СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ВИБРАЦИОННЫХ ИСПЫТАНИЙ АППАРАТУРЫ АВТОМАТИКИ

А. Е. Божко, Ю. Н. Соколов

Харьков

В настоящее время разработка методов вибрационных испытаний на надежность аппаратуры автоматики ведется в направлении воспроизведения на испытательных стендах вибровоздействий, подобных эксплуатационным [1, 2, 3]. Такой подход к методике испытаний аппаратуры требует изучения вибраторов испытательных стендов как объектов управления, работающих в динамических режимах. При отработке системой вибрационного стенда сигнала управления, представляющего собой электрический аналог записанных на магнитную ленту эксплуатационных вибраций, необходимо, чтобы были малые искажения импульсных вибронагрузок, что, в свою очередь, означает хорошее воспроизведение высоких частот или обеспечение достаточного быстродействия. Для этой цели наиболее подходят вибростенды электродинамического типа [3, 4].

Максимальное быстродействие вибратора можно осуществить на основе синтеза оптимального управления. Известно [5], что общая задача о нахождении оптимального по быстродействию переходного процесса в непрерывных системах может быть решена с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Принцип максимума является необходимым и достаточным признаком оптимального процесса для линейных систем и необходимым признаком оптимальности для нелинейных систем.

Следуя принципу максимума, решим задачу об оптимальном управлении электродинамическим вибрационным стендом, описываемом системой уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2; \\ \dot{X}_2 &= X_3; \\ \dot{X}_3 &= a_{30}X_1 + a_{31}X_2 + a_{32}X_3 + bU, \end{aligned} \tag{1}$$

где X_1, X_2, X_3 — фазовые координаты;

U — управление;

a_{30}, a_{31}, a_{32}, b — коэффициенты, включающие в себя параметры стенда.

Примем граничные условия

$$\begin{aligned} &t = 0;\ \overline{X}_0 (X_{10},\ X_{20},\ X_{30}): \\ &t = \mathrm{T};\ \overline{X}_\mathrm{T} (0,\ 0,\ 0). \end{aligned} \tag{2}$$

Требуется найти такое управление $U(t)$, чтобы решение системы уравнений (1) удовлетворяло граничным условиям (2) и обращало в минимум функционал

$$J = \int_0^\mathrm{T} \varphi (X) = \min,\ \ \varphi (X) = 1.$$

Согласно принципу максимума, рассмотрим сопряженную систему уравнений

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial f_\alpha (\overline{X},\ U)}{\partial x_i} \Psi_\alpha,\ \ (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{3}$$

где Ψ_i — вспомогательные переменные;

f_α — правые части уравнений (1).

Если при некотором допустимом управлении $U(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ имеем траекторию $\overline{X}(t)$ системы (1) с граничными значениями (2), то система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt} &= -a_{30}\Psi_3; \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= -\Psi_1 - a_{31}\Psi_3; \\ \frac{d\Phi_3}{dt} &= -\Psi_2 - a_{32}\Psi_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Эта система уравнений линейна и однородна. Поэтому при любых начальных условиях для Ψ_i она допускает единственное решение $\overline{\Psi}(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, определяемое на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, на котором определены управление $U(t)$ и траектория $X(t)$.

Как и решение $\overline{X}(t)$ системы (1), решение (4) состоит из непрерывных функций $\Psi_i(t)$, имеющих всюду, кроме конечного числа точек (точек разрыва управления $U(t)$), непрерывные производные по параметру t.

Рассмотрим функцию (гамильтониан)

$$H = \sum_{\alpha=1}^{3} \Psi_\alpha f_\alpha(\overline{X}, U). \tag{5}$$

Тогда системы уравнений (1) и (4) можно записать в следующем виде:

$$\text{а)}\ \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_i}; \tag{6}$$

$$\text{б)}\ \frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Таким образом, взяв произвольное допустимое (кусочно-непрерывное) управление $U(t)$ и начальные условия $\overline{X}_0(t)$, можно найти соответствующую траекторию $\overline{X}(t)$. После этого находим решение $\Psi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ из уравнений (6).

При фиксированных значениях $\overline{\Psi}$ и $\overline{X}$ функция H становится функцией параметра U.

Верхнюю грань значений этой функции обозначим

$$M(\overline{\Psi}, \overline{X}) = \sup H(\overline{\Psi}, \overline{X}, \overline{U}), \tag{7}$$

где U — область допустимых значений управления.

Если верхняя грань значений непрерывной функции H достигается в некоторой точке области управления U, то $M(\overline{\Psi}, \overline{X})$ есть максимум значений функции H при фиксированных $\overline{\Psi}$ и $\overline{X}$. Согласно принципу максимума, для оптимальности управления $U(t)$ и траектории $\overline{X}(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\overline{\Psi}(t)$, соответствующей функциям $U(t)$ и $\overline{X}(t)$, чтобы

1) при любом t $0 \leqslant t \leqslant T$, функция $H(\overline{\Psi}(t), \overline{X}(t), U)$ переменного $U \in V$ достигала в точке $U = \overline{U}(t)$ максимума, т. е.

$$H(\overline{\Psi}(t), \overline{X}(t), \overline{U}(t)) = M(\overline{\Psi}(t), \overline{X}(t)); \tag{8}$$

2) в конечный момент времени T выполняется условие

$$M(\overline{\Psi}(T), \overline{X}(T)) = 0. \tag{9}$$

Данные соотношения (8) и (9) справедливы при [5]

$$U = \operatorname{sign} \Psi_3. \tag{10}$$

Итак, для решения задачи о максимальном быстродействии надо из уравнений (1) и (4) найти решение $X_i(t)$ и $\Psi_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$ и подобрать U, максимизирующее гамильтониан H в каждой точке оптимальной траектории. Для этого надо знать в нашем случае шесть начальных условий

$$(X_{10},\ X_{20},\ X_{30},\ \Psi_1(0),\ \Psi_2(0),\ \Psi_3(0)).$$

Начальные условия $\Psi_i(0)$ $(i = 1, 2, 3)$ необходимо подобрать таким образом, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям (2) на конце оптимальной траектории.

Основное затруднение в этом случае — выбор функций $\Psi_i(0)$ $(i = 1, 2, 3)$. Общих правил для выбора начальных координат вектора Ψ не существует. Однако их можно найти методом последовательной подстановки, т. е. вначале необходимо задаться любым значением вектора $\bar{\Psi}(0)$ и решить уравнение (4). В результате получаем функцию $\Psi_3(t)$. Затем подставляем ее в выражение (10), которое, в свою очередь, подставляем в уравнение (1) и находим их решение. После этого получаем фазовую траекторию R_1 (рисунок), которая в общем случае не проходит через начало координат (значение вектора $\bar{X}(0)$ считаем известным). Так как траектория R_1 не прошла через начало координат, то следует задаться другим значением $\bar{\Psi}(0)$, пока траектория R^* не пройдет через начало координат.

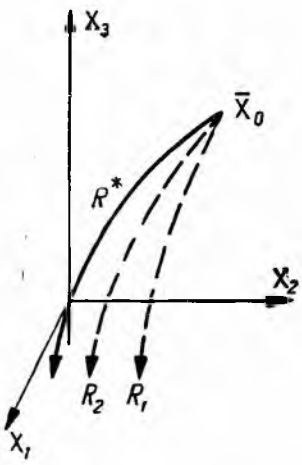


Рис. Траектория движения координат системы вибратора.

Управление

$$U = \operatorname{sign} \Psi_3^*, \tag{11}$$

соответствующее этой траектории, будет искомым оптимальным управлением.

Для определения функции Ψ_3, входящей в оптимальное управление (10), решим сопряженную систему уравнений (4).

Продифференцируем третье уравнение этой системы:

$$\frac{d^2\Psi_3}{dt^2} = -\frac{d\Psi_2}{dt} - a_{32}\frac{d\Psi_3}{dt}. \tag{12}$$

Подставляя в (12) $\frac{d\Psi_2}{dt}$ из (4), получим

$$\frac{d^2\Phi_3}{dt^2} = \Psi_1 + a_{31}\Psi_3 - a_{32}\frac{d\Psi_3}{dt}. \tag{13}$$

Продифференцировав уравнение (13) и учтя первое уравнение системы (4), получим

$$\frac{d^3\Psi_3}{dt^3} = -a_{30}\Psi_3 + a_{31}\frac{d\Psi_2}{dt} - a_{32}\frac{d^2\Psi_3}{dt^2}. \tag{14}$$

Характеристическое уравнение выражения (14)

$$\lambda^3 + a_{32}\lambda^2 - a_{31}\lambda + a_{30} = 0 \tag{15}$$

имеет корни λ_1, λ_2, λ_3. Причем два корня λ_1, λ_2 — комплексно-сопряженные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ (электродинамический стенд представляет собой после-

довательное соединение апериодического и колебательного звеньев по отношению к сигналу управления [3, 4]). Решим уравнение (15). Введем новую переменную [правило Кардана]

$$Y = \lambda + \frac{a_{32}}{3}.$$

Тогда уравнение (15) принимает вид

$$Y^3 + 3\rho Y + 2q = 0, \tag{16}$$

где

$$3\rho = -\frac{a_{32}^2}{3} - a_{31}; \quad 2q = -\frac{2a_{32}^2}{27} + \frac{a_{31}a_{32}}{3} + a_{30}.$$

Применяя формулу Кардана к уравнению (16), найдем корни

$$Y_1 = U_1 + V; \quad Y_2 = \varepsilon_1 U_1 + \varepsilon_2 V; \quad Y_3 = \varepsilon_2 U_1 + \varepsilon_1 V,$$

где

$$U_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + \rho^3}}; \quad V = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + \rho^3}};$$

ε_1, ε_2 — корни уравнения $X^2 + X + 1 = 0 \left(\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Тогда корни характеристического уравнения (15)

$$\lambda_1 = U_1 + V - \frac{a_{32}}{3}; \quad \lambda_2 = \varepsilon_1 U_1 + \varepsilon_2 V - \frac{a_{32}}{3}; \quad \lambda_3 = \varepsilon_2 U_1 + \varepsilon_1 V - \frac{a_{32}}{3},$$

Решение уравнения (14) имеет вид

$$\Psi_3 = A_1 e^{\lambda_3 t} + A_2 e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + A_3, \tag{17}$$

где A_1, A_2, A_3 — определяются по способу вариации значений вектора $\overline{\Psi}(0)$;

α, ω, φ — величины, комбинации которых соответствуют параметрам электродинамического вибростенда.

На основании уравнения (10) оптимальное управление в функции времени представляется как

$$U = \operatorname{sign}[A_1 e^{\lambda_3 t} + A_2 e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + A_3]. \tag{18}$$

Таким образом в результате работы получен алгоритм оптимального управления системой электродинамического вибрационного испытательного стенда.

В общем случае величины, входящие в выражение (18), зависят от начальных координат $X_i(0)$ $(i = 1, 2, 3)$ и параметров вибростенда. Поэтому с точки зрения физического объяснения переходного процесса стенда при оптимальном управлении следует отметить тот факт, что при переходе траекторий $\overline{X}(t)$ через начало координат, т. е. через новое установившееся состояние платформы стенда, управление U меняет знак, в целом представляя собой релейную функцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Первозванский. Случайные колебания. Изд-во «Мир», 1964.
2. А. Е. Божко. Методы экспериментального определения надежности радиоэлектронной аппаратуры, работавшей в условиях вибрационных воздействий. Тр. 2-й Всесоюзной научно-технической конференции по проблемам повышения надежности... Изд-во ЛЭТИ, 1968.
3. А. Е. Божко. Исследование автоматических систем вибрационных испытаний приборов и устройств автоматики. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1968.
4. Ю. И. Иориш. Виброметрия. Машгиз, 1963.
5. В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.