

УДК 519.7

МОДЕЛЬ СГЛАЖИВАНИЯ В ЗРЕНИИ

М.Ф. Бондаренко¹, С.Ю. Шабанов-Кушнарченко², Ю.П. Шабанов-Кушнарченко³

¹ ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

² ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, sergabaev@mail.ru

³ ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Исследуются задачи построения тепловой модели, модели инерции и иррадиации. Выведен и обобщен закон Талбота. Доказана равносильность модели инерции и иррадиации зрения и обобщенного закона Талбота для случая нестационарных однородных зрительных картин при однокомпонентном зрении. Приведена экспериментальная проверка обобщенного закона Талбота.

МОДЕЛЬ ИНЕРЦИИ И ИРРАДИАЦИИ, МОДЕЛЬ ТЕПЛОВАЯ, ЗАКОН ТАЛБОТА, КАРТИНА ЗРИТЕЛЬНАЯ, ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Введение

В статье [1] было показано, что оператор зрения можно представить в виде двухкаскадной модели, состоящей из последовательно соединенных блоков 1 и 2. Там же было отмечено, что оператор F , описывающий работу блока 2 этой модели, нельзя признать взаимно однозначным. Такую неоднозначность вносят инерция и иррадиация зрения. Существуют совершенно различные зрительные картины (например, быстрые периодические световые мелькания и немигающий свет), которые дают одинаковые зрительные ощущения. В настоящей работе ставится задача: разделить блок 2 модели на два последовательно соединенных блока, первый из которых должен вобрать в себя неоднозначность в преобразовании сигналов, второй же блок должен осуществлять взаимно однозначное преобразование сигналов.

Решение поставленной задачи оказывается возможным на основе использования закона Талбота [2]. Получаемая в результате модель имеет вид схемы, изображенной на рис. 1.

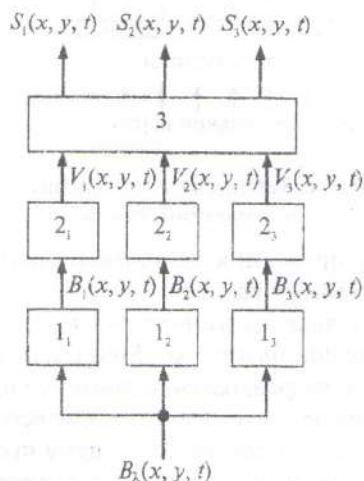


Рис. 1. Модель подавления избытка информации в органе зрения человека

Блоки 1_i ($i = 1, 2, 3$), вместе взятые, образуют блок 1 прежней модели. Блок 2 прежней модели теперь расчленен на два последовательно соединенных яруса, а именно: нижний ярус преобразования в виде трех блоков 2_i ($i = 1, 2, 3$) и верхний ярус преобразования в виде блока 3.

Работу блоков 2_i описываем линейным оператором следующего вида:

$$V_i(x, y, t) = \frac{k_i}{4\pi b_i^2} \int_{-\infty}^t \int \int B_i(\xi, \eta, \tau) \frac{e^{-\frac{t-\tau}{a_i}}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b_i^2 \frac{t-\tau}{a_i}}} d\xi d\eta d\tau, \quad (1)$$

где a_i, b_i, k_i — некоторые константы зрения. Функционирование блока 3 описывается оператором:

$$\bar{S}(x, y, t) = \Phi(\bar{V}(x, y, t)), \quad (2)$$

где Φ — произвольно выбираемый взаимно однозначный непрерывный оператор; $\bar{V}(x, y, t)$ — вектор-функция с компонентами $V_1(x, y, t), V_2(x, y, t), V_3(x, y, t)$; $\bar{S}(x, y, t)$ — вектор-функция зрительного ощущения с компонентами $S_1(x, y, t), S_2(x, y, t), S_3(x, y, t)$.

Следует отметить, что в частном случае при однородных зрительных картинах в предположении, что Φ — тождественный оператор, формула (1) запишется в виде:

$$V_i(t) = \frac{k_i}{a_i} \int_{-\infty}^t B_i(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a_i}} d\tau, \quad (3)$$

что совпадает с формулой Луизова, предложенной им для описания инерции ахроматического зрения [3, с. 17, 31]. Все дальнейшее изложение в настоящей статье будет направлено на уточнение и обоснование предлагаемой схемы преобразования сигналов в органе зрения.

1. Содержательная постановка задачи

В чем же состоит значение введенной схемы преобразования сигналов? Дело в том, что инерцию и иррадиацию зрения можно трактовать как своего рода фильтр, предохраняющий мозг от поступления в него количества информации большего, чем он в состоянии переработать. Именно благодаря инерции и иррадиации зрения мы многие существенно различные входные сигналы не различаем. Инерция и иррадиация зрения выполняют, в сущности, функцию, аналогичную той, которую в схеме на рис. 1 осуществляют блоки 1_r. Однако там подавление избыточной информации ведется по длине волны λ . Инерция же осуществляет подавление избытка информации по времени t , а иррадиация — по полю зрения x, y . Эти три механизма, вместе взятые, можно рассматривать как полную систему подавления избытка информации, имеющуюся на входе органа зрения человека. Все вышележащие механизмы органа зрения обрабатывают поток зрительной информации таким образом, что дальнейшей потери и подавления информации не происходит.

Построенная модель, представленная на рис. 1, интересна в том отношении, что позволяет выделить из общего преобразования информации в органе зрения все механизмы, осуществляющие подавление избытка информации. Эти механизмы представлены на схеме рис. 1 блоками 1 и 2. Они, и только они, осуществляют согласование объема информации, поступающей в мозг через орган зрения, с пропускной способностью мозга. В связи с этим такую модель можно рассматривать как модель подавления избытка информации, поступающей в мозг через орган зрения.

Блок 3 содержит в себе в нерасшифрованном виде все остальные механизмы обработки информации органа зрения человека, осуществляющие преобразование потока информации без дальнейшего его сокращения. Так как работа блока 3 описывается взаимно однозначным оператором, то различным сигналам на входе этого блока всегда будут соответствовать различные сигналы на его выходе. Понимая инерцию и иррадиацию зрения лишь как фильтр, подавляющий избыток информации во времени и в поле зрения, мы можем считать, что блоки 2_r и только они, представляют собой оператор инерции и иррадиации зрения. В настоящей работе показывается, что предлагаемая модель, с одной стороны, и орган зрения человека, с другой, равносильны в роли фильтра, подавляющего избыток информации.

2. Тепловая модель

Для того чтобы естественным образом подойти к построению и обоснованию модели подавления

избытка информации в органе зрения в том виде, как она была представлена на рис. 1, мы построим вначале некоторую гипотетическую модель инерции и иррадиации зрения, воспользовавшись аналогией между процессами инерции и иррадиации зрения, с одной стороны, и тепловыми процессами, с другой. На плодотворность такой аналогии при исследовании инерции зрения указывал еще Аллар [4]. Построенная таким образом модель будет удобным инструментом при решении поставленной задачи.

Уподобим орган зрения некоторой искусственной системе (тепловой модели), представленной на рис. 2. Свет от зрительной картины $b_\lambda(x, y, t)$ проецируется на двумерное поле бесконечно малых фотоприемников, осуществляющих преобразование сигналов по формуле:

$$B(x, y, t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_\lambda(x, y, t) k(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

«Зрение» тепловой модели полагаем однокомпонентным. Под $k(\lambda)$ будем для определенности понимать кривую видности, являющуюся одной из функций сложения фотоприемников глаза. Тогда сигнал $B(x, y, t)$, передаваемый по проводнику, отходящему от каждого фотоприемника, будет представлять собой фотометрическую яркость зрительной картины в различных ее точках в различные моменты времени t .

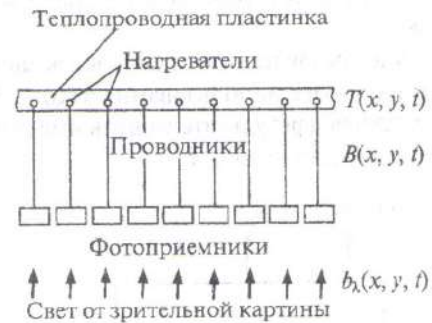


Рис. 2. Тепловая модель инерции и иррадиации зрения

Каждый проводник оканчивается нагревателем бесконечно малых размеров. Эти нагреватели расположены в виде двумерного поля внутри тонкой теплопроводной пластинки. Мощность, развиваемую каждым нагревателем, принимаем пропорциональной численному значению сигнала $B(x, y, t)$, передаваемого по соответствующему проводнику. Тепловое поле, возникающее в пластинке в результате работы нагревателей, уподобим зрительному ощущению, причем температуру $T(x, y, t)$ пластинки

ки будем считать аналогом светлоты зрительного ощущения.

Функционирование тепловой модели имеет много общего с явлениями инерции и иррадиации зрения. При выключении света зрительное ощущение не исчезает мгновенно, а его светлота уменьшается до нуля постепенно. Аналогичный процесс произойдет и в тепловой модели. Если прекратить освещение фотоприемников, произойдет постепенное остывание теплопроводной пластинки и плавное падение ее температуры. При включении света светлота зрительного ощущения нарастает постепенно и через определенное время устанавливается на некотором постоянном уровне. Аналогично этому при внезапном освещении фотоприемников температура теплопроводной пластинки будет нарастать постепенно и, в конце концов, установится на постоянном уровне.

Пусть теперь зрению человека предъявляется зрительная картина, фотометрическая яркость которой периодически изменяется во времени (мелькания). Если частота мельканий невелика, то зрительное ощущение будет испытывать подобное колебание светлоты. Однако при повышении частоты амплитуда колебаний светлоты ощущения будет постепенно уменьшаться, и при некоторой (критической) частоте колебания светлоты вовсе не будут обнаруживаться сознанием наблюдателя. Подобным образом будет реагировать также и тепловая модель. При повышении частоты мельканий амплитуда колебания температуры пластинки будет уменьшаться и, в конце концов, достигнет настолько малого значения, что оно не будет обнаруживаться приборами, измеряющими температуру пластинки, что обусловлено их конечной чувствительностью.

Рассматривая границу между черным и белым, человек видит ее несколько размытой. Аналогичное явление будет наблюдаться и в тепловой модели, если одну часть поля фотоприемников осветить, а другую оставить затемненной. На линии, отделяющей яркую часть зрительной картины от темной, наблюдается скачкообразное изменение яркости. Однако на соответствующей линии, проведенной на теплопроводной пластинке, температура будет меняться плавно. Развивая аналогию в том же направлении, можно воспроизвести на тепловой модели явления слияния густо расположенных ярких и темных полос, образования следа за ярким быстро движущимся объектом, приближения светлоты зрительного ощущения объекта при уменьшении его размеров к светлоте фона и другие явления, связанные с инерцией и иррадиацией зрения [5, гл. 7].

Опишем математически процессы, происходящие в тепловой модели, и определим зависимость температуры $T(x, y, t)$ пластинки от фотометриче-

ской яркости $B(x, y, t)$ зрительной картины. Мощность q , развиваемую нагревателями на единице площадки пластинки, определим по формуле:

$$q = k_1 B, \quad (5)$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности. Введем на пластинке декартову систему координат и выделим на ней элементарную прямоугольную площадку с размерами dx, dy (рис. 3).

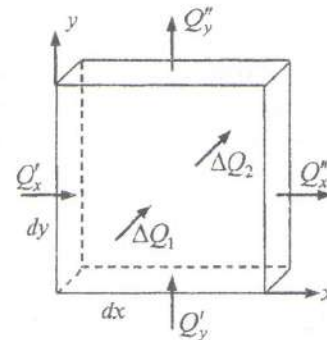


Рис. 3. Декартова система координат в тепловой модели

Количество тепла ΔQ_1 , поступающее за время dt на эту площадку за счет работы нагревателей, равно:

$$\Delta Q_1 = q dx dy dt. \quad (6)$$

Количество тепла ΔQ_2 , отводимое за время dt стенками пластинки в пределах элементарной площадки, определим, основываясь на законе Ньютона-Рихмана [6]:

$$\Delta Q_2 = k_2 T dx dy dt, \quad (7)$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности. Количество тепла Q'_x, Q'_y, Q''_x, Q''_y , проходящего за время dt через сечения элементарной площадки, будем определять, исходя из закона Био-Фурье [7]:

$$Q'_x = k_3 \frac{\partial T}{\partial x} dy dt, \quad (8)$$

$$Q''_x = k_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dy dt, \quad (9)$$

$$Q'_y = -k_3 \frac{\partial T}{\partial y} dx dt, \quad (10)$$

$$Q''_y = -k_3 \frac{\partial}{\partial y} \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy \right) dx dt, \quad (11)$$

где k_3 — коэффициент пропорциональности.

За время dt количество тепла, содержащееся в элементе пластинки, изменится на величину ΔQ , равную:

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 + Q'_x - Q''_x + Q'_y - Q''_y. \quad (12)$$

Подставляя в полученное равенство значения входящих в него величин по формулам (5)–(11), получим:

$$\Delta Q = (k_1 B - k_2 T + k_3 (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2})) dx dy dt. \quad (13)$$

Полагая, что изменение теплосодержания элемента вызывает пропорциональное изменение его температуры (закон постоянства теплоемкости [8, стр. 392]), можем записать следующее равенство:

$$\Delta Q = k_4 \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt, \quad (14)$$

где k_4 — коэффициент пропорциональности. Приравнивая правые части формул (13) и (14), будем иметь:

$$a \frac{\partial T}{\partial t} - b^2 (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) + T = k B. \quad (15)$$

В уравнении (15) приняты следующие новые обозначения:

$$a = \frac{k_4}{k_3}, \quad b = \sqrt{\frac{k_3}{k_2}}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}. \quad (16)$$

Формула (15) представляет собой уравнение тепловой модели. Это уравнение дает нам в дифференциальной форме искомую связь температуры пластинки T с фотометрической яркостью B зрительной картины.

3. Модель инерции и иррадиации

Руководствуясь аналогией между зрением и процессами, происходящими в тепловой модели, будем предполагать, что связь между фотометрической яркостью B зрительной картины и светлотой S зрительного ощущения описывается уравнением, аналогичным уравнению (15) тепловой модели. Тогда мы приходим к следующему уравнению, устанавливающему в дифференциальной форме связь между фотометрической яркостью $B(x, y, t)$ зрительной картины и светлотой $S(x, y, t)$ зрительного ощущения, возникающего в сознании наблюдателя при восприятии этой картины:

$$a \frac{\partial S}{\partial t} - b^2 (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}) + S = k B. \quad (17)$$

Функции $B(x, y, t)$ и $S(x, y, t)$ будем считать определенными и ограниченными при любых значениях x, y, t .

Необходимо отметить, что в частном случае, когда зрительная картина однородна и зависит лишь от времени $B=B(t)$, мы приходим к уравнению, предложенному для описания инерции зрения Алларом [4]:

$$a \frac{dS}{dt} + S = k B. \quad (18)$$

С помощью подстановки

$$G(x, y, t) = e^{\frac{t}{a}} S(x, y, t) \quad (19)$$

выражение (17) преобразуется в уравнение теплопроводности [9]:

$$a \frac{\partial G}{\partial t} - b^2 (\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}) = k e^{\frac{t}{a}} B, \quad (20)$$

ограниченное решение которого имеет вид:

$$G(x, y, t) = \frac{k}{4\pi b^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \int B(\xi, \eta, \tau) \frac{e^{\frac{\tau}{a}}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\xi d\eta d\tau. \quad (21)$$

Переходя к функции $S(x, y, t)$, получаем решение уравнения (17):

$$S(x, y, t) = \frac{k}{4\pi b^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \int B(\xi, \eta, \tau) \frac{e^{-\frac{\tau}{a}}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\xi d\eta d\tau. \quad (22)$$

Выражения (17) и (22) можно рассматривать в качестве дифференциальной и интегральной форм математической модели, воспроизводящей, по нашему предположению, явления инерции и иррадиации зрения. В частном случае, когда зрительная картина однородна и нестационарна, то есть когда яркость $B=B(t)$ изменяется лишь со временем и не зависит от координат x, y поля зрения (равномерно освещенный экран), выражение (22) может быть записано в виде:

$$S(t) = \frac{k}{4\pi b^2} \int_{-\infty}^t B(\tau) \frac{e^{-\frac{\tau}{a}}}{t-\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\xi d\eta. \quad (23)$$

Переходя в интеграле

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\xi d\eta \quad (24)$$

к новым переменным интегрирования:

$$\xi^* = \frac{\xi - x}{2b\sqrt{\frac{t-\tau}{a}}}, \quad (25)$$

$$\eta^* = \frac{\eta - y}{2b\sqrt{\frac{t-\tau}{a}}}, \quad (26)$$

получим:

$$J = 4b^2 \frac{t-\tau}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^{*2} - \eta^{*2}} d\xi^* d\eta^* \quad (27)$$

Вычисление интеграла J ведем в полярных координатах:

$$\begin{aligned} J &= 4b^2 \frac{t-\tau}{a} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 8\pi b^2 \frac{t-\tau}{a} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 4\pi b^2 \frac{t-\tau}{a}. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя найденное значение интеграла J , получаем формулу для определения светлоты зрительного ощущения:

$$S(t) = \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t B(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau. \quad (29)$$

Эта формула совпадает с формулой, предложенной Луизовым для описания инерции зрения [3].

Рассмотрим теперь функционирование модели в случае стационарной неоднородной зрительной картины $B(x, y)$. Этот случай соответствует рассмотрению наблюдателем зрительной картины произвольного вида, яркость в каждой точке которой не меняется со временем. Выражение (22) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \\ &= \frac{k}{4\pi b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{a}}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Переходя в интеграле

$$J_1 = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{a}}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\tau \quad (31)$$

к новой переменной интегрирования

$$\tau^* = \frac{t-\tau}{a}, \quad (32)$$

получим [10, стр. 973]:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau^* - \frac{\gamma^2}{4\tau^*}}}{\tau^*} d\tau^* = 2k_0(2\gamma), \quad (33)$$

где

$$\gamma = \frac{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}}{2b}, \quad (34)$$

k_0 — функция Макдональда с нулевым индексом [11]. Используя найденное значение J_1 , получаем формулу для определения светлоты $S(x, y)$ зрительного ощущения:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \\ &= \frac{k}{2\pi b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, \eta) k_0\left(\frac{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}}{b}\right) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (35)$$

Наконец, когда яркость зрительной картины зависит лишь от координаты x , формула (22) примет вид:

$$\begin{aligned} S(x) &= \\ &= \frac{k}{4\pi b^2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) d\xi \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{a}}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}}}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}} d\eta. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя значение интеграла [12, стр. 407]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\eta-y)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\eta = 2\sqrt{\pi b} \sqrt{\frac{t-\tau}{a}}, \quad (37)$$

будем иметь:

$$S(x) = \frac{k}{2\sqrt{\pi} b} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) d\xi \int_{-\infty}^t \frac{1}{a} \frac{e^{-\frac{t-\tau}{a}}}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\tau. \quad (38)$$

Производя замену переменной интегрирования по формуле

$$\tau_1^2 = \frac{t-\tau}{a}, \quad (39)$$

находим значение интеграла [13]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \frac{e^{-\frac{t-\tau}{a}}}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4b^2 \frac{t-\tau}{a}}} d\tau = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau_1^2 - \frac{(\xi-x)^2}{4b^2 \tau_1^2}} d\tau_1 = \sqrt{\pi} e^{-\frac{|\xi-x|}{b}} \quad (40)$$

Окончательное выражение для определения светлоты зрительного ощущения имеет вид:

$$S(x) = \frac{k}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) e^{-\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi. \quad (41)$$

В построенную математическую модель инерции и иррадиации зрения входят два параметра a и b . Выясним функциональный смысл каждого из них.

Для выяснения смысла параметра a рассмотрим функционирование модели в случае, когда при $t=0$ яркость зрительной картины равна нулю (затемненный экран), а при $t > 0$ яркость скачкообразно изменяется и во всех точках зрительной картины становится равной некоторому значению B_0 (освещенный экран). Математически изменение яркости во времени запишется в виде следующей системы условий:

$$B(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ B_0 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (42)$$

На рис. 4а показан ход изменения яркости B зрительной картины с течением времени t .

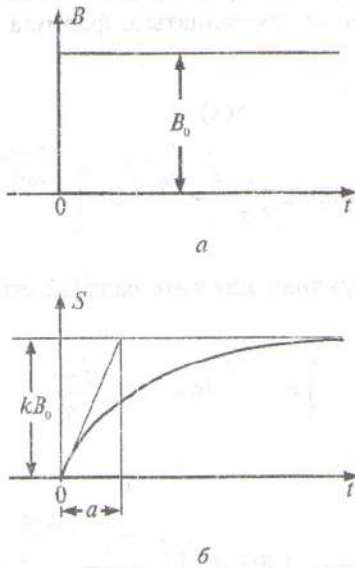


Рис. 4. Изменение яркости во времени

Определим с помощью модели закон изменения во времени светлоты зрительного ощущения $S(t)$. Согласно формуле (29), имеем при $t \leq 0$:

$$S(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^t 0 \cdot e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau = 0, \quad (43)$$

при $t > 0$:

$$S(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau + \frac{1}{a} \int_0^t B_0 e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau = B_0 (1 - e^{-\frac{t}{a}}). \quad (44)$$

Окончательно выражение для определения светлоты запишется в виде:

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ k B_0 (1 - e^{-\frac{t}{a}}) & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (45)$$

На рис. 4б представлена диаграмма изменения светлоты во времени, построенная по формулам (45). Как видим, при внезапном освещении, согласно математической модели, светлота S должна нарастать постепенно, что и наблюдается в действительности. Параметр a , изображенный на диаграмме в виде отрезка, представляет собой время, за которое светлота достигла бы установившегося значения B_0 , если бы она нарастала со скоростью, имевшей место в момент включения света. Величина параметра a характеризует инерцию зрения: чем больше его значение, тем более инерционным будет зрение человека. Параметр a будем называть постоянной инерции зрения. Необходимо заметить, что постоянную a вводит также Луизов, называя ее временем инерции [3, стр. 26].

Перейдем теперь к выяснению функционального смысла параметра b . Для этого рассмотрим функционирование модели в следующем случае. Поле зрения разделено вертикальной границей $x = 0$ на две половины. Левая половина поля зрения затемнена ($B = 0$), правая — освещена. Яркость правой половины поля зрения во всех точках одинакова, не изменяется со временем и равна некоторой величине B_0 . Математически такая зрительная картина описывается следующим образом:

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ B_0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (46)$$

На рис. 5а показан ход изменения яркости зрительной картины в зависимости от значения координаты x .

В этом случае светлота зрительного ощущения $S(x)$, согласно модели, определится следующим образом. По формуле (41) имеем при $x \leq 0$:

$$S(x) = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi + \frac{1}{2b} \int_0^{\infty} B_0 e^{-\frac{\xi-x}{b}} d\xi = \frac{1}{2} B_0 e^{\frac{x}{b}}, \quad (47)$$

при $x > 0$:

$$S(x) = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi + \frac{1}{2b} \int_0^x B_0 e^{-\frac{\xi-x}{b}} d\xi + \frac{1}{2b} \int_x^{\infty} B_0 e^{-\frac{\xi-x}{b}} d\xi = B_0 (1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{b}}). \quad (48)$$

Окончательно выражение для определения светлоты запишется в виде:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}kB_0e^{\frac{x}{b}} & \text{при } x \leq 0, \\ kB_0(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{b}}) & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (49)$$

На рис. 5б представлена диаграмма изменения светлоты зрительного ощущения в зависимости от координаты x поля зрения. Как видим, граница между темным и светлым участками выглядит размытой. Это наблюдается и в действительности.

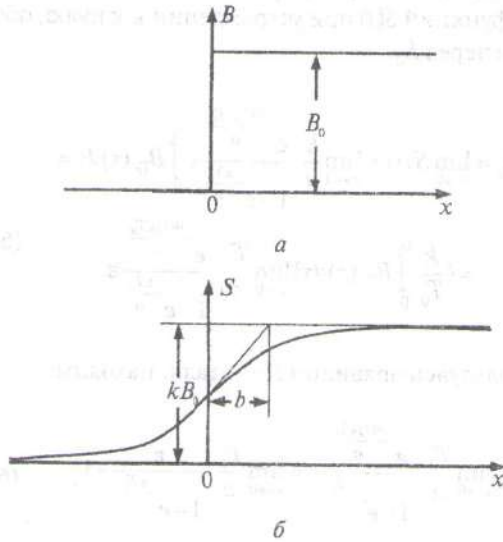


Рис. 5. Зависимость светлоты зрительного ощущения b от координаты x поля зрения

Параметр b , изображенный на диаграмме в виде отрезка, представляет собой угол, в пределах которого видимая яркость достигла бы установившегося значения B_0 , если бы она нарастала с той же скоростью, что и на границе между темным и светлым участками поля зрения. Величина коэффициента B характеризует иррадиацию зрения: чем больше значение этого коэффициента, тем более размытыми, иррадиирующими будут контуры видимых объектов. Параметр b будем называть постоянной иррадиации зрения.

4. Вывод закона Талбота из модели

Приступим теперь к экспериментальной проверке построенной в предыдущем разделе математической модели инерции и иррадиации зрения. Известно, что зрение человека подчиняется психофизическому закону, впервые сформулированному Талботом и названному его именем [2]. Различают временной и пространственный законы Талбота. Предъявим наблюдателю на одном поле сравнения

однородную зрительную картину, яркость которой $B_f(t)$ меняется во времени по произвольному периодическому закону:

$$B_f(t) = B_f(t - nT), \quad (50)$$

где T — период колебания яркости, n — произвольное целое число. Если период T колебания яркости взять достаточно малым, то благодаря инерции зрения мелькания сольются, и наблюдатель увидит немигающее поле.

На втором поле сравнения сформируем однородную и стационарную зрительную картину, характеризующуюся яркостью B_0 . Временной закон Талбота утверждает, что для получения одинаковых зрительных ощущений на полях сравнения необходимо взять уровень яркости B_0 на втором поле сравнения равным среднему значению мелькающей яркости $B_f(t)$, то есть:

$$B_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} B_{T_0}(t) dt, \quad (51)$$

где T_0 — некоторый произвольно выбранный фиксированный период мельканий.

Для демонстрации пространственного закона Талбота на одном поле сравнения сформируем зрительную картину в виде серии вертикальных полос, яркость $B_x(x)$ которой является периодической функцией координаты x :

$$B_x(x) = B_x(x - nX), \quad (52)$$

где X — период колебания яркости. При достаточно густом расположении полос они благодаря иррадиации зрения сольются в однородный фон. Пространственный закон Талбота гласит, что для достижения одинаковости зрительных ощущений на другом поле сравнения необходимо сформировать стационарную и однородную зрительную картину, яркость B_0 которой должна быть равна среднему значению изменяющейся в поле зрения яркости $B_x(x)$, т. е.:

$$B = \frac{1}{X} \int_0^{X_0} B_{X_0}(x) dx. \quad (53)$$

Модель инерции и иррадиации зрения удовлетворяет как временному, так и пространственному законам Талбота.

Докажем сначала выводимость из модели временного закона Талбота. Найдем выражение для светлоты зрительного ощущения $S(t)$, порождаемого зрительной картиной, яркость которой $B_f(t)$ изменяется во времени по произвольному периодическому закону. Используя зависимость (29), имеем:

Таким образом:

$$S(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^t B_T(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-(n+1)T}^{t-nT} B_T(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau. \quad (54)$$

Переходя к новой переменной интегрирования

$$\tau_0 = \tau + nT \quad (55)$$

и используя соотношение (50), получим:

$$\int_{t-(n+1)T}^{t-nT} B_T(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = \int_{t-T}^t B_T(\tau - nT) e^{\frac{\tau_0 - nT}{a}} d\tau = e^{-\frac{nT}{a}} \int_{t-T}^t B_T(\tau_0) e^{\frac{\tau_0}{a}} d\tau_0 = e^{-\frac{nT}{a}} \int_{t-T}^t B_T(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau. \quad (56)$$

Следовательно:

$$S(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{a}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nT}{a}} \right) \int_{t-T}^t B_T(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau. \quad (57)$$

Определяем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nT}{a}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{a}}}. \quad (58)$$

Окончательно формула для определения светлоты в случае периодически изменяющейся во времени яркости запишется в виде:

$$S(t) = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \int_{t-T}^t B_T(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau. \quad (59)$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой о среднем [14], можем записать:

$$S(t) = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{\theta(t)T}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \int_{t-T}^t B_T(\tau) d\tau, \quad (60)$$

где $\theta(t)$ — некоторая функция времени, принимающая значения на интервале $[0, 1]$.

Поскольку $B_T(t)$ — функция периодическая, следовательно:

$$\int_{t-T}^t B_T(\tau) d\tau = \int_0^T B_T(\tau) d\tau. \quad (61)$$

$$S(t) = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{\theta(t)T}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \int_0^T B_T(\tau) d\tau. \quad (62)$$

Обозначим через T_0 некоторый произвольно выбранный фиксированный период мельканий и определим, во что превратится функция $S(t)$ при неограниченном уменьшении периода мельканий T , равного:

$$T = \varepsilon T_0, \quad (63)$$

то есть при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предел, к которому стремится последовательность функций $S(t)$ при устремлении ε к нулю, обозначим через S_0 :

$$S_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{\theta(t)\varepsilon T_0}{a}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon T_0}{a}}} \varepsilon \int_0^{T_0} B_{T_0}(\tau) d\tau = \left(\frac{k}{T_0} \int_0^{T_0} B_{T_0}(\tau) d\tau \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T_0}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{\theta(t)\varepsilon T_0}{a}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon T_0}{a}}} \varepsilon. \quad (64)$$

Пользуясь правилом Лопиталья, находим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T_0}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{\theta(t)\varepsilon T_0}{a}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon T_0}{a}}} \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T_0}{a} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - e^{-\frac{\varepsilon T_0}{a}}} = 1. \quad (65)$$

Таким образом:

$$S_0 = \frac{k}{T_0} \int_0^{T_0} B_{T_0}(\tau) d\tau. \quad (66)$$

Зрительное ощущение такой же светлоты можно получить при наблюдении однородной и стационарной зрительной картины яркости B_0 , равной

$$B_0 = \frac{1}{k} S_0. \quad (67)$$

Объединяя равенства (66) и (67), приходим к формуле (51), что доказывает согласие модели с временной формулировкой закона Талбота. Необходимо отметить, что факт выводимости закона Талбота из формулы (29) для прямоугольных мельканий был доказан Луизовым [3, стр. 43].

Переходим теперь к выводу из модели пространственного закона Талбота. Найдем выражение для светлоты зрительного ощущения $S(t)$, порождаемого зрительной картиной, яркость которой $B_X(x)$ будет изменяться в поле зрения вдоль оси абсцисс

по произвольному периодическому закону. Используя зависимость (41), имеем:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{k}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\xi) e^{\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi = \\
 &= \frac{k}{2b} \int_{-\infty}^x B_X(\xi) e^{\frac{\xi-x}{b}} d\xi + \frac{k}{2b} \int_x^{\infty} B_X(\xi) e^{\frac{\xi-x}{b}} d\xi = \\
 &= \frac{k}{2b} e^{\frac{x}{b}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x-(n+1)X}^{x-nX} B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi + \\
 &+ \frac{k}{2b} e^{\frac{x}{b}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x+nX}^{x+(n+1)X} B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi. \quad (68)
 \end{aligned}$$

Переходя к новым переменным интегрирования

$$\xi_1 = \xi + nX, \quad \xi_2 = \xi - nX \quad (69)$$

и используя соотношение (52), получим:

$$\begin{aligned}
 \int_{x-(n+1)X}^{x-nX} B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi &= \int_{x-X}^x B_X(\xi_1 - nX) e^{\frac{\xi_1 - nX}{b}} d\xi_1 = \\
 &= e^{\frac{nX}{b}} \int_{x-X}^x B_X(\xi_1) e^{\frac{\xi_1}{b}} d\xi_1 = e^{\frac{nX}{b}} \int_{x-X}^x B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi; \quad (70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x+nX}^{x+(n+1)X} B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi &= \int_x^{x+X} B_X(\xi_2 + nX) e^{\frac{\xi_2 + nX}{b}} d\xi_2 = \\
 &= e^{\frac{nX}{b}} \int_x^{x+X} B_X(\xi_2) e^{\frac{\xi_2}{b}} d\xi_2 = e^{\frac{nX}{b}} \int_x^{x+X} B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{k}{2b} e^{\frac{x}{b}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nX}{b}} \right) \int_{x-X}^x B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi + \\
 &+ \frac{k}{2b} e^{\frac{x}{b}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{nX}{b}} \right) \int_x^{x+X} B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi = \\
 &= \frac{k}{2b} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nX}{b}} \right) \int_{x-X}^x B_X(\xi) e^{\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi + \\
 &+ \frac{k}{2b} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{nX}{b}} \right) \int_x^{x+X} B_X(\xi) e^{\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi. \quad (72)
 \end{aligned}$$

При выводе последней формулы учтено, что для первого слагаемого суммы $x \geq \xi$, для второго слагаемого $x \leq \xi$:

Учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nX}{b}} = \frac{1}{1 - e^{\frac{-X}{b}}}, \quad (73)$$

получим следующую формулу для определения светлоты в случае периодически изменяющейся вдоль оси Х яркости зрительной картины:

$$S(x) = \frac{k}{2b} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_{x-X}^{x+X} B_X(\xi) e^{\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi. \quad (74)$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой о среднем, запишем:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{k}{2b} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_{x-X}^{x+X} B_X(\xi) e^{\frac{|\xi-x|}{b}} d\xi = \\
 &= \frac{k}{2b} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_{x-X}^x B_X(\xi) e^{\frac{\xi-x}{b}} d\xi + \\
 &+ \frac{k}{2b} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_x^{x+X} B_X(\xi) e^{\frac{\xi-x}{b}} d\xi = \\
 &= \frac{k}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{x}{b}} e^{\frac{-x-X_1(x)X}{b}}}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_{x-X}^x B_X(\xi) d\xi + \\
 &+ \frac{k}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{x}{b}} e^{\frac{x+X_2(x)X}{b}}}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_x^{x+X} B_X(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{k}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{-X_1(x)X}{b}}}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_{x-X}^x B_X(\xi) d\xi + \\
 &+ \frac{k}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{X_2(x)X}{b}}}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_x^{x+X} B_X(\xi) d\xi, \quad (75)
 \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 — некоторые функции координаты x , принимающие значения на интервале $[0, 1]$.

Функция $B(x)$ периодическая, следовательно:

$$\int_{x-X}^x B(\xi) d\xi = \int_0^X B(\xi) d\xi, \quad \int_x^{x+X} B(\xi) d\xi = \int_0^X B(\xi) d\xi. \quad (76)$$

С учетом этих соотношений формулу для определения $S(x)$ запишем в виде:

$$S(x) = \frac{k}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{-X_1(x)X}{b}} + e^{\frac{X_2(x)X}{b}}}{1 - e^{\frac{-X}{b}}} \int_0^X B_X(\xi) d\xi. \quad (77)$$

Обозначим через X_0 некоторый произвольно выбранный период и определим, во что превратится функция $S(x)$ при неограниченном уменьшении периода X , равного

$$X = \mu X_0, \tag{78}$$

то есть при $\mu \rightarrow 0$.

Предел, к которому стремится последовательность функций $S(x)$ при устремлении μ к нулю, обозначим через S_0 . Имеем:

$$\begin{aligned} S_0 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} S(x) = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{k}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{X_1(x)\mu X_0}{b}} + e^{\frac{X_2(x)\mu X_0}{b}}}{1 - e^{\frac{\mu X_0}{b}}} \cdot \mu \int_0^{X_0} B_{X_0}(\xi) d\xi = \\ &= \left[\frac{k}{X_0} \int_0^{X_0} B(\xi) d\xi \right] \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{X_0}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{X_1(x)\mu X_0}{b}} + e^{\frac{X_2(x)\mu X_0}{b}}}{1 - e^{\frac{\mu X_0}{b}}} \mu. \end{aligned} \tag{79}$$

Пользуясь правилом Лопиталья, находим:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{X_0}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{X_1(x)\mu X_0}{b}} + e^{\frac{X_2(x)\mu X_0}{b}}}{1 - e^{\frac{\mu X_0}{b}}} \mu &= \\ = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{X_0}{2b} \cdot \frac{2\mu}{1 - e^{\frac{\mu X_0}{b}}} \mu &= 1. \end{aligned} \tag{80}$$

Таким образом:

$$S_0 = \frac{k}{X_0} \int_0^{X_0} B(\xi) d\xi, \tag{81}$$

что с учетом (67) приводит к формуле (53). Следовательно, модель инерции и иррадиации зрения (22) удовлетворяет также и пространственной формулировке закона Талбота.

5. Обобщение закона Талбота

Руководствуясь сформулированной в п. 3 методикой исследования, поставим перед собой теперь следующую задачу: построить такую модель инерции и иррадиации зрения, которая была бы в логическом отношении равносильна закону Талбота. Эта задача сводится к отысканию такого оператора преобразования функции $B(x, y, t)$ в функцию $S(x, y, t)$, чтобы, во-первых, из закона Талбота вытекала справедливость этого оператора, и наоборот, из справедливости такого оператора вытекала справедливость закона Талбота. Ясно, что в результате решения этой задачи мы должны прийти либо к оператору (22), либо к некоторому более общему оператору, включающему оператор (22) как частный случай.

Приступая к решению этой задачи, заметим, что закон Талбота свидетельствует о том, что некоторые

существенно различные входные сигналы преобразуются органом зрения в одинаковые выходные сигналы. Зададимся вопросом: возможно ли построить какие-либо другие, не предусмотренные законом Талбота, множества входных сигналов, преобразуемых глазом в одинаковые выходные сигналы? Из последующего изложения станет ясно, что в той формулировке, которая была дана выше, закон Талбота не исчерпывает всех возможностей. Наша ближайшая задача будет состоять в таком обобщении закона Талбота, чтобы с его помощью можно было для двух любых входных сигналов органа зрения установить, одинаковы или различны будут соответствующие им выходные сигналы.

Остановимся сначала на временной формулировке закона Талбота. Рассмотрим более подробно, что представляют собой входные сигналы органа зрения $B(t)$. Функции $B(t)$ удобно считать заданными на всей оси времени $(-\infty, \infty)$, поскольку инерционные процессы зрения весьма кратковременны и протекают в течение долей секунды, что несоизмеримо со сроком существования глаза. На любом конечном отрезке времени $[t_1, t_2]$ функции $B(t)$ локально суммируемы [15], поскольку интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \tag{82}$$

пропорционален энергии излучения и, следовательно, имеет конечную величину.

Однако, кроме всевозможных локально суммируемых функций, глаз может воспринимать также некоторые иные функции. Одной из таких функций может служить функция, фигурирующая в формулировке временного закона Талбота. Она получается из периодической функции $B_T(t) = B_T(t-nT)$ при неограниченном уменьшении периода T колебаний яркости. Таким образом, входными функциями глаза могут быть также некоторые предельные функции, определяемые бесконечной последовательностью локально суммируемых функций. Такого рода входные функции для нас весьма важны, поскольку в терминах именно этих функций формулируется закон Талбота.

Приступим теперь к обобщению формулировки закона Талбота. Сформируем на одном поле сравнения зрительную картину, описываемую некоторой произвольным образом выбранной локально суммируемой функцией $B(t)$, порождающую зрительное ощущение $S(t)$. На другом поле сравнения будем поочередно формировать ряд зрительных картин, каждая из которых описывается функцией из бесконечной последовательности $\{B_1(t), B_2(t), \dots, B_N(t), \dots\}$ локально суммируемых функций. Пусть последовательность этих зрительных картин порождает последовательность зрительных ощущений $\{S_1(t), S_2(t), \dots,$

$S_N(t), \dots$. Опыт показывает, что можно подобрать такие последовательности зрительных картин, чтобы последовательности порождаемых ими зрительных ощущений сходились к зрительному ощущению $S(t)$ второго поля, т. е. чтобы $\lim_{N \rightarrow 0} S_N(t) = S(t)$.

Как определить, какая последовательность зрительных картин дает в пределе зрительное ощущение $S(t)$, а какая нет? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает закон Талбота в обобщенной формулировке: формула

$$\lim_{N \rightarrow 0} S_N(t) = S(t) \quad (83)$$

справедлива в том, и только том случае, если для любого конечного интервала времени $[t_1, t_2]$ будет иметь место равенство:

$$\lim_{N \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} B_N(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt. \quad (84)$$

В выражении (84) сходимость имеет следующий смысл: каковы бы ни были t_1 и t_2 (но $|t_2 - t_1| \leq T_0$, где T_0 — некоторое фиксированное число) для любого N найдется число $\epsilon_N > 0$, такое что:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} (B_N(t) - B(t)) dt \right| \leq \epsilon_N, \quad (85)$$

причем при $N \rightarrow \infty$, $\epsilon_N \rightarrow 0$.

Таким образом, в обобщенной формулировке временной закон Талбота означает следующее. Пусть имеются две различные зрительные картины, одна из которых достаточно быстро изменяется во времени по яркости. Если зрительные картины на любом отрезке времени в среднем совпадают по яркости, то порождаемые ими зрительные ощущения будут одинаковыми. При невыполнении этого условия зрительные ощущения будут различными. Заметим, что прежняя формулировка временного закона Талбота является частным случаем новой, поскольку для периодических функций условие (84) переходит в условие (51).

Закон Талбота можно обобщить также и на случай неоднородных и нестационарных зрительных картин, когда яркость является не только функцией времени t , но и функцией координат поля зрения x, y . Формулировка закона Талбота теперь будет такой.

Если, и только если:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} B_N(x, y, t) dx dy dt = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} B(x, y, t) dx dy dt, \end{aligned} \quad (86)$$

то

$$\lim_{N \rightarrow 0} S_N(x, y, t) = S(x, y, t). \quad (87)$$

В обобщенной формулировке пространственно-временной закон Талбота означает, по- существу, следующее. Пусть имеются две зрительные картины, одна из которых достаточно быстро изменяется по яркости во времени и в поле зрения. Порождаемые этими картинами зрительные ощущения будут одинаковыми в том, и только в том случае, если на любом участке поля зрения и на любом отрезке времени зрительные картины имеют одинаковую среднюю яркость. До сих пор мы оперировали лишь с одной компонентой зрительного ощущения — фотометрической яркостью $B(x, y, t)$, отвлекаясь от факта трехкомпонентности зрения. С учетом трехкомпонентности зрения обобщенный закон Талбота может быть сформулирован в следующем виде.

Зрительные ощущения совпадают в том, и только в том случае, если совпадают средние значения координат цвета соответствующих зрительных картин в произвольном пространственно-временном параллелепипеде $[x_1, x_2; y_1, y_2; t_1, t_2]$. Иными словами, если, и только если:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} B_{iN}(x, y, t) dx dy dt = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} B_i(x, y, t) dx dy dt, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\lim_{N \rightarrow 0} S_{iN}(x, y, t) = S_i(x, y, t), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (89)$$

В такой форме закон Талбота дает исчерпывающий ответ на поставленный выше вопрос; с помощью этого закона можно для любого входного сигнала органа зрения $b_\lambda(x, y, t)$ указать всевозможные последовательности входных сигналов $\{b_{\lambda N}(x, y, t)\}$, дающие в пределе одно и то же зрительное ощущение. Заметим, что вовсе не обязательно полагать, что на одном из полей сравнения должна быть сформирована некоторая фиксированная зрительная картина $b_\lambda(x, y, t)$. Можно рассматривать также и тот случай, когда на обоих полях сравнения формируются последовательности зрительных картин $\{b'_{\lambda N}(x, y, t)\}$ и $\{b''_{\lambda N}(x, y, t)\}$. В этом случае закон Талбота приобретает наиболее общий вид и может быть сформулирован таким образом.

Обобщенный закон Талбота.

Если, и только если:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} B'_{iN}(x, y, t) dx dy dt = \\ = \lim_{N \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} B''_{iN}(x, y, t) dx dy dt, \end{aligned} \quad (90)$$

то

$$\lim_{N \rightarrow 0} S'_{iN}(x, y, t) = S''_{iN}(x, y, t), \quad (i=1, 2, 3). \quad (91)$$

Именно в этой формулировке закон Талбота будет нами использоваться в дальнейшем.

6. Равносильность модели инерции и иррадиации зрения и обобщенного закона Талбота

В предыдущем разделе мы сформулировали обобщенный закон Талбота. Теперь мы докажем равносильность обобщенного закона Талбота и математической модели инерции и иррадиации зрения, предложенной в п. 1 в виде формул (1) и (2). Располагая таким доказательством, мы будем вправе считать, что математическая модель инерции и иррадиации зрения достоверна в той же мере, в какой справедлив обобщенный закон Талбота. Вместе с тем имеются все основания полагать, что обобщенный закон Талбота находится в полном согласии с данными опыта (этот вопрос будет обсужден в следующем разделе). Чтобы не загромождать работу, доказательство равносильности обобщенного закона Талбота и математической модели инерции и иррадиации зрения выполним для частного случая нестационарных однородных зрительных картин при однокомпонентном зрении. В общем случае при нестационарных и неоднородных зрительных картинах и трехкомпонентном зрении доказательство совершенно аналогично, хотя значительно более громоздко.

В рассматриваемом случае обобщенный закон Талбота может быть сформулирован следующим образом.

Если, и только если:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} (B'_N(t) - B''_N(t)) dt = 0, \quad (92a)$$

то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S'_N(t) - S''_N(t)) = 0. \quad (92b)$$

Математическая модель инерции и иррадиации зрения в данном случае запишется:

$$S(t) = \Phi \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t B_N(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau \right). \quad (93)$$

Для доказательства равносильности утверждений (92) и (93) мы должны установить, что: 1) из справедливости утверждения (92) вытекает справедливость утверждения (93); 2) из справедливости утверждения (93) вытекает справедливость утверждения (92). Докажем сначала, что из справедливости утверждения (92) вытекает справедливость утверждения (93). Доказательство состоит в установлении взаимной однозначности оператора Φ . Докажем сперва, что при совпадении функций

$$S'(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S'_N(t), \quad S''(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S''_N(t) \quad (94)$$

совпадут также функции

$$\begin{aligned} V'(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t B'_N(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau, \\ V''(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t B''_N(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau. \end{aligned} \quad (95)$$

Как уже упоминалось выше, по-существу, формула (92a) означает следующее:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau \right| \leq E_N, \quad (96)$$

где $t_2 - t_1 \leq T_0$ и $E_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Выберем произвольно некоторый фиксированный интервал времени так, чтобы $0 < T < T_0$. Тогда:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau = \\ & = \frac{k}{a} e^{-\frac{t}{a}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{(m+1)T}^{mT} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{\frac{t-\tau}{a}} d\tau. \end{aligned} \quad (97)$$

Согласно формуле Бонне [16, с. 325], с учетом (96) имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(m+1)T}^{mT} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{\frac{t-\tau}{a}} d\tau \right| = \\ & = e^{-\frac{(m+1)T}{a}} \left| \int_{(m+1)T}^{\xi} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau \right| + \\ & + e^{-\frac{t-mT}{a}} \left| \int_{\xi}^{mT} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau \right| \leq \\ & \leq e^{-\frac{t-mT}{a}} \left(\left| \int_{(m+1)T}^{\xi} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau \right| + \right. \\ & \left. + \left| \int_{\xi}^{mT} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau \right| \right) \leq 2E_N e^{-\frac{t-mT}{a}}, \end{aligned} \quad (98)$$

где $t - (m+1)T \leq \xi \leq t - mT$.

Следовательно:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau \right| \leq \\ & \leq 2E_N \frac{k}{a} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{mT}{a}} = 2 \frac{k}{a} \frac{E_N}{1 - e^{-\frac{T}{a}}}. \end{aligned} \quad (99)$$

При $N \rightarrow \infty$ величина

$$2 \frac{k}{a} \frac{E_N}{1 - e^{-\frac{1}{a}}} \rightarrow 0 \quad (100)$$

при любом t . Это значит, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau = V'(t) - V''(t) = 0 \quad (101)$$

в смысле равномерной сходимости относительно t . Итак, мы доказали, что при совпадении функций $S'(t)$ и $S''(t)$ функции $V'(t)$ и $V''(t)$ также совпадают.

Докажем теперь обратное, а именно, что при совпадении функций $V'(t)$ и $V''(t)$ совпадают также функции $S'(t)$ и $S''(t)$. Действительно, пусть

$$V'(t) = V''(t). \quad (102)$$

В этом случае при любом t имеет место равенство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau = 0 \quad (103)$$

в смысле равномерной сходимости относительно t . Равенство (103) означает следующее:

$$\left| \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau \right| \leq \eta_N, \quad (104)$$

где $\eta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим уравнение:

$$a \frac{dg(t)}{dt} + g(t) = K(B'_N(t) - B''_N(t)). \quad (105)$$

На всей оси t это уравнение имеет единственное решение (см. п. 3):

$$g(t) = \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau. \quad (106)$$

Подставляя (106) в (105), получим тождество:

$$\begin{aligned} B'_N(t) - B''_N(t) &= \\ &= \frac{a}{k} \frac{d}{dt} \left(\frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau \right) + \\ &+ \frac{1}{k} \left(\frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau \right). \end{aligned} \quad (107)$$

Интегрируя (107) в пределах от t_1 до t_2 , имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau = \\ &= \frac{a}{k} \left(\frac{k}{a} \int_{-\infty}^{t_2} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t_2-\tau}{a}} d\tau - \right. \\ &\left. - \frac{a}{k} \left(\frac{k}{a} \int_{-\infty}^{t_1} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t_1-\tau}{a}} d\tau \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{k} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{k}{a} \int_{-\infty}^t (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau \right) dt. \right. \end{aligned} \quad (108)$$

Используя условие (104), получим:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_1}^{t_2} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{a}{k} \eta_N + \frac{a}{k} \eta_N + \frac{1}{k} \int_{t_1}^{t_2} \eta_N dt = \\ &= 2 \frac{a}{k} \eta_N + \frac{1}{k} (t_2 - t_1) \eta_N \leq 2 \frac{a}{k} \eta_N + \frac{T_0}{k} \eta_N. \end{aligned} \quad (109)$$

Полагая $\frac{1}{k} (2a + T_0) \eta_N = E_N$, приходим к условию (96). Это значит, что:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} (B'_N(\tau) - B''_N(\tau)) d\tau = 0, \quad (110)$$

откуда в силу (92) следует равенство функций $S'(t)$ и $S''(t)$. Итак, мы доказали, что при совпадении функций $V'(t)$ и $V''(t)$ функции $S'(t)$ и $S''(t)$ также совпадают. Следовательно, оператор Φ взаимно однозначный. Это значит, что из справедливости утверждения (92) вытекает справедливость утверждения (93).

Докажем теперь, что из справедливости утверждения (93) вытекает справедливость утверждения (92). Положим вначале, что выполняется условие (92а), и докажем, что при этом выполняется также условие (92б), т.е., что совпадают функции $S'(t)$ и $S''(t)$. В силу взаимной однозначности оператора Φ нам достаточно доказать совпадение функций $V'(t)$ и $V''(t)$. Следовательно, требуется из условия (92а) вывести условие (103). Однако такой вывод был только что выполнен.

Теперь положим, что функции $S'(t)$ и $S''(t)$ совпадают, т.е. что выполняется условие (92б), и докажем, что при этом выполняется также условие (92а). В силу взаимной однозначности оператора Φ в этом случае совпадают также функции $V'(t)$ и $V''(t)$, следовательно, выполняется условие (103). Однако только что было доказано, что из условия (103) следует зависимость (92а). Итак, мы доказали, что из справедливости утверждения (93) вытекает справедли-

вость утверждения (92). Этим завершается доказательство равносильности обобщенного закона Талбота и математической модели инерции и иррадиации зрения для случая нестационарных однородных зрительных картин при однокомпонентном зрении.

Доказательство этого же положения в общем случае при нестационарных и неоднородных зрительных картинах и трехкомпонентном зрении совершенно аналогично и не требует привлечения каких-либо новых идей. Чтобы не загромождать работу, мы его здесь не приводим. В заключение приведем строгую формулировку общей математической модели инерции и иррадиации зрения, равносильной обобщенному закону Талбота. Модель имеет следующий вид:

$$S_i(x, y, t) = \Phi_i \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_i}{4\pi b_i^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{iN}(\xi, \eta, \tau) \frac{e^{-\frac{t-\tau}{a_i}}}{t-\tau} \times \right. \\ \left. \times e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4b_i^2 \times (t-\tau)/a_i}} d\eta d\xi d\tau \right), i = (1, 2, 3). \quad (111)$$

Важно отметить, что гипотетическая модель инерции и иррадиации зрения в виде формулы (22), полученная на базе тепловой модели и использованная нами в качестве инструмента исследования, является частным случаем модели (111), выведенной из обобщенного закона Талбота.

Выводы

Приведем далее экспериментальную проверку обобщенного закона Талбота. В предыдущем разделе мы построили математическую модель инерции и иррадиации зрения в виде формулы (111) и доказали ее равносильность закону Талбота. Эта модель верна в той же степени, в которой верен закон Талбота. Теперь остановимся на вопросе, в какой мере закон Талбота выполняется на опыте. Что касается временного закона Талбота, то он проверялся экспериментально многими авторами [17–20]. В широком диапазоне изменения яркости, соответствующем практически произвольным условиям видения, не обнаружено каких-либо отклонений от закона Талбота. Некоторые незначительные отклонения обнаружены в крайних, нерабочих режимах функционирования глаза: при очень низком уровне яркости, близком к абсолютному порогу чувствительности зрения, и при очень высоком уровне яркости, соответствующем уровню невыносимости глаза. Если не считаться с этими отклонениями, которые, очевидно, связаны с неточностями работы глаза в предельных режимах, то можно констатировать идеальное согласование опытных данных с законом Талбота.

Опыты с цветными мельканиями показали, что и в условиях трехкомпонентного зрения закон Талбота не нарушается [21]. Пространственный закон Талбота в случае ахроматического зрения выполняется безукоризненно, в случае цветного зрения также известны работы, подтверждающие справедливость этого закона, хотя имеются работы, ставящие под сомнение справедливость этого закона [21, 22]. Что же касается формулировки закона Талбота в обобщенном виде, то литературные данные по его экспериментальной проверке отсутствуют. Однако и нет никаких данных, которые могли бы поставить под сомнение его справедливость.

Нами были поставлены специальные опыты по проверке закона Талбота в его обобщенной формулировке. Существо опытов сводилось к следующему. До сих пор эксперименты по проверке закона Талбота ставились таким образом, что после слияния мельканий получалось равномерное и немигающее зрительное ощущение. Однако, исходя из обобщенной формулировки закона Талбота, можно прийти к выводу о возможности получения с помощью различных зрительных картин одинаковых нестационарных ощущений. В опытах были взяты примеры именно таких зрительных картин.

В одном из опытов наблюдателю предъявлялись для сравнения две ахроматические картины $B_1(t)$ и $B_2(t)$, яркость которых изменялась во времени так, как показано на диаграммах рис. 6а и 6б. На диаграммах B_6 обозначают уровни яркости, соответствующие белому и черному цвету с коэффициентами отражения 83 и 2%. Зрительная картина, соответствующая диаграмме 6а, формировалась путем чередования во времени двух серых полей, имеющих яркости B' и B'' , соответствующие коэффициентам отражения 63 и 22%. Длительность T предъявления полей одинакова. Диаграмме 6б соответствует зрительная картина, получаемая с помощью значительно более быстрых мельканий белых и черных полей. Соотношение в длительности фаз этих быстрых мельканий выбиралось с таким расчетом, чтобы средняя яркость быстрых мельканий равнялась яркости медленных мельканий на том же интервале времени.

Согласно обобщенному закону Талбота, обе зрительные картины должны выглядеть одинаковыми при условии слияния быстрых мельканий.

Опыты выполнялись с помощью диска Максвелла. Схема кружка, использовавшегося в опыте, изображена на рис. 7. На кружке имеются два соприкасающихся кольца. На внутреннем кольце сформирована зрительная картина, соответствующая диаграмме 6а, на внешнем — зрительная картина, соответствующая диаграмме 6б. Частота смены яркости быстрых мельканий принята в 16 раз более высокой, чем медленных.

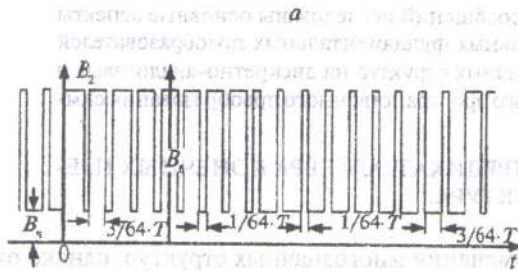
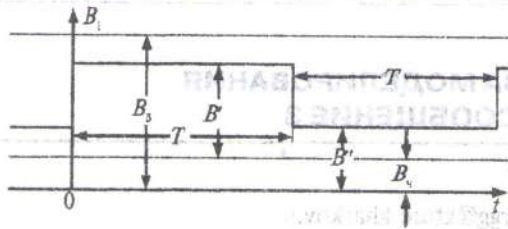


Рис. 6. Диаграммы проверки обобщенного закона Талбота

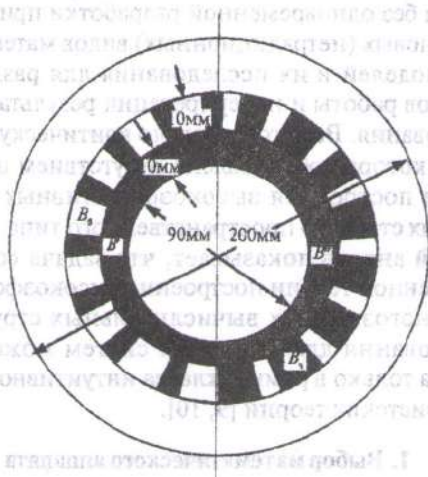


Рис. 7. Диск Максвелла

При постепенном раскручивании диска-вертушки вначале на внешнем кольце заметны не только медленные, но также и быстрые мелькания яркости. При этом заметно различие зрительных картин, наблюдаемых на соседних кольцах. Однако, как только быстрые мелькания яркости на внешнем кольце перестают замечаться (это происходит при скорости вращения диска около 3 об/сек), обе зрительные картины становятся неотличимыми, в полном соответствии с обобщенным законом Талбота. При этом наблюдатель видит на обеих дорож-

ках синфазные колебания светлоты. Дальнейшее повышение скорости вращения диска приводит к изменению характера колебаний светлоты на обоих полях, однако между соседними зрительными ощущениями все время сохраняется тождество. Так продолжается вплоть до полного слияния медленных мельканий при 40 + 50 об/сек. Во время проведения опытов освещенность диска вертушки изменялась в широких пределах (от 10 до 1000 лк).

Подобного рода опыты выполнялись также при изменении яркости медленных мельканий во времени в виде синусоиды, пил и др. Производились также опыты с цветными мельканиями. Во всех этих опытах не было обнаружено каких-либо отклонений от обобщенного закона Талбота.

Список литературы. 1. Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушнаренико Ю. П. Модели цветового зрения. // Бιοника интеллекта: Научн.-техн. журнал. — 2006. — № 1 (64). — С. 27—41. 2. Talbot H. F. Experiments on light. // Phil. Mag., 1834, № 5. 3. Луизов А. В. Инерция зрения. — М.: Оборонгиз, 1961. 4. Allard M. E., Memoire sur l'intensite et la portee des phares, Paris, 1876. 5. Кравков С. В. Глаз и его работа. — М.-Л.: Изд. АН СССР, 1950. 6. Кирпичев М. В., Михеев М. А., Моделирование тепловых устройств. — М.-Л.: Изд. АН СССР, 1936. 7. Михеев М. А. Основы теплопередачи. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1949. 8. Справочник машиностроителя. — Т. 1. — М.: Машгиз, 1951. 9. Тихонов А. Н., Самарский Л. Л. Уравнения математической физики. — М.: Гостехтеориздат. Изд. 2-е, 1933. 10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. — Физматгиз, 1962. 11. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1949. 12. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Изд. 10-е. — М.: Наука, 1965. 13. Девит Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1966. 14. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Изд. 6-е. — Т. 2. — М.: Наука, 1966. 15. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949. 16. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. — М.: Наука, 1967. 17. Hyde E., Talbot's law as applied to rotating sectored disk, Bul. Bureau of Stand., 1906, v. 2. 18. Piéron H., Excitation lumineuse intermittente et excitation alterne caracteristiques et lois, L'annee psychologique, 1927, v. 28. 19. Exner S. Studien auf dem Grenzgebiete lokalisierten Sehens, "Pflugers Archiv", 1898, Bd. 73. 20. Marbe K. Tatsachen und Theorien des Talbot'schen Gesetzes, «Pflugers Archiv», 1903, Bd. 97. 21. Lempicka W., Paumliche Farbmischung auf der Netzhaut, «Zeitschr. F. Sinnesphysiol», 1919, №50. 22. Теплов Б. М., Яковлева С. П. О законах пространственного и временного смешения цветов. // Сб. «Зрительные ощущения и восприятия». — Т. 2. — М.: Союзгиз, 1935.

Поступила в редколлегию 02.02.07