad y'=\frac{1}{y}. \quad (4)$$

Формулами (4) определено преобразование для любой фигуры, не пересекающей прямую y=0, т.е. не пересекающей ось абсциссы.

Пусть точке (a, b) преобразование (4) ставит в соответствие образ $(\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$. Через эти точки проведем прямую линию. Ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-a}{\frac{a}{b}-a}=\frac{y-b}{\frac{1}{b}-b},\ \frac{x-a}{a(a-ab)}=\frac{y-b}{1-b^2},\ x(1+b)-ya-a=0. \quad (5)$$

Пусть точке (c, d) преобразование (4) ставит в соответствие образ $(\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$. Уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид:

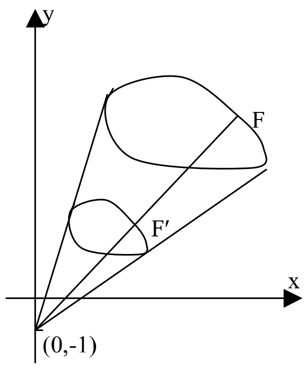
$$x(1+d) - yc - c = 0 . \qquad (6)$$

Найдем точку пересечения этих двух прямых:

$$\begin{cases} x(1+b) - ya - a = 0 , \\ x(1+d) - yc - c = 0 , \end{cases} \quad \begin{cases} y = x\dfrac{1+b}{a} - 1, \\ y = x\dfrac{1+d}{c} - 1 , \end{cases}$$

$$x\frac{1+b}{a} - 1 = x\frac{1+d}{c} - 1, \; x\left(\frac{1+b}{a} - \frac{1+d}{c}\right) = 0, \; x=0 \Rightarrow y= -1.$$

Итак, (0, -1) является точкой пересечения прямых (5) и (6).



Проверим, проходит ли прямая, проведенная через точки (x_0, y_0) и $(\frac{x_0}{y_0}, \frac{1}{y})$, через точку (0, -1). Уравнение прямой, проведенной через точки (x_0, y_0) и $(\frac{x_0}{y_0}, \frac{1}{y})$, имеет вид:

$$x(1+y_0) - yx_0 - x_0 = 0 . \qquad (7)$$

Подставим точку (0,-1) в уравнение (7): $1 \cdot x_0$ - x_0 = 0, $0 \in 0$.

Вывод: преобразование (4) есть центральное проектирование с центром в (0, -1) [4].

Замечание 1. Точки, лежащие на прямой y=1, переводятся преобразованием (4) сами в себя.

Замечание 2. Если фигура F лежит выше оси абсциссы, т.е. y>0, то ее образ F′ также будет выше оси x_0, и наоборот (рисунок).

Утверждение 2. Пусть Π_2 являются преобразованиями П при условии $b_{33} \neq 0$. Тогда Π_2 допускают разложения

$$\Pi_2 = A P_x(n) P_y(m) , \qquad (8)$$

$$\Pi_2 = A P_\alpha(h) , \qquad (9)$$

где A – аффинные преобразования; $P_x(n)$ – преобразования перспективы вдоль оси абсцисс с параметром n; $P_y(m)$ – перспективы вдоль оси ординат с параметром m; $P_\alpha(h)$ – преобразования перспективы вдоль прямой с углом наклона, равным α,

т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_x(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P_y(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\alpha(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h\cos(\alpha) & h\sin(\alpha) & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Покажем, что композиция преобразований $A P_x(n) P_y(m)$ однозначно представляется параметрами преобразования Π_2.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} b_{11} = a_{11} + a_{13}m, & b_{21} = a_{21} + a_{23}m, \; b_{31} = m, \\ b_{12} = a_{12} + a_{13}n, & b_{22} = a_{22} + a_{23}n, \; b_{32} = n, \\ b_{13} = a_{13}, & b_{23} = m, \end{cases}$$

следует система уравнений

$a_{11}=b_{11}-b_{13}m$, $a_{21}=b_{21}-b_{23}m$, $m=b_{31}$,
$a_{12}=b_{12}-b_{13}n$, $a_{22}=b_{22}-b_{23}n$, $n=b_{32}$.
$a_{13}=b_{13}$, $a_{23}=b_{23}$,

Аналогично однозначность представления (9) следует из систем уравнений:

$$\begin{cases} b_{11} = a_{11} + a_{13}m, \; b_{21} = a_{21} + a_{23}m, & b_{31} = -h\cos(\alpha), \\ b_{12} = a_{12} + a_{13}n, \; b_{22} = a_{22} + a_{23}n, & b_{32} = h\sin(\alpha). \\ b_{13} = a_{13}, \quad b_{23} = a_{23}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = b_{11} - b_{13}m, \quad a_{21} = b_{21} - b_{23}m, \quad h = \pm\sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2}, \\ a_{12} = b_{12} - b_{13}n, \quad a_{22} = b_{22} - b_{23}n, \quad \alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{a_{32}}{a_{31}}\right), \\ \text{при } a_{31} \neq 0, \\ 90, \; a_{31} = 0, \end{cases} \\ a_{13} = b_{13}, \quad a_{23} = b_{23}, \end{cases}$$

Доказательство закончено.

Утверждение 3. Пусть Π_3 являются преобразованиями П при условии $b_{31} \neq 0$. Тогда Π_3 допускают разложения

$$\Pi_3 = A P_x(n) P_y(m)\, I, \qquad (10)$$

$$\Pi_3 = A P_\alpha(h)\, I, \qquad (11)$$

где A – аффинные преобразования; $P_x(n)$ – преобразования перспективы вдоль оси абсцисс с параметром n; $P_y(m)$ – перспективы вдоль оси ординат с параметром m, $P_\alpha(h)$ – преобразования перспективы вдоль прямой с углом наклона, равным α; I – преобразование симметрии, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_x(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_y(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_\alpha(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h\cos(\alpha) & h\sin(\alpha) & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.

Утверждение 4. Полная проективная группа (1) может быть представлена хотя бы одним из разложений (3), (8)-(11).

Доказательство. Поскольку детерминант матрицы П не равен нулю, следовательно, параметры b_{31}, b_{32}, b_{33} одновременно не равны нулю. А значит матрица П может быть представлена хотя бы в одном из видов $П_1$, $П_2$, $П_3$, разложения которых представлены в утверждениях 1-3.

Доказательство закончено.

Следствие. Множество преобразований $П_1$, $П_2$, $П_3$ покрывает всю проективную группу П вида (1).

Рассмотрим случаи нормализации изображений, для которых нормализация возможна.

Представим изображение как финитные функции двух переменных B(x, y) в прямоугольной области D [2]. Пусть эталонное $B_0(x,y)$ и входное $B(x,y)$ изображения имеют зависимость

$$B(x,y) = B_0\left(\frac{b_{11}x + b_{12}y + b_{13}}{b_{31}x + b_{32}y + 1}, \frac{b_{21}x + b_{22}y + b_{23}}{b_{31}x + b_{32}y + 1}\right),$$

т.е. изображения связаны преобразованием $П_2$. Следовательно, для них возможна нормализация с помощью разложения (8). Отметим, что преобразования перспективы коммутативны, т.е. $P_x(n)P_y(m) = P_y(m)P_x(n)$. Поэтому компенсация перспективы $P_x(n)$ не влияет на параметр перспективы $P_y(m)$, и наоборот.

Если на изображении известна характеристическая точка ($x_{хр.}$,$x_{хр.}$) (точка, которую можно найти при любом преобразовании), находящаяся в некоторой окрестности центра тяжести изображения, то этап компенсации перспективы осуществим переходом от эталонного изображения $B_0(x,y)$ к изображению $B'_0(x,y)$ и от входного $B(x,y)$ к изображению $B'(x,y)$ таким образом, чтобы характерная точка совпадала с центрами тяжестей изображений $B'_0(x,y)$, $B'(x,y)$.

Полученные изображения будут связаны только аффинным преобразованием.

Для этого воздействуем на изображение $B_0(x,y)$ преобразованием перспективы $P_x(m+\Delta m)$ с некоторым шагом Δm и преобразованием перспективы $P_y(n+\Delta n)$ с некоторым шагом Δn, проверяя выполнения условий

$$x_{хр.} = x_{ц.т.} = \frac{\iint\limits_D B'_0(x,y)x\,dx\,dy}{\iint\limits_D B'_0(x,y)\,dx\,dy},$$

$$y_{хр.} = y_{ц.т.} = \frac{\iint\limits_D B'_0(x,y)y\,dx\,dy}{\iint\limits_D B'_0(x,y)\,dx\,dy}.$$

Выполнив аналогичную процедуру для входного изображения $B(x,y)$, получим изображение $B(x,y)$, для которого также будут выполнены условия $x_{хр.}=x_{ц.т.}$, $y_{хр.}=y_{ц.т.}$

Полученные изображения обладают тем свойством, что центры тяжести у них совпадают, что характерно для аффинного преобразования. Таким образом, осуществляется переход к изображениям $B'_0(x,y)$ и $B'(x,y)$, которые связаны только аффинным преобразованием. Нормализацию аффинного искажения можно осуществить любым известным методом [2].

Рассмотрим случай, когда $b_{13}=b_{23}=0$, т.е. когда изображения несмещенные. При этом из условия существования преобразования следует, что $b_{33}\neq 0$. Таким образом, входное и эталонное изображения связаны соотношением:

$$B(x,y) = B_0\left(\frac{b_{11}x + b_{12}y}{b_{31}x + b_{32}y + 1}, \frac{b_{21}x + b_{22}y}{b_{31}x + b_{32}y + 1}\right).$$

Поскольку перспектива всегда влияет на значение центра тяжести изображения, следовательно, признак несмещенности центра тяжести можно рассматривать как признак отсутствия перспективного искажения на изображении.

Выделим из проективного преобразования центроаффинное, используя процедуру нормализации следящего типа [2].

Для нормализации воздействуем на входное изображение преобразованием $P_y(n+\Delta n)$ с некоторым шагом Δn и добиваемся выполнения условия

$$\frac{\iint\limits_D B(x,y)y\,dx\,dy}{\iint\limits_D B(x,y)\,dx\,dy} \cdots \frac{\iint\limits_D B_0(x,y)y\,dx\,dy}{\iint\limits_D B_0(x,y)\,dx\,dy} = 0,$$

тем самым компенсируя перспективу вдоль оси ординат. Теперь, воздействуя на входное изображение преобразованием $P_x(m+\Delta m)$ с некоторым шагом Δm, добиваемся выполнения условия

$$\frac{\iint\limits_D B(x,y)x\,dx\,dy}{\iint\limits_D B(x,y)\,dx\,dy} \cdots \frac{\iint\limits_D B_0(x,y)x\,dx\,dy}{\iint\limits_D B_0(x,y)\,dx\,dy} = 0,$$

тем самым компенсируя перспективу вдоль оси абсциссы. Остается только нормализовать искажение, внесенное аффинным преобразованием.

Таким образом, для несмещенных изображений процедура нормализации оказывается более простой, без перехода к промежуточным изображениям.

Полученные результаты показывают возможность разложения группы проективных преобразований на более простые составные. При этом для изображений, подверженных влиянию преобразований вида $П_2$, процедура нормализации оказывается возможной.

Литература: 1. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969. 598с. 2.*Путятин Е.П., Аверин С.И.* Обработка изображений в робототехнике. М.: Машиностроение, 1990. 319с. 3 *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Геометрические преобразования. М.: МГУ, 1961. 231с. 4.*Бакельман И.Я.* Высшая геометрия. М.: Просвещение, 1967. 367с.

Поступила в редколлегию 19.06.2002

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Петров Э.Г.

Любченко Валентин Анатольевич, студент ХНУРЭ. Научные интересы: компьютерная графика, распознавание образов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина,14, тел. 40-94-19.

Путятин Евгений Петрович, д-р техн. наук, профессор, зав. каф. информатики ХНУРЭ, засл. деят. науки и техники Украины. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-19.