

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ КОМПЛЕКСНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ*

Д.И. ЛЕХОВИЦКИЙ, П.М. ФЛЕКСЕР, С.В. ПОЛИШКО

Сопоставляются способы вычисления законов (плотностей и функций) распределения квадратичных форм комплексных гауссовых векторов с эрмитовыми неотрицательно определенными матрицами общего вида. Показываются преимущества использования вместо известных “точных” аналитических представлений этих законов их интегральных представлений, численно интегрируемых стандартными функциями математических приложений современных компьютеров.

Ключевые слова: законы распределения, квадратичные формы, стандартные функции, разрядность вычислений.

ВВЕДЕНИЕ

Случайные квадратичные формы

$$q = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_i^* \cdot a_{ij} \cdot u_j, \quad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^M = \mathbf{A}^* \quad (1a)$$

комплексных гауссовых M -мерных векторов

$$\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^M \sim CN(\mathbf{0}, \Phi), \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \Phi = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^M = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*} \quad (1б)$$

с нулевым вектором $\bar{\mathbf{u}}$ средних значений и эрмитовой неотрицательно определенной (э.н.о.) корреляционной матрицей (КМ) $\Phi = \Phi^*$ – широко распространенный объект исследований во многих технических приложениях**. В частности, такими формами описываются выходные эффекты оптимального и большинства квазиоптимальных обнаружителей гауссовых полезных сигналов на фоне гауссовых помех. Вектор \mathbf{u} в этом случае имеет смысл вектора комплексных амплитуд выходных сигналов M каналов приема (пространственных, временных, пространственно-временных), а э.н.о. $M \times M$ матрица квадратичной формы \mathbf{A} – матричная импульсная характеристика (МИХ) линейной системы его обработки.

Определению законов (плотностей и функций) распределения квадратичных форм (1), несущих исчерпывающую информацию об их статистических свойствах, уделено большое внимание в литературе. Хорошо известны, в частности, характеристические функции этих форм [1, 5, 7], явные выражения законов распределений при э.н.о. матрицах Φ и \mathbf{A} специального вида [3–5], различные алгоритмы приближенных вычислений в общем случае [1, 5, 6]. Поэтому статистическую теорию форм (1) можно считать в достаточной степени разработанной.

Однако методы вычисления распределений квадратичных форм создавались в период, ког-

да “вычислительные способности” имевшихся компьютеров были существенно ниже современных, оснащенных мощными математическими приложениями. Ориентация на них зачастую может резко изменить сложившиеся представления о сравнительных достоинствах различных методов, ослабить их недостатки, превратить “искусство” программирования известных достаточно сложных алгоритмов в общедоступное “ремесло” обращения к стандартным подпрограммам соответствующих приложений.

Данная статья посвящена обоснованию этих возможностей применительно к вычислению законов распределения квадратичных форм (1) с э.н.о. матрицами Φ и \mathbf{A} общего вида. Здесь эти распределения представляются в форме эффективно вычисляемых функций системы символьной математики “MATHEMATICA”.

1. ИЗВЕСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Плотность распределения $p_q(x)$ квадратичной формы (1) обычно получают преобразованием Фурье

$$p_q(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) \cdot \exp\{-j \cdot x \cdot t\} dt \quad (2)$$

ее характеристической функции (х. ф.) [7, с. 423]

$$\chi(t) = 1/|\mathbf{B}(t)|, \quad (3)$$

обратной детерминанту (определителю) $|\mathbf{B}(t)|$ матрицы

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{I}_M - j \cdot t \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \Phi, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (4)$$

где \mathbf{I}_M – единичная $M \times M$ матрица.

При использовании в (2) ее, как правило, представляют в виде

$$\chi(t) = \prod_{i=1}^M \chi_i(t), \quad \chi_i(t) = 1/(1 - j \cdot t \cdot c_i), \quad (5)$$

где $c_i \geq 0$ ($i \in 1, M$) – неотрицательные собственные числа матрицы \mathbf{Q} .

Из (5) следует, что форма (1) имеет то же распределение $p_q(x) = p_s(x)$, что и сумма

* М.: Успехи современной радиоэлектроники, 2005, № 5, с. 53–59.

** Здесь и далее черта сверху и (*) – символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения (комплексного сопряжения и транспонирования) соответственно.

$$s = \sum_{i=1}^M \xi_i \geq 0, \quad \xi_i = c_i \cdot |\varepsilon_i|^2 \geq 0 \quad (6)$$

M взаимно независимых слагаемых с х. ф. $\chi_i(t)$ (5). Эти слагаемые пропорциональны квадрату модуля комплексных гауссовых случайных величин

$$\varepsilon_i \sim CN(0,1), \quad \overline{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j^*} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in 1, M \quad (7)$$

с нулевым средним и единичной дисперсией и имеют экспоненциальное распределение [10]

$$p_{\varepsilon_i}(x) = c_i^{-1} \cdot \exp(-x/c_i), \quad x \geq 0, \quad i \in 1, M. \quad (8)$$

Интеграл (2) допускает различные представления, зависящие от свойств совокупности собственных чисел (спектра) $c_i \geq 0$ ($i \in 1, M$) матрицы \mathbf{Q} (4). Приведем некоторые из этих представлений.

1. Все собственные числа одинаковы ($c_i = c \geq 0, i \in 1, M$). При этом сумма (6) равна $s = c \cdot \sum_{i=1}^M |\varepsilon_i|^2 \geq 0$ и, следовательно, имеет распределение Эрланга [10]

$$p_q(x) = \frac{(x/c)^{M-1}}{c \cdot (M-1)!} \cdot \exp(-x/c), \quad x \geq 0, \quad (9)$$

в частном случае $M = 1$ переходящее в экспоненциальное (8).

Функция распределения

$$f_q(y) = \int_0^y p_q(x) dx \quad (10)$$

в этом случае равна [10]

$$f_q(y) = 1 - \exp\{-y/c\} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(y/c)^i}{i!}. \quad (11)$$

2. Все собственные значения различны ($c_i \neq c_j, i, j \in 1, M$). В этом случае плотность распределения равна взвешенной сумме экспонент [4, 5]

$$p_q(x) = \mathbf{W}_M^* \cdot \mathbf{E}_M(x) = \sum_{i=1}^M w_i^{(M)} \cdot e^{-\ell_i \cdot x}, \quad (12)$$

$$\ell_i = 1/c_i, \quad i \in 1, M, \quad \mathbf{E}_M(x) = \left\{ e^{-\ell_i \cdot x} \right\}_{i=1}^M$$

с вектором весов

$$\mathbf{W}_M^* = \left\{ w_i^{(M)} \right\}_{i=1}^M, \quad w_i^{(M)} = |\mathbf{Q}|^{-1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (\ell_j - \ell_i)^{-1}. \quad (13)$$

Для элементов этого вектора справедливы рекуррентные соотношения

$$w_i^{(1)} = \ell_1, \quad w_i^{(m)} = w_i^{(m-1)} \cdot \ell_m / (\ell_m - \ell_i), \quad (14)$$

$$i \in 1, m-1, \quad w_m^{(m)} = -\sum_{i=1}^{m-1} w_i^{(m)}, \quad m \in 2, M,$$

в силу которых, в частности,

$$p_q(0) = \sum_{i=1}^M w_i^{(M)} = 0, \quad M \geq 2. \quad (15)$$

Из условия нормировки $\int_0^\infty p_q(x) dx = 1$ следует также, что

$$\sum_{i=1}^M w_i^{(M)} / \ell_i = \sum_{i=1}^M w_i^{(M)} \cdot c_i = 1. \quad (16)$$

Функция распределения (10) с учетом последнего равенства равна

$$f_q(y) = 1 - \sum_{i=1}^M \frac{w_i^{(M)}}{\ell_i} \cdot \exp\{-\ell_i \cdot y\}. \quad (17)$$

3. Различны $m < M$ собственных чисел ($c_i \neq c_j, i \neq j, i, j \in 1, m < M$), а остальные одинаковы ($c_i = c = 1/\ell, i \in m+1, M$). В этом случае (6) представляет собой сумму двух взаимно независимых слагаемых

$$a = \sum_{i=1}^m c_i \cdot |\varepsilon_i|^2, \quad b = c \cdot \sum_{i=m+1}^M |\varepsilon_i|^2,$$

плотности распределения которых, как следует из (12), (9), равны

$$p_a(x) = \sum_{i=1}^m w_i^{(m)} \cdot e^{-\ell_i \cdot x}, \quad \ell_i = 1/c_i,$$

$$p_b(y) = \frac{\ell^{m_1} \cdot y^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \cdot \exp(-\ell \cdot y), \quad m_1 = M - m.$$

Распределение этой суммы в силу взаимной независимости слагаемых можно получить сверткой их распределений:

$$p_q(x) = \int_0^x p_a(x-y) \cdot p_b(y) dy.$$

Учитывая (14), можно показать, что этот интеграл равен

$$p_q(x) = \sum_{i=1}^m w_i^{(M)} \cdot e^{-\ell_i \cdot x} + \left(w_{m+1}^{(m+1)} \cdot \frac{(\ell \cdot x)^{m_1-1}}{(m_1-1)!} - \sum_{n=0}^{m_1-2} \frac{(\ell \cdot x)^n}{n!} \cdot \sum_{i=1}^m w_i^{(M-n)} \right) \times \exp(-\ell \cdot x). \quad (18)$$

При отсутствии различных собственных значений ($m = 0, m_1 = M$) эта плотность переходит в (9), а при отсутствии кратных ($m = M - 1, m_1 = 1, \ell = \ell_M$) – в (12). Равенство (15) остается справедливым в любом случае.

Функция распределения (10) в этих условиях равна

$$f_q(y) = \sum_{i=1}^m \frac{w_i^{(M)}}{\ell_i} \cdot (1 - \exp\{-\ell_i \cdot y\}) + \frac{w_{m+1}^{(m+1)}}{\ell} \cdot \varphi(m_1 - 1, y) - \frac{1}{\ell} \cdot \sum_{n=0}^{m_1-2} \varphi(n, y) \cdot \sum_{i=1}^m w_i^{(M-n)}, \quad (19)$$

$$\varphi(n, y) = 1 - \exp\{-\ell \cdot y\} \cdot \sum_{t=0}^n \frac{(\ell \cdot y)^t}{t!}.$$

4. Матрица \mathbf{Q} имеет m различных собственных чисел c_i ($i \in 1, m \leq M$) кратности k_i соответ-

ственно, $\sum_{i=1}^m k_i = M$. Законы распределения формы (1) для этого наиболее общего случая, включающего в себя рассмотренные выше, получены в [6].

Приведенные законы распределения теоретически решают поставленную задачу для матриц \mathbf{Q} с произвольным спектром. Однако практические вычисления на их основе могут быть затруднены или даже невозможны при наличии в спектре “близких” собственных чисел. В этом случае из-за малых разностей в знаменателе велики по модулю соответствующие элементы $w_i^{(m)}$ (14) вектора весов (13). Поэтому даже малые относительные погрешности их вычисления могут существенно нарушать условия (15), (16), порождая физически бессмысленные результаты (например, отрицательные значения плотности или превышающие единицу значения функции распределения), что неоднократно наблюдалось в вычислительных экспериментах. Предложенная в [6] для преодоления этих недостатков замена “близких” собственных чисел на одно соответствующей кратности далеко не универсальна из-за сложности количественной формулировки критериев “близости” и оценки погрешности, порождаемой такой заменой.

В настоящее время возможен существенно более простой и эффективный путь. Он заключается в отказе от подобных (12), (17) – (19) “точных” аналитических представлений через элементарные функции и переходе к непосредственному численному интегрированию характеристической функции (2) методами, реализованными в математических приложениях современных компьютеров. Ниже для конкретности рассматривается использование широко распространенной системы символьной математики “MATHEMATICA-5”.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В СИСТЕМЕ “MATHEMATICA-5”

Важную роль в рассматриваемой задаче играет численное интегрирование осциллирующих функций вида $g(t) \cdot \cos(at)$, $z(t) \cdot \sin(bt)$, входящее в состав функций системы. Чтобы воспользоваться ими, перепишем (2) в эквивалентном виде

$$p_q(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^0 \chi_q(t) \cdot (\cos(xt) - j \cdot \sin(xt)) dt + \int_0^{\infty} \chi_q(t) \cdot (\cos(xt) - j \cdot \sin(xt)) dt \right).$$

Меняя в первом слагаемом переменную интегрирования t на $-t$ и учитывая, что $\chi_q(-t) = \chi_q^*(t)$, после очевидных преобразований получим

$$p_q(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{\infty} (\chi_q(t) + \chi_q^*(t)) \cdot \cos(xt) dt - j \cdot \int_0^{\infty} (\chi_q(t) - \chi_q^*(t)) \cdot \sin(xt) dt \right).$$

Поэтому

$$p_q(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\infty} A(t) \cdot \cos(xt) dt + \int_0^{\infty} B(t) \cdot \sin(xt) dt \right), \quad (20)$$

$$-\infty \leq x \leq \infty,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – реальная и мнимая части характеристической функции (3), (4)

$$\chi(t) = |\mathbf{I}_M - j \cdot t \cdot \mathbf{Q}|^{-1} = A(t) + j \cdot B(t). \quad (21)$$

В рассматриваемых условиях (6) при $x > 0$

$$p_q(-x) = 0 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\infty} A(t) \cdot \cos(xt) dt - \int_0^{\infty} B(t) \cdot \sin(xt) dt \right)$$

и, следовательно,

$$p_q(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} A(t) \cdot \cos(xt) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} B(t) \cdot \sin(xt) dt, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (22)$$

Интегрируя последние равенства в соответствии с (10), получим функцию распределения

$$f_q(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(t)}{t} \cdot \sin(y \cdot t) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{B(t)}{t} dt - \int_0^{\infty} \frac{B(t)}{t} \cdot \cos(y \cdot t) dt \right).$$

Используя определение

$$B(t) = \text{Im}(\chi_q(t)) = \text{Im} \left\{ \int_0^{\infty} p_q(x) \cdot \exp(j \cdot t \cdot x) dx \right\} = \\ = \int_0^{\infty} p_q(x) \cdot \sin(t \cdot x) dx$$

и известное равенство $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t \cdot x)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, получим,

что $\int_0^{\infty} \frac{B(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\infty} p_q(x) dx = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$f_q(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{A(t)}{t} \cdot \sin(y \cdot t) dt = \\ = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{B(t)}{t} \cdot \cos(y \cdot t) dt, \quad y \geq 0; \quad (23)$$

$$f_q(y) = 0, \quad y < 0.$$

Формулы (22), (23), несколько иначе полученные еще в [5], позволяют вычислить искомые законы распределения по предварительно найденным функциям

$$A(t) = R(t) / (R^2(t) + I^2(t)), \quad (24)$$

$$B(t) = -I(t) / (R^2(t) + I^2(t))$$

реальной и мнимой частей детерминанта

$$|\mathbf{B}(t)| = |\mathbf{I}_M - j \cdot t \cdot \mathbf{Q}| = R(t) + j \cdot I(t). \quad (25)$$

Их вычисление при каждом значении аргумента t можно организовать по-разному. Весьма

привлекательна, в частности, возможность их представления в виде полиномов

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{B}(t)| &= (-1)^M \cdot \sum_{i=0}^M g_i \cdot (j \cdot t)^i, \\
 R(t) &= (-1)^M \cdot \sum_{k=0}^{\varepsilon(M/2)} (-1)^k \cdot g_{2,k} \cdot t^{2 \cdot k}, \quad (26) \\
 I(t) &= (-1)^M \cdot t \cdot \sum_{k=0}^{\varepsilon((M+1)/2)-1} (-1)^k \cdot g_{2,k+1} \cdot t^{2 \cdot k},
 \end{aligned}$$

в которых g_i ($i \in 0, M$) – коэффициенты характеристического полинома матрицы \mathbf{Q} , равные сумме всех ее главных миноров i -го порядка [9]. Они вычисляются функцией “**Minors**” до начала интегрирования (22), (23). Значения полиномов (26) при произвольном значении t экономно вычисляются по схеме Горнера (функцией “**Horner**”). Достоинства этого метода связаны с тем, что в этом случае не требуется вычислять спектр матрицы \mathbf{Q} .

К сожалению, этот способ в общем случае может использоваться только при сравнительно небольших значениях M , поскольку для определения всех коэффициентов g_i ($i \in 0, M$) требуется вычислить 2^M главных миноров матрицы \mathbf{Q} . Для матриц со спецификой структуры требуемое число главных миноров может быть значительно меньше. В частности, в теплицевых матрицах их число не превосходит $M^2 / 2$, что резко снижает ограничение на значение M .

В условиях, когда временные затраты на вычисление коэффициентов полиномов (26) оказываются неприемлемыми, реальная и мнимая части детерминанта (25) могут быть определены после вычисления произведения

$$\prod_{i=1}^M (1 - j \cdot t \cdot c_i) = |\mathbf{B}(t)| = R(t) + j \cdot I(t) \quad (27)$$

при каждом значении аргумента t подынтегральных функций в (22), (23).

Таким образом, процедура вычисления законов распределения квадратичной формы (1) по заданной матрице \mathbf{Q} (4) в системе “**MATH-EMATICA**” включает в себя следующие шаги:

- вычисление коэффициентов g_i ($i \in 1, M$) характеристического полинома матрицы \mathbf{Q} (функция “**Minors**”) или (при недопустимом уровне временных затрат на их отыскание) спектра c_i ($i \in 1, M$) этой матрицы (функция “**Eigenvalues**”);

- вычисление требуемой плотности (22) или функции распределения (23) при заданных значениях их аргументов на основе функций “**Integrate**” с опцией “**Method->Oscillatory**” с обращением к процедуре расчета подынтегральной функции при каждом значении t . Внутри этой процедуры реальная $A(t)$ и мнимая $B(t)$ части характеристической функции (21) строятся по (24). Определяющие их реальная $R(t)$ и мнимая $I(t)$ части детерминанта (25) вычисляются по

(26) с использованием функции “**Horner**”, если на первом шаге были вычислены коэффициенты g_i ($i \in 1, M$) характеристического полинома матрицы \mathbf{Q} , или по (27), если на первом шаге был вычислен ее спектр c_i , $i \in 1, M$.

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ “**MATHEMATICA**”

Работоспособность процедуры п. 2 проверялась при вычислении законов распределения квадратичной формы (1) с различными матрицами \mathbf{Q} (4). Эксперименты показали, что процедура практически нечувствительна к распределению собственных чисел этой матрицы и дает правильные результаты и тогда, когда аналитические представления п. 1 оказываются непригодными. Проиллюстрируем это на примере $M \times M$ матрицы \mathbf{Q} (4) вида

$$\mathbf{Q} = \{ q_{ij} \}_{i,j=1}^M = \frac{1}{tr(\mathbf{Q}_0)} \cdot \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{Q}_0 = (\mathbf{I}_M + \eta \cdot \mathbf{R}), \quad (28)$$

$$\mathbf{R} = \{ \rho_{ij} \}_{i,j=1}^M, \quad \rho_{ij} = \rho_1^{|i-j|^\gamma}, \quad \gamma = 1, 2.$$

Матрицами подобного вида описываются, в частности, корреляционные матрицы (КМ) смеси взаимно независимых собственных шумов каналов приема и пассивных помех в каждом элементе разрешения по дальности импульсной РЛС [5]. В этом случае единичная матрица \mathbf{I}_M соответствует КМ собственного шума в M смежных периодах зондирования, матрица \mathbf{R} – КМ пассивных помех с экспоненциальной ($\gamma = 1$) и гауссовой ($\gamma = 2$) корреляционными функциями междупериодных флуктуаций, ρ_1 – коэффициент корреляции, η – энергетическое отношение помеха-шум (ОПШ). Нормировка матрицы \mathbf{Q}_0 на ее след $tr(\mathbf{Q}_0)$ фиксирует на единичном уровне среднее значение квадратичных форм (1), (6)

$\overline{q} = \overline{s} = tr \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^M c_i = 1$ при произвольных значениях параметров задачи M, η, ρ_1, γ .

В рассматриваемом примере собственные числа матрицы \mathbf{Q} равны

$$\begin{aligned}
 c_i &= c_0 + \mu_i(\mathbf{R}_n), \quad c_0 = 1 / tr(\mathbf{Q}_0), \\
 \mathbf{R}_n &= \eta \cdot \mathbf{R} / tr(\mathbf{Q}_0), \quad i \in 1, M,
 \end{aligned} \quad (29)$$

где $\mu_i(\mathbf{R}_n)$ – собственные числа нормированной КМ \mathbf{R}_n . Последние различны, поэтому различны и все собственные значения матрицы \mathbf{Q} . Аналитические представления плотности и функции распределения в этом случае имеют вид (12) и (17) соответственно.

На рис. 1 показаны семейства плотностей распределения квадратичной формы (1) с матрицей \mathbf{Q} (28) для помех с экспоненциальной ($\gamma = 1$, рис. 1, а) и гауссовой ($\gamma = 2$, рис. 1, б) кор-

реляционными функциями при ОПШ $\eta=10^4$, коэффициенте корреляции помех $\rho_1=0,9$ и различных значениях $M=10,50,100$. Сплошные кривые получены численным интегрированием (22) по методике п. 2 с использованием (24), (27), штриховые кривые – по “точной” формуле (12). В обоих случаях вычисления проводились с мантисой одинаковой длины, равной 15 десятичным разрядам.

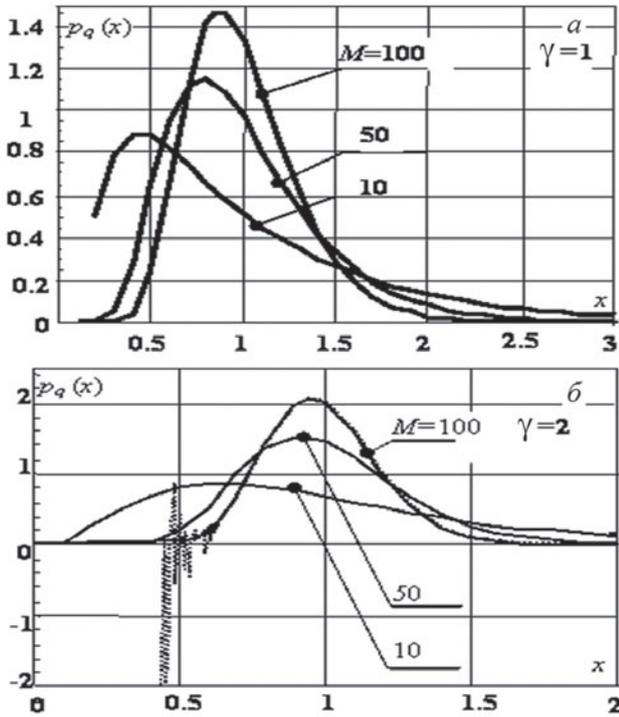


Рис. 1. Плотности распределения (1) с матрицей Q (28)

Как видно из рис. 1, *a*, при $\gamma=1$ оба метода дают одинаковые результаты. Однако при $\gamma=2$ и $M=100$ (рис. 1, *б*) расчет по (12) при малых значениях аргумента дает отрицательные значения плотности и, следовательно, неверен, тогда как численное интегрирование (22) дает правильный результат.

На рис. 2 показаны аналогичные семейства функций распределения, рассчитанных по (23) (сплошные) и по (17) (штриховые кривые).

Видно, что при $\gamma=1$ (рис. 2, *a*) они совпадают. Но при $\gamma=2$ и $M=100$ (рис. 2, *б*) рассчитанные по (17) при малых значениях аргумента значения этой функции превосходят единицу и до определенных пределов убывают с ростом аргумента, чего не может быть в (неубывающей) функции распределения. Численное интегрирование (23) на основе (24), (27) дает правильный результат.

Полученные результаты легко объяснить, анализируя упорядоченные по величине спектры $c_i, i \in 1, M$ (29) (в дБ) матрицы Q (28) при $\gamma=1$ (рис. 3, *a*) и $\gamma=2$ (рис. 3, *б*). Штриховыми кривыми на этом рисунке показаны соответствующие спектры $\mu_i(\mathbf{R}_n)$ нормированной КМ \mathbf{R}_n .

Как следует из (13), (14), поведение плотности (12) и функции распределения (17) определяется “большими” собственными числами матрицы Q , которым соответствуют относительно медленно затухающие экспоненты и знакопеременные веса $w_i^{(M)}$ с модулями, резко увеличивающимися по мере сближения этих чисел. Близость “малых” собственных чисел, порождающих быстро затухающие экспоненты и малые по модулю веса при наличии существенно превосходящих их “больших”, практически не влияет на точность расчета сумм в (12), (17).

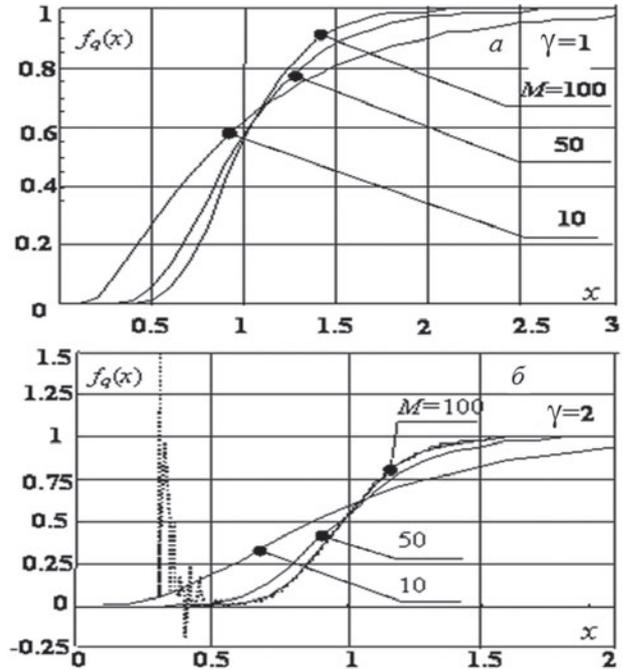


Рис. 2. Функции распределения (1) с матрицей Q (28)

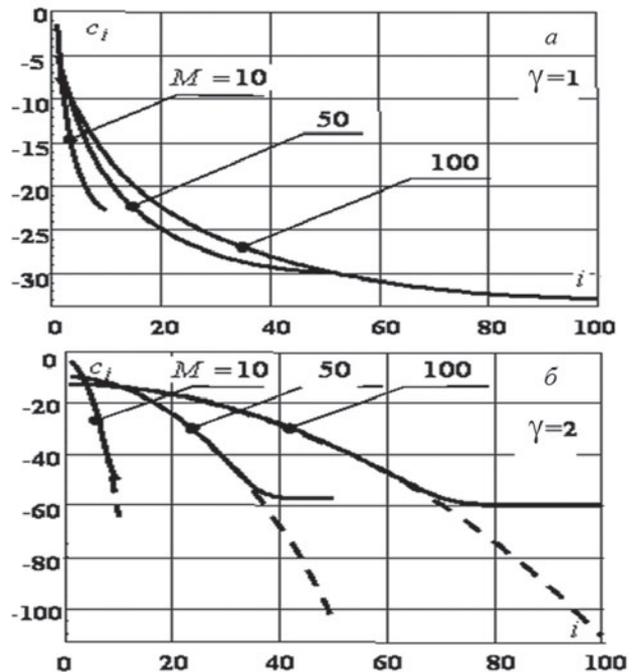


Рис. 3. Спектры (29) (в дБ) матрицы Q (28)

Как видно из рис. 3, а, при $M = 10$ “близкие” собственные числа отсутствуют, а при $M = 50, 100$ близки только малые собственные числа. По этой причине при $\gamma = 1$ результаты расчетов обоими рассматриваемыми способами практически совпадают (рис. 1, а, рис. 2, а). При $\gamma = 2$ и $M = 100$ близки не только малые, но и группа “больших” собственных чисел (рис. 3, б), что порождает большие значения модулей соответствующих весов $w_i^{(M)}$. В рассматриваемом примере эти модули имеют порядок 10^{18} . При выделении менее 18 десятичных разрядов под мантиссу рассчитанные значения весов

$$w_{i\text{calc}}^{(M)} = w_i^{(M)} + \delta_i^{(M)}$$

отличаются от их точных значений $w_i^{(M)}$ на величину ошибки $\delta_i^{(M)}$, а рассчитанные по этим весам плотность (12) и функция распределения (17)

$$p_{q\text{calc}}(x) = p_q(x) + \sum_{i=1}^M \delta_i^{(M)} \cdot e^{-x/c_i},$$

$$f_{q\text{calc}}(y) = f_q(y) - \sum_{i=1}^M \delta_i^{(M)} \cdot c_i \cdot e^{-y/c_i}$$
(30)

содержат ошибки, определяющиеся суммами в правых частях (30). По мере роста аргументов вычисляемых функций эти суммы (ошибки) уменьшаются, что и объясняет наблюдающееся при этом сближение результатов расчетов обоими способами (рис. 1, б, 2, б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точность аналитических представлений (12), (17) в “сложной” ситуации $\gamma = 2$ и $M = 100$ можно повысить, увеличивая разрядность вычислений (с одновременным увеличением времени счета) [5]. Полезным может оказаться и замена близких максимальных собственных чисел одним соответствующей кратности с переходом к расчетам по более сложным формулам (18), (19) [6]. Однако эти меры могут оказаться недостаточными для матриц \mathbf{Q} , отличных от (28), для которых может потребоваться более детальный анализ спектра и подбор соответствующих аналитических представлений законов распределения. Ориентация на такие представления при работе с множеством матриц \mathbf{Q} (порождаемых, например, множеством возможных КМ входных воздействий и множеством алгоритмов обработки сигналов) превращает решаемую задачу в достаточно сложное и трудоемкое “искусство”.

Интегральные представления (22), (23), фактически полученные еще в [5], неизменны для матриц \mathbf{Q} с произвольными спектрами и, что особенно важно, вычисляются стандартными функциями математических приложений современных компьютеров. Ориентация на них сводит решаемую задачу к простому обращению к этим

функциям в соответствии с методикой п. 2 и заданию точности вычисления интегралов, т. е. практически решает важную для многих приложений задачу вычисления законов распределения произвольных квадратичных форм (1).

Литература

- [1] Grenander U., Pollak H., Slepian D. Распределение квадратичных форм от нормальных случайных переменных. Теория малых выборок и ее применение в спектральном анализе. — J. Soc. Industr. Appl. Math., 1959, v.7, №4, p. 374.
- [2] Срагович В.Г. О расчете характеристик обнаружения при квадратичном суммировании сигналов. — Радиотехника и электроника, 1960, т.5, № 4, с. 531.
- [3] Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи // Пер. с англ. под ред. Левина Б. Р. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1962, с. 310–333.
- [4] Охрименко А.Е., Тосев И.Т. Анализ характеристик обнаружения систем междупериодной обработки. — Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, №1, с. 67.
- [5] Фединин В.В. Особенности оценки эффективности систем селекции движущихся целей с учетом некогерентного накопления импульсов. — Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, №5, с. 955.
- [6] Проскурин В.И. Распределение вероятностей квадратичного функционала от гауссовского случайного процесса. — Радиотехника и электроника, 1985, т. 30, №7.
- [7] Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: введение в теорию: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1986. — 448 с.
- [8] Беллман Р. Введение в теорию матриц // Пер. с англ. под ред. В.Б. Лидского. — М.: Наука, 1976. — 351 с.
- [9] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
- [10] Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. — М.: Статистика, 1980. — 95 с.

Поступила в редколлегию 10.11.2011

Леховицкий Давид Исаакович, фото и сведения об авторе см. на с. 404.



Флексер Паулина Моневна. Область научных интересов — статистическая обработка и анализ результатов измерений в радиотехнических системах.



Полишко Сергей Владимирович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник центра военно-стратегических исследований Национального университета обороны Украины. Область научных интересов — адаптивная цифровая обработка сигналов на фоне помех в радиотехнических системах.

УДК 621.391.1:519.2

Про обчислення законів розподілу квадратичних форм комплексних нормальних векторів / Д.І. Леховицький, П.М. Флексер, С.В. Полішко // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2011. Том 10. № 4. – С. 456-462.

Зіставляються способи обчислення законів (щільностей і функцій) розподілу квадратичних форм комплексних гаусівських векторів з ермітовими невід'ємно визначеними матрицями загального виду. Показуються переваги використання замість відомих "точних" аналітичних подань цих законів їх інтегральних подань, які чисельно інтегруються стандартними функціями математичних додатків сучасних комп'ютерів.

Ключові слова: закони розподілу, квадратичні форми, стандартні функції, розрядність обчислень.

Л. 3. Бібліогр.: 10 найм.

UDC 621.391.1:519.2

On calculation of distribution laws of quadratic forms of random complex Gaussian vectors / D.I. Lekhovytskyi, P.M. Flekser, S.V. Polishko // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. 2011. Vol. 10. № 4. – P. 456-462.

In the paper, methods of calculation of distribution laws (densities and functions) of quadratic forms of complex Gaussian vectors with general Hermitian non-negatively determined matrices are compared. Advantages of using the integral representations of these laws numerically integrated by standard functions of mathematical applications of modern computers instead of the known exact analytical representations of the said laws are shown.

Keywords: distribution laws, quadratic forms, standard functions, calculation capacity.

Fig. 3. Ref: 10 items.