Вестник Днепропетровского университета, серия «Физика. Радиоэлектроника». 2008, вып. 15, №2/1.

УДК 621.372

А. В. Веревкина, А. В. Грицунов
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

К ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Запропоновано матричний підхід до розв'язання електродинамічних задач. Його особливість полягає в трактуванні електродинамічної системи (ЕС) як коливальної зі скінченим числом ступенів свободи. ЕС розглядається як сукупність локалізованих у просторі парціальних осциляторів (осцилетів).

Введение. Внедрение цифровых технологий обработки и передачи информации создало определенные противоречия между потребностями практики и возможностями теории, с точки зрения, исследования нелинейного взаимодействия электромагнитных полей с заряженными частицами и материальными средами. Цифровая информация существенно отличается от аналоговой по своим временным и спектральным характеристикам. По мере нарастания скоростей обмена это различие усугубляется. Несмотря на то, что возникло и интенсивно развивается новое направление в радиотехнике и радиофизике – теория и техника сверхширокополосных электромагнитных импульсов, современная электродинамика все еще базируется, в значительной мере, на теоретических методах, разработанных для анализа квазигармонических электромагнитных полей. Существующие разнообразные вычислительные методы [1] также не вполне удовлетворяют многочисленным потребностям практики. Таким образом, проблема поиска новых теоретических подходов к решению электродинамических задач остается актуальной. С этой точки зрения, имеет смысл обратить внимание на методы, применяемые в других разделах физики.

Например, в квантовой механике известны два подхода к нахождению волновых функций микрочастиц: волновая механика Шредингера и матричная механика Гейзенберга [2]. Первая основана на прямом решении дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих волновую функцию частицы (например, уравнения Клейна-Гордона или уравнения Шредингера). Вторая – работает с элементами векторного пространства, образованного множеством возможных решений этих же уравнений. Несмотря на то, что оба подхода приводят к одинаковым физическим результатам, в вычислительном смысле они не всегда эквивалентны. Если векторное пространство волновых функций заранее известно (например, описано аналитически), то матричная механика сводится к решению задач линейной алгебры, которые почти всегда имеют преимущество перед численным интегрированием дифференциальных уравнений с точки зрения затрат вычислительных ресурсов.

Поскольку уравнение Д'Аламбера для каждой из составляющих четырехмерного векторного электромагнитного потенциала является частным случаем уравнения Клейна-Гордона, очевидно, что в электродинамике также возможны два подхода к нахождению распределения потенциала в пространстве-времени.

По аналогии с квантовой механикой, назовем их волновой электродинамикой и матричной электродинамикой. В основе такого «математического» сходства, разумеется, лежат физические причины, обусловленные тем, что классическая электродинамика является предельным случаем квантовой электродинамики.

Целью статьи является изучение проблем, возникающих при попытке применить матричную электродинамику для решения практических задач.

Теоретическая часть. Элементы теории векторных пространств в электродинамике используются давно. Например, разложение электромагнитных колебаний по собственным функциям электродинамической системы (ЭС) – не что иное, как простейший вариант матричной электродинамики. Сюда же следует отнести вариационные методы [1] и т. п.. Однако, обычно в качестве базиса в векторном пространстве применяются собственные функции ЭС. В таком случае (за исключением простейших ситуаций, когда границы ЭС совпадают с координатными поверхностями, т. е. задача о собственных значениях имеет аналитическое решение), матричный подход дает мало преимуществ с точки зрения экономии вычислений. Основную трудность в электродинамических задачах составляет именно расчет собственных функций и собственных чисел ЭС с произвольной геометрией [3], для чего используются, как правило, методы волновой электродинамики.

Как альтернатива локализованным в области волновых чисел собственным функциям ЭС, в [4] предложен базис локализованных в пространстве парциальных функций ЭС (парциальных осцилляторов, осциллетов). Смысл его заключается в следующем. Будем рассматривать ЭС как распределенную колебательную систему, родовой (generic) электромагнитный потенциал $\mathsf{A}(t,x,y,z)$ [5] в объеме V которой описывается неоднородным волновым уравнением:

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathsf{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathsf{A}=\mu_0\mathsf{J} \tag{1}$$

с однородными граничными условиями (ГУ) первого или второго рода или условиями периодичности на границах. $\mathsf{J}(t,x,y,z)$ – родовая плотность тока [5]. Предположим, что спектр функции A в области волновых чисел $\vec{k}$ финитен, т. е. $\left|\vec{k}\right|\le k_{max}<\infty$. Тогда, используя метод разделения переменных, решение уравнения (1) можно записать в виде конечного ряда

$$\mathsf{A}(t,x,y,z)=\mathbf{u}_{\mathrm{p}}(t)\mathbf{A}_{\mathrm{p}}(x,y,z)\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}_{\mathrm{p}}$ – вектор-столбец из N вещественных парциальных функций ЭС; $\mathbf{u}_{\mathrm{p}}$ – вектор из такого же числа мгновенных значений этих функций; N – количество собственных значений ЭС (квадратов собственных волновых чисел), меньших или равных k_{max}^2, включая кратные.

Вектор $\mathbf{A}_{\mathrm{p}}$ является решением задачи о взаимных значениях (intervalues problem) для самосопряженного линейного дифференциального оператора $-\nabla^2$. Она состоит в нахождении нетривиального решения матричного уравнения

$$\nabla^2\mathbf{A}_{\mathrm{p}}+\left[k_{\mathrm{p}}^2\right]\mathbf{A}_{\mathrm{p}}=0 \tag{3}$$

в объеме ЭС с однородными ГУ первого или второго рода или условиями периодичности на ее стенках, пространственно локализующего все элементы искомого вектора. Локализация означает достаточно быстрое приближение всех составляющих функции $\mathsf{A}_{\mathrm{p}n}$ (n = 0 … N–1) к нулю при удалении во все стороны от ее глобального экстремума. Матрица взаимных значений (intervalues matrix) $\left[k_{\text{p}}^{2}\right]$ размером $N\times N$ содержит N^{2} квадратов взаимных волновых чисел (interwavenumbers) парциальных осцилляторов. *N* собственных чисел этой матрицы совпадают с наименьшими собственными значениями ЭС, повторяя их кратность.

Условие ортогональности первого рода (first kind) для парциальных функций имеет вид

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_V dxdydz\mathbf{A}_{\text{p}}\mathbf{A}_{\text{p}}^{T}=\left[\tilde{W}_{\text{p}}\right],\tag{4}$$

где верхний индекс *T* означает транспонирование вектора. $\left[\tilde{W}_{\text{p}}\right]$ – симметрическая матрица размером $N\times N$, содержащая N^{2} единичных взаимных псевдоэнергий (pseudoenergies) родового потенциала парциальных осцилляторов.

Условие ортогональности второго рода (second kind) с учетом самосопряженности оператора $-\nabla^{2}$ записывается в виде

$$\frac{1}{2\mu_0}\int\limits_V dxdydz(-\nabla^{2}\mathbf{A}_{\text{p}})\mathbf{A}_{\text{p}}^{T}=\frac{1}{2\mu_0}\int\limits_V dxdydz\mathbf{A}_{\text{p}}(-\nabla^{2}\mathbf{A}_{\text{p}}^{T})=\left[W_{\text{p}}\right],\tag{5}$$

где $\left[W_{\text{p}}\right]$ – симметрическая матрица размером $N\times N$, содержащая N^{2} единичных взаимных энергий родового потенциала парциальных осцилляторов.

Для парциальных осцилляторов имеет место соотношение:

$$\left[k_{\text{p}}^{2}\right]=\varepsilon_0\mu_0\left[W_{\text{p}}\right]\left[\tilde{W}_{\text{p}}\right]^{-1}\tag{6}$$

(аналог формулы Рэлея), где верхний индекс (–1) означает обращение матрицы. Надлежащим выбором матрицы формы (form-matrix) нормальных мод $\left[F\right]$ размером $N\times N$ [6] можно диагонализировать матрицу взаимных значений, получив в результате матрицу собственных значений ЭС $\left[k_{\text{e}}^{2}\right]$

$$\left[k_{\text{e}}^{2}\right]=\left[F\right]\left[k_{\text{p}}^{2}\right]\left[F\right]^{-1}.\tag{7}$$

Вектор *N* собственных функций ЭС $\mathbf{A}_{\text{e}}$ является линейным преобразованием вектора парциальных функций с найденной матрицей формы

$$\mathbf{A}_{\text{e}}=\left[F\right]\mathbf{A}_{\text{p}}.\tag{8}$$

Относительная величина функций в векторе $\mathbf{A}_{\text{e}}$ называется нормировкой осциллетов. В [4] описаны четыре возможные нормировки: амплитудная, энергетическая первого рода, энергетическая второго рода и специальная. Там же рассмотрены типы парциальных функций с точки зрения их структур в двух- и трехмерном пространстве (скалярные, потенциальные векторные, соленоидальные векторные одного или двух типов, поперечные векторные).

Соотношения (2) – (8) являются математической основой матричной электродинамики. С физической точки зрения осциллеты можно считать «облаками» непрерывной функции A, колеблющимися как единое целое (в одинаковой фазе).

Поэтому к ним можно применить матричную теорию колебательных систем с сосредоточенными параметрами и N степенями свободы [7], интерпретируя ЭС в целом как некую «решетку» электродинамически связанных между собой парциальных осцилляторов. Каждая парциальная функция является собственной функцией одной из N парциальных колебательных систем, получаемых из исходной системы с N степенями свободы путем фиксации N–1 независимых обобщенных координат [6] (этим объясняется ее название).

В [4] перечислены пять фундаментальных свойств парциальных функций ЭС. Предполагается, что каждая функция A_{pn} ($n = 0 \dots N–1$), удовлетворяющая уравнению (3) с однородными ГУ первого или второго рода или условиями периодичности на стенках ЭС, должна обладать этими свойствами. Возможно также обратное предположение: любая функция, обладающая всеми фундаментальными признаками парциальной функции, является одним из решений уравнения (3) с вышеуказанными ГУ. Практическая важность данного утверждения (если оно справедливо) состоит в том, что, если, по крайней мере, некоторые из N парциальных функций ЭС априори известны, число неизвестных функций в уравнении (3) соответственно уменьшается.

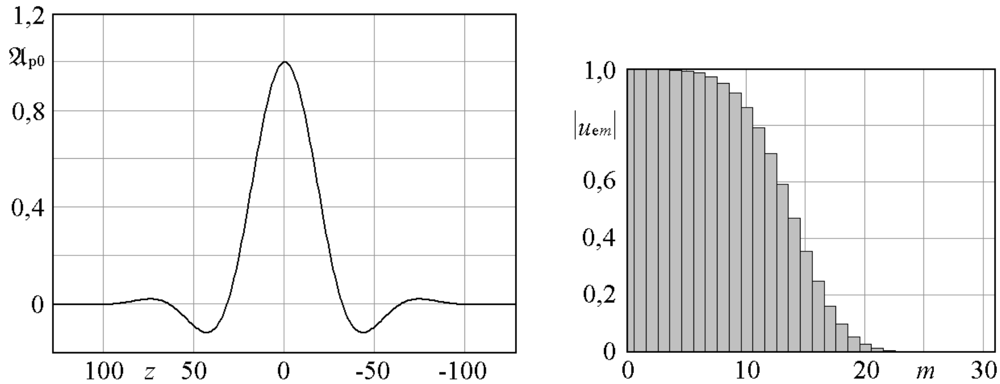
Например, нет необходимости вычислять структуру осцилляторов, удаленных от границ ЭС, поскольку они практически тождественны парциальным функциям свободного пространства (согласно теореме о сдвиге [8], пространственное перемещение осциллета изменяет лишь его фазовый спектр в базисе собственных функций). Кроме того, если эти осцилляторы расположены регулярно, идентичны также их электродинамические параметры (взаимные псевдоэнергии и энергии).

Учесть ГУ для осцилляторов, расположенных вблизи стенок ЭС, в общем случае можно следующим образом. Предположим, что осциллеты, расположенные вблизи одной из границ ЭС, затухают практически до нуля у противоположной границы. Наложим на регулярную решетку исходных осцилляторов свободного пространства, заполняющую весь объем системы, несколько слоев дополнительных осциллетов, «выстилающих» стенки ЭС. Матрица $\left[k_{\mathrm{p}}^2\right]$ для этих осцилляторов берется такой же, как у осциллетов свободного пространства, а значения на границе ЭС задаются так, чтобы каждая пара соответствующих друг другу исходной и дополнительной парциальных функций в сумме удовлетворяла однородным ГУ на стенках системы. Эти суммы и рассматриваются как функции $\mathbf{A}_{\mathrm{p}}$. Структуры дополнительных осциллетов вычисляются путем решения задачи (3) с начальными условиями, в качестве которых используются заданные значения этих осциллетов на границе ЭС (так называемая матричная задача Коши). В ряде случаев удается учесть ГУ и без численного интегрирования уравнения (3), например, наложением «зеркальных отражений» осциллетов свободного пространства в плоской металлической поверхности.

При попытке применить соотношения (2) – (8) возникает ряд проблем, среди которых, помимо вышеупомянутого учета ГУ, следует отметить обеспечение финитности осциллетов в пространстве.

Любая нетривиальная линейная комбинация конечного числа собственных функций ЭС не обращается тождественно в нуль во всем объеме V. Поэтому, в строгом смысле, пространственная локализация парциальных функций не обеспечивает им каких-либо преимуществ перед собственными функциями с точки зрения объема вычислений. С другой стороны, если потенциалы всех парциальных осцилляторов достаточно быстро уменьшаются при удалении от их экстремумов, «принудительное» ограничение объема каждого осциллета до некоторого минимально допустимого значения практически не влияет на элементы матриц $\left[\tilde{W}_{\text{р}}\right]$ и $\left[W_{\text{р}}\right]$. Таким образом, матричная электродинамика, по своей сути, является приближенной теорией.

Численные результаты. Методы ограничения объема парциального осциллятора, т. е. обеспечения его пространственной финитности, целесообразно изучать на одномерной колебательной системе. В работе исследуются два вида одномерных осциллетов: первый – с амплитудной нормировкой, взвешенный гауссовым окном в пространственной области (рис. 1); второй – с усеченной гауссовой нормировкой (рис. 2). Параметры окна и нормировки подобраны так, чтобы длина обоих финитных осцилляторов не превышала 1/4 длины системы. На рисунках буквой (а) обозначен исходный осциллет, буквой (б) – его амплитудный спектр в базисе собственных функций колебательной системы (m – номер собственной функции). Рассматриваются две системы: первая – с периодическими ГУ, дискретизированная на 1024 интервала единичной длины Δz, $N = 32$; вторая – с ГУ второго рода, дискретизированная аналогично, $N = 33$. Исследуются также два варианта локализации осциллетов: регулярная (осцилляторы расположены эквидистантно вдоль всей колебательной системы с интервалом $32\Delta z$) и стохастическая (вводится смещение каждого осциллета от места его регулярной локализации в ту или иную сторону на случайную величину, не превышающую $16\Delta z$). ГУ второго рода моделируются путем наложения на парциальные функции «зеркальных отражений» их фрагментов, выходящих за границы системы, с последующим выравниванием пиковых значений всех осциллетов.



а) б)

Рис. 1. Одномерный осциллет с амплитудной нормировкой, взвешенный гауссовым окном в пространственной области (а) и его спектр в базисе собственных функций колебательной системы (б)

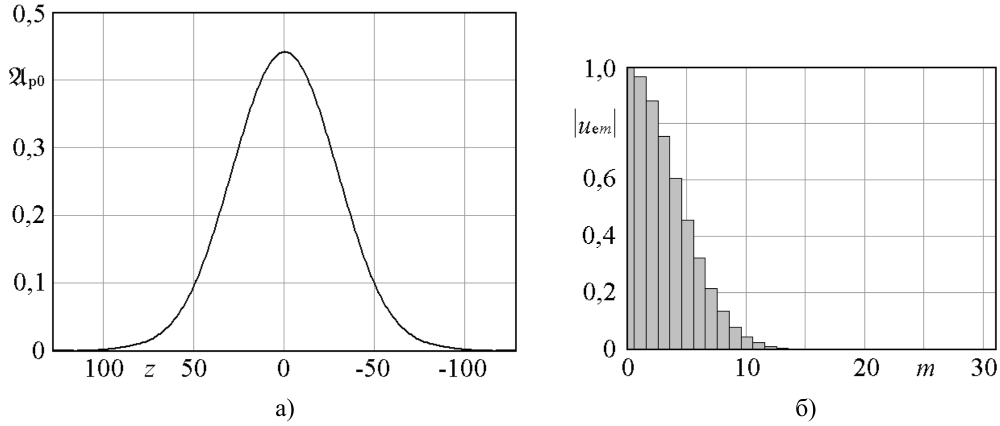


Рис. 2. Одномерный осциллет с усеченной гауссовой нормировкой (а) и его спектр в базисе собственных функций колебательной системы (б)

В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчетов собственных значений (квадратов собственных волновых чисел) для первой и второй колебательных систем соответственно. Структура таблиц идентична. Колонка 1 содержит номера собственных чисел m, колонка 2 – их точные значения k_{emm}^2, полученные аналитически. В колонках 3 и 4 приведены эти же собственные числа, вычисленные по формулам (2) – (7) для регулярно расположенных осциллетов первого и второго видов соответственно. Колонки 5 и 6 содержат собственные значения, вычисленные для стохастически локализованных осциллетов тех же видов.

Таблица 1.

Собственные значения колебательной системы с периодическими ГУ

1	2	3	4	5	6
0	+0.0000000	+0.0000000	+0.0000000	+0.0002085	+0.0000004
1	+0.0000376	+0.0000377	+0.0000377	+0.0002813	+0.0000377
2	+0.0000376	+0.0000377	+0.0000377	+0.0004925	+0.0000383
3	+0.0001506	+0.0001506	+0.0001506	+0.0005628	+0.0001507
4	+0.0001506	+0.0001506	+0.0001506	+0.0006074	+0.0001510
5	+0.0003388	+0.0003388	+0.0003388	+0.0007744	+0.0003389
6	+0.0003388	+0.0003388	+0.0003388	+0.0008561	+0.0003391
7	+0.0006024	+0.0006024	+0.0006024	+0.0012197	+0.0006024
8	+0.0006024	+0.0006024	+0.0006024	+0.0013508	+0.0006027
…	…	...	...	...	...
27	+0.0073793	+0.0081947	+0.0073789	+0.0082534	+0.0073946
28	+0.0073793	+0.0081947	+0.0073789	+0.0087584	+0.0074361
29	+0.0084711	+0.0092189	+0.0085766	+0.0092825	+0.0085294
30	+0.0084711	+0.0092189	+0.0085766	+0.0098372	+0.0087103
31	+0.0096383	+0.0096305	+0.0096353	+0.0101797	+0.0096803

Таблица 2.

Собственные значения колебательной системы с ГУ второго рода

1	2	3	4	5	6
0	+0.0000000	+0.0000000	+0.0000000	+0.0001792	+0.0000003
1	+0.0000094	+0.0000094	+0.0000094	+0.0002958	+0.0000096
2	+0.0000376	+0.0000377	+0.0000377	+0.0002989	+0.0000380
3	+0.0000847	+0.0000849	+0.0000849	+0.0005537	+0.0000852
4	+0.0001506	+0.0001509	+0.0001509	+0.0006537	+0.0001509
5	+0.0002353	+0.0002358	+0.0002358	+0.0006924	+0.0002358
6	+0.0003388	+0.0003395	+0.0003395	+0.0007008	+0.0003396
7	+0.0004612	+0.0004621	+0.0004621	+0.0009064	+0.0004622
8	+0.0006024	+0.0006037	+0.0006036	+0.0010897	+0.0006036
…	…	...	...	...	...
27	+0.0068616	+0.0075983	+0.0068723	+0.0079137	+0.0068871
28	+0.0073793	+0.0082163	+0.0073894	+0.0083977	+0.0073958
29	+0.0079158	+0.0087840	+0.0079417	+0.0091101	+0.0079668
30	+0.0084711	+0.0092492	+0.0085696	+0.0097242	+0.0085492
31	+0.0090453	+0.0095570	+0.0092720	+0.0099034	+0.0093444
32	+0.0096383	+0.0096624	+0.0096507	+0.0105096	+0.0096766

Анализ численных результатов позволяет заметить следующее. При регулярном расположении первый и второй виды осциллетов обеспечивают практически одинаковую точность расчета «длинноволновых» собственных значений. Однако погрешность вычисления «коротковолновых» корней для осциллетов первого вида значительно выше. Это связано с тем, что спектр такого осциллятора существенно «затекает» в область запрещенных значений волновых чисел $m > 16$ (рис. 1, б).

При стохастической локализации использование осцилляторов первого вида приводит к совершенно некорректным результатам. Осциллеты второго вида и в этом случае обеспечивают приемлемую точность расчета корней. Таким образом, специальную (например, усеченную гауссову) нормировку парциальных функций следует считать более перспективной. Взвешивание в пространственной области можно применять лишь ограниченно (например, для уменьшения разрывов функций $\nabla^2 A_{pn}$ на краях осциллета).

Выводы. На примере одномерной распределенной колебательной системы в работе исследована одна из проблем матричной электродинамики – обеспечение финитности парциальных осцилляторов в пространственной области. Выбран оптимальный метод – применение усеченной гауссовой нормировки. Среди направлений дальнейших исследований следует выделить разработку методов учета ГУ в двух- и трехмерных ЭС с произвольной формой границ путем численного интегрирования матричной задачи Коши для парциальных функций, а также создание «интеллектуальных» алгоритмов размещения осциллетов, наподобие тех, которые имеются для метода конечных элементов.

Предложен матричный подход к решению электродинамических задач. Его особенность состоит в трактовке электродинамической системы (ЭС) как колебательной с конечным числом степеней свободы. ЭС рассматривается как совокупность локализованных в пространстве парциальных осцилляторов (осциллетов).

A matrix approach for solution of electrodynamic problems is offered. Its specificity consists in the treatment of an electrodynamic system (ES) as an oscillating system with a finite number of the degrees of freedom. The ES is considered as a set of spatially localized partial oscillators (oscillets).

Библиографические ссылки

1. **Sadiku M. N. O.** Numerical Techniques in Electromagnetics. Boca Raton, FL, 2001. 750 p.
2. **Вихман Э.** Квантовая физика: Пер. с англ. – М., 1986. – 392 с.
3. **Григорьев А. Д.** Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. / А. Д.Григорьев, В. Б. Янкевич // – М., 1984. – 248 с.
4. **Грицунов А. В.** Разложение нестационарных электромагнитных потенциалов по парциальным функциям электродинамической системы // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2006, – Т. 49, № 7. – С. 10–20.
5. **Грицунов А. В.** Методы расчета нестационарных негармонических полей в направляющих электродинамических системах // Радиотехника и электроника. – 2007, Т. 52, № 6. – С. 645–661.
6. **Стрелков С. П.** Введение в теорию колебаний. – М., 1964. – 440 с.
7. **Василенко Н. В.** Теория колебаний. – К., 1992. – 430 с.
8. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы. – М., 1986, – 512 с.

Надійшла до редколегії 25.12.07