



ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

Пичугина О. С., Яковлев С. В.*

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Задачи оптимизации на комбинаторных множествах различной структуры вызывают постоянный интерес. К ним относятся задачи евклидовой комбинаторной оптимизации, в которых комбинаторные объекты отображаются в арифметическое евклидово пространство, образуя так называемые евклидовые комбинаторные множества [1]. Современные исследования специальных классов евклидовых комбинаторных множеств и функций, заданных на этих множествах, освещены, в частности, в [2,3].

В докладе вводятся понятия евклидовых комбинаторных конфигураций и на их основе изучаются свойства соответствующих задач оптимизации.

К. Берж определил комбинаторную конфигурацию как отображение некоторого конечного абстрактного множества в конечное строго упорядоченное множество [4]. Пусть \square - конечное пространство изолированных точек. Обозначим $J_n = \{1, \dots, n\}$. В соответствии с [4] множество J_n назовем нумерующим, а пространство \square - образующим. Под комбинаторной конфигурацией будем понимать триаду

$$(\psi, Z, \Omega), \quad (1)$$

где $\psi : J_n \rightarrow Z$ - гомоморфизм, удовлетворяющий заданной системе ограничений Ω , а Z - базовое множество, порожденное \square .

Сформулируем задачу оптимизации на комбинаторных конфигурациях. Пусть Π - множество комбинаторных конфигураций вида (1), на котором задан функционал $\xi : \Pi \rightarrow R^1$. Требуется найти

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi} \xi(\pi), \quad (2)$$

Установим взаимно-однозначное соответствие $\varphi : \Pi \rightarrow E$ между комбинаторными объектами π пространства Π и точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ некоторого множества $E \subset R^n$, положив $x = \varphi(\pi)$, $\pi = \varphi^{-1}(x)$. Заметим при этом, что множества, для которых существует такое отображение, названы евклидовыми комбинаторными множествами [1]. Пусть $\pi \in \Pi$, сформируем образ этой конфигурации $x = \varphi(\pi) \in E \subset R^n$. Положим, что $Z = \square = \{z_1, \dots, z_m\}$, тогда тройка (1) обращается в комбинаторную конфигурацию (ψ, \square, Ω) . Осуществим биекцию ξ множества \square на числовое множество $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, тогда тройка (ϕ, \square, Ω) , где $\phi = \xi \circ \psi : J_n \rightarrow A$, также будет некоторой комбинаторной конфигурацией $y = \xi(\pi)$, компонентами которой, в отличие от π , будут действительные числа. Теперь конфигурации $y = [y_1, \dots, y_n]$ легко поставить в соответствие точку $x \in R^n$ по правилу $x_i = y_i$, $i \in J_n$, иначе говоря, тождественно отобразить компоненты y



на координаты вектора $x - I: \{y_i\}_i \rightarrow \{x_i\}_i$. Композиция отображений I, ψ и определяет искомое φ для конкретной евклидовой комбинаторной конфигурации x , а совокупность таких отображений для всех комбинаторных конфигураций $\pi \in \Pi$ и будет искомым евклидовым комбинаторным множеством E . Пусть функция $f: E \rightarrow R^1$ такова, что $f(x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$ для всех $x \in E$. Тогда задача (2) может быть эквивалентно сформулирована в виде: найти

$$x^* = \arg \min_{x \in E} f(x), \quad (3)$$

где $E = \varphi(\Pi)$ – образ множества Π в R^n .

Как видно, как исходное множество Π , так и его образ E в R^n являются евклидовыми комбинаторными множествами. При этом Π состоит из объектов произвольной природы, в то время как E – из векторов R^n . Поэтому задача (3) имеет явное преимущество по сравнению с (2), состоящее в возможности применения геометрических свойств E и многогранника $P = \text{conv } E$, а также свойств целевой функции на них при решении задачи (3). Эта задача представляет собой задачу евклидовой комбинаторной оптимизации [1], а элементы E мы назовем евклидовыми комбинаторными конфигурациями, отображая в этом названии их комбинаторный характер и связь с точками R^n .

Заметим, что требования конечности и строгой упорядоченности образующего пространства обуславливаются, прежде всего, задачами, которые возникают при перечислении и построении различных классов конфигураций. В задачах же комбинаторной оптимизации эти условия могут быть ослаблены без потери сущности понятия конфигурации, что и отображено в понятии комбинаторного объекта [5], в котором условия конечности и строгой упорядоченности образующего пространства ослаблены. Задачу (2) легко переформулировать на, вообще говоря, несчетном множестве комбинаторных объектов и осуществить погружение в R^n по вышеприведенному правилу, получив в результате множество образов, называемых евклидовыми комбинаторными объектами. Тогда эквивалентная задача (3) будет представлять собой задачу евклидовой комбинаторной оптимизации на евклидовом комбинаторном множестве евклидовых комбинаторных объектов.

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с.

2. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis. – 2016, 52(6), pp. 921-930.

3. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representation techniques in combinatorial optimization // IOSR Journal of Mathematics. - 2017, 13(2), Ver. V, pp.12-25.

4. Berge C. Principes de combinatoire. – Paris: Dunod, 1968. – 146 p.

5. Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Определение и исследование комбинаторных пространств // Теорія оптимальних рішень. – 2010. – № 9. – С. 17–25.