УДК 681.51.015

В. В. ШЛЯХОВ, канд. техн. наук, *А. И. ПРЕСНЯКОВ, П. П. ТАРАСОВ*

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СРАВНЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ МНОЖЕСТВА ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

В настоящее время большое внимание уделяется моделированию процесса распознавания человеком цветовых оттенков и построению приборов для классификации предметов по их цветовым характеристикам. Построение математической модели различения цветов предполагает идентификацию и определение параметров сенсорной системы — орган зрения человека. Традиционные методы идентификации существенным образом используют экспериментальные данные о входном и выходном сигналах системы [1]. В ряде случаев, когда измерение сигнала на выходе либо невозможно, либо чрезвычайно затруднено, единственно приемлемым способом идентификации является метод сравнения. Математическое описание метода сравнения связано с изучением различных бинарных предикатов [2].

При изучении произвольных линейных систем наиболее естественно интерпретировать множество входных сигналов как некоторую алгебраическую систему, наделенную различными бинарными операциями. Примем за подобную алгебраическую систему линейное пространство над произвольным полем.

Назовем конусом K абстрактного линейного пространства L собственное подмножество $K \subset L$, удовлетворяющее свойствам: если $x, y \in K$, то $x+y \in K$; существует $\lambda \in G$, такое, что если $\lambda x \in K$ и $-\lambda x \in K$, то $x = 0_L$ (0_L — ноль линейного пространства L).

Рассмотрим предикат $T(x, y)$ вида

$$T(x, y) = D(Fx, Fy), \tag{1}$$

где $Fx = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, а $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — линейно независимые функционалы над L, причем $\dim(\ker F) < \dim L$, D — предикат равенства на $G^n \times G^n$. Известно, что предикат вида (1) является предикатом n-мерной линейности тогда и только тогда, когда выполняется условие рефлексивности, симметричности, транзитивности, аддитивности, однородности, n-мерности. Нас будет интересовать случай, когда предикат $T(x, y)$ вида (1) задан не на всем L, а только на конусе K. На первый взгляд кажется, что предикат $E(x, y) = T(x, y)/_k$ удовлетворяет перечисленным выше свойствам. Однако имеется целый ряд различий. Рассмотрим свойство n-мерности, переделав его для случая конуса: существует набор векторов $\{e_i\}_{i-1}^n \in K$ такой, что для любого $x \in K$ найдется единственный набор элементов $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n \in G$, для которого $E(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i) = 1$. Здесь возникает трудность. Действительно, необходимо как-то регламентировать элементы $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$, чтобы линейная комбинация принадлежала конусу K. Поэтому условие n-мерности требует изменения. Возьмем какую-либо линейно независимую систему из n элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \in K / \ker F$. Это всегда возможно потому что $\dim(K/\ker F) = \dim L$. Составим систему уравнений для произвольного фиксированного $x \in K$

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, e_i. \tag{2}$$

Примем к равенству (2) оператор F и запишем в координатном виде

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, f_k(e_i), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Система (3) имеет единственное решение относительно коэффициентов $b_i(x)$ (оператор F переводит линейно независимую систему $\{e_i\}_{i=1}^n \in K \setminus \ker F$ в линейно независимую). Кроме того, не может для любого выполняться $b_i(x)e_i \bar{\in} K$, поскольку $x \in K$, $\{e_i\}_{i=1}^n \in K$. С другой стороны, равенство (2) не может иметь место при всех $\{b_i(x)e_i\}_{i=1}^n \in K$. Это означает, что множество индексов распадается на два подмножества $I(x) = \{i : b_i(x)e_i \bar{\in} K\}$ и множество $\overline{I}(x) = I \setminus I(x)$. Обозначим

$$a_i(x) = \begin{cases} b_i(x), & i \bar{\in} I(x) \\ -b_i(x), & i \in I(x), \end{cases} \tag{4}$$

очевидно $a_i(x)$ является решением системы.

$$f_k(x) + \sum_{i \in I(x)} a_i(x)\, f_k(e_i) = \sum_{i \in \overline{I}(x)} a_i(x)\, f_k(e_i), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Кроме того, $a_i(x)e_i \in K$ для любого i. Система (5) эквивалентна равенству

$$E\Big(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x)\, e_i, \sum_{i \in \overline{I}(x)} a_i(x)\, e_i\Big) = 1. \tag{6}$$

Теперь установлено, что предикат $E(x, y)$ удовлетворяет свойству n-мерности, если существует такая система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n$, что для любого $x \in K$ найдется единственный набор $\{a_i(x)\}_{i=1}^n \in G$, $\{a_i \times \times (x) e_i\}_{i=1}^n \in K$ и единственное собственное подмножество индексов $I(x)$, для которого выполнено соотношение (6). Сформулируем свойство однородности. Если $E(x, y) = 1$, то либо $E(\lambda x, \lambda y) = 1$, либо $E(-\lambda x, -\lambda y) = 1$ для любых x, $y \in K$ и $\lambda \in G$, причем, если $\lambda x \in K$, то $I(x) = I(\lambda x)$. Аддитивность. При любых x x', y, $y' \in K$ из равенства $E(x, y) = E(x', y') = 1$ вытекает $E(x + x', y + y') = 1$ и $E(x + y', y + x') = 1$. Назовем предикат полуаддитивным, если для любых x, y, $z \in K$ из равенства $E(x + z, y + + z) = 1$ следует $E(x, y) = 1$. В дальнейших рассуждениях будет существенно задействовано одно утверждение, докажем его.

Лемма. *Пусть на конусе K линейного пространства L задан линейный функционал $f(x)$, тогда его можно однозначно продолжить до линейного функционала на всем пространстве L.*

Доказательство. Пусть $y \in L$, зададим

$$x_1 = \begin{cases} y + c, & y \in K \\ c, & -y \in K, \quad c \in K, \end{cases} \qquad x_2 = \begin{cases} -y + c, & -y \in K \\ c, & y \in K. \end{cases}$$

Заметим, что построенные x_1, $x_2 \in K$, при этом очевидно выполняется $y = x_1 - x_2$. Положим $f(y) = f(x_1) - f(x_2)$. Это определение корректно, так как если $y = x_1 - x_2 = x_1' - x_2'$, то, $x_1 + x_2' = x_2 + x_1'$. Обе суммы принадлежат конусу на котором функционал аддитивен, значит $f(x_1) + f(x_2') = f(x'_1) + f(x_2)$ или $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1') - f(x_2')$.

или $f(x_1) - f(x_2) = f(x_2') - f(x_2')$. Очевидно, что построенное продолжение однозначно. Фактически показано, что конус является воспроизводящим множеством. Проверим свойство однородности

$$f(\lambda y) = f(\lambda(x_2 - x_1)) = f(\lambda x_1 - \lambda x_2) = f(\lambda x_1) + f(-\lambda x_2).$$

В силу того, что функционал однороден на конусе, получим

$$\lambda f(x_1) - \lambda f(x_2) = \lambda(f(x_1) - f(x_2)) = \lambda f(x_1 - x_2) = \lambda f(y).$$

Продолженный функционал аддитивен и однороден, определен на L, значит он линеен. Лемма доказана.

Сформулируем теперь условия существования предиката n-мерной линейности заданного на конусе абстрактного линейного пространства.

Теорема. Для того чтобы предикат $E(x, y)$, заданный на $K \times \times K \subset G^n \times G^n$, был предикат n-мерной линейности, необходимо и достаточно выполнение свойств аддитивности, полуаддитивности, n-мерности и однородности.

Доказательство. *Необходимость.* Предикат $E(x, y)$ имеет вид $E(x, y) = D(Fx, Fy)$, где $F: K \to G^n$, $Fx = (f_1(x),$

$f_2(x), \ldots, f_n(x))$, $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ — линейные функционалы над K, $\dim(\ker F) < n$. Из $E(x, y) = E(x', y') = 1$ следует $Fx = Fy$, $Fx' = Fy'$. Складывая почленно эти равенства, получим $F(x + x') = F(y + y')$, т. е. $D(F(x + x'), F(y + y')) = 1$, аналогично $D(F(x + y'), F(y + x')) = 1$. Свойство аддитивности доказано. Если $E(x + z, y + z) = 1$, то $F(x + z) = F(y + z)$, или $Fx = Fy$, значит $E(x, y) = 1$. Выполнено условие полуаддитивности. Свойство однородности следует из однородности оператора F и из того обстоятельства, что системы

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x) f_k(e_i), \quad \lambda f_k(x) = \sum_{i=1}^n b_i(\lambda x) f_k(e_i),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

имеют пропорциональные решения. Это означает, что верно равенство $I(x) = I(\lambda x)$. Необходимость свойства n-мерности доказана ранее при формулировке этого свойства.

Достаточность. Пусть предикат $E(x, y)$ удовлетворяет свойствам перечисленным в теореме. Доказательство проведем в три этапа.

1. Покажем, что введенные в определении n-мерности функционалы $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$, $\{b_i\{x\}_{i=1}^n$ — линейны (аддитивны и однородны). Из n-мерности и аддитивности при произвольных $x, y \in K$ имеем

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i), \quad \sum_{i \in \overline{I}(x)} a_i(x) e_i) = 1; \tag{7}$$

$$E(y + \sum_{i \in I(y)} a_i(y) e_i, \quad \sum_{i \in \overline{I}(y)} a_i(y) e_i) = 1; \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E(x + y + &\sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (a_i(x) + a_i(y)) e_i + \sum_{i \in I(x) \setminus I(y)} a_i(x) e_i + \\ &+ \sum_{i \in I(y) \setminus I(x)} a_i(y) e_i; \sum_{i \in I(x) \cap \overline{I}(y)} (a_i(x) + a_i(y)) e_i + \\ &+ \sum_{i \in I(x) \setminus I(y)} a_i(y) e_i + \sum_{i \in I(y) \cap I(x)} a_i(x) e_i) = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Через $I(x)$ обозначено множество индексов, равно и использовано равенство $I(x) \setminus I(y) = \overline{I}(y) \setminus \overline{I}(x)$.

Введем теперь следующие множества:

$$N_1 = \{i \in I(x) \setminus I(y) : a_i(x) e_i \in K, \ -a_i(y) e_i \in K\};$$

$$N_2 = \{i \in I(x) \setminus I(y) : a_i(y) e_i \in K, \ -a_i(x) e_i \in K\};$$

$$N_3 = \{i \in I(y) \setminus I(x) : a_i(y) e_i \overline{\in} K, \ -a_i(x) e_i \in K\};$$

$$N_4 = \{i \in I(y) \setminus I(x) : a_i(x) e_i \in K, \ -a_i(y) e_i \in K\}.$$

Воспользуемся полуаддитивностью, тогда равенство (9) примет вид

$$E(x+y+\sum_{i\in I(x)\cap I(y)}(a_i(x)+a_i(y))e_i+\sum_{i\in N_1}((a_i(x)-a_i(y))e_i+$$
$$+\sum_{i\in N_3}((a_i(y)-a_i(x))e_i; \qquad (10)$$
$$\sum_{i\in \bar I(x)\cap \bar I(y)}(a_i(x)+a_i(y))e_i+\sum_{i\in N_2}(a_i(y)-a_i(x))e_i+$$
$$+\sum_{i\in N_4}(a_i(x)-a_i(y))e_i)=1.$$

Заметим, что множества $I(x)\cap I(y)$, $\bar I(x)\cap \bar I(y)$, $\{N_i\}_{i=1}^4$ — непересекающиеся и в объединении дают все множество индексов I. В этом случае из n-мерности и равенства (10) вытекает

$$I(x+y)=I(x)\cap I(y)\cup N_1\cup N_3; \qquad (11)$$

$$a_i(x+y)=\begin{cases} a_i(x)+a_i(y), & i\in I(x)\cap I(y)\cup \bar I(x)\cap \bar I(y)\\ a_i(x)-a_i(y), & i\in N_1\cup N_4\\ a_i(y)-a_i(x), & i\in N_2\cup N_3.\end{cases}$$

Так как $b_i(x)=\begin{cases} a_i(x), & i\in I(x)\\ -a_i(x), & i\in \bar I(x)\end{cases}$, рассмотрев $b_i(x+y)$, получим $b_i(x+y)=b_i(x)+b_i(y)$. Действительно, пусть $i\in I(x)\cap I(y)$, тогда $i\in I(x+y)$ и $b_i(x+y)=-a_i(x+y)=-a_i(x)-a_i(y)=$ $=b_i(x)+b_i(y)$. Допустим $i\in N_2$, значит $i\in \bar I(x+y)$, тогда $b_i(x+y)=a_i(x+y)=a_i(y)-a_i(x)=b_i(y)+b_i(x)$, так как $i\in I(x)\diagdown I(y)\subset I(x)$ в силу определения N_2. Рассмотрев подобным образом все шесть случаев, легко убедиться, что при любом индексе выполняется равенство (13), причем для произвольных. Отметим еще одно свойство функционалов $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$. На основе равенства (7) и свойства однородности получим

$$E(\lambda x+\sum_{i\in I(x)}\lambda a_i(x)e_i,\quad \sum_{i\in \bar I(x)}\lambda a_i(x)e_i)=1. \qquad (14)$$

Кроме того, запишем свойство n-мерности для элемента $\lambda x\in K$

$$E(\lambda x+\sum_{i\in I(\lambda x)}a_i(\lambda x)e_i,\quad \sum_{i\in \bar I(\lambda x)}a_i(\lambda x)e_i)=1. \qquad (15)$$

Сравнивая равенства (14), (15) и учитывая, что $I(x)=I(\lambda x)$ при $\lambda x\in K$, получаем свойство однородности функционалов $a_i(x)$, а значит и $b_i(x)$, $i=1, 2, ..., n$. Теперь ясно, что функционалы $\{b_i(x)\}_{i=1}$ удовлетворяют условиям леммы и их можно однозначно продолжить до линейных функционалов, определенных на всем L.

2. Покажем, что предикат $E(x, y)$ обладает также свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности. Из равенства (7) и свойства аддитивности получаем $E(x+\sum_{i\in I}a_i(x)e_i,\ x+\sum_{i\in I}a_i(x)e_i=$ $=1$. Отсюда, применяя полуаддитивность, выводим $E(x, x)=1$. Пусть $E(x, y)=1$, кроме того $E(y, y)=1$ (по только что доказанному), тогда по аддитивности $E(y+y,\ x+y)=1$. Используя полуаддитивность, имеем $E(y, x)=1$. Аналогично доказывается транзитивность предиката.

3. Покажем, что предикат имеет вид $E(x, y)=D(Fx,\ Fy)$.

Пусть $E(x, y)=1$. Используя перечисленные выше свойства, запишем следующие равенства: $E(x+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i,\ y+\sum_{i\in I(x)} a_i \times$ $\times (x)e_i)=1$, $E(x+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i,\ \sum_{i\in \overline{I}(x)} a_i(x)e_i)=1$. Применив аддитивность и полуаддитивность, имеем $E(y+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i,$ $\sum_{i\in \overline{I}(x)} a_i(x)e_i)=1$. Из единственного набора $I(x)$ и коэффициентов $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ получим, что $a_i(x)=a_i(y)$ и $I(x)=I(y)$. Это в свою очередь, означает, что $b_i(x)=b_i(y)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Рассуждения можно провести и в обратном порядке, тем самым установлен

$$E(x,\ y)=D(Fx,\ Fy),\ x,\ y\in K,\ F:K\to G^n;$$
$$Fx=\{b_1(x),\ b_2(x), \ldots,\ b_n(x)\},\ \{b_i(x)\}_{i=1}^n$$

набор линейно независимых функционалов. Заметим, что $\dim(\ker F)<\dim K=\dim L$, в противном случае оператор был бы нулевым, что противоречит условию теоремы. Доказательство завершено.

Теорема устанавливает общий вид линейной системы и свойства, которым она должна удовлетворять, если множество входных сигналов представляет собой конус абстрактного линейного пространства. При этом указанные свойства могут проверяться с высокой степенью точности.

Чаще всего в теории цветового зрения используется гильбертово пространство $L_2\ [c, d]$. В этом случае линейные функционалы $b_1(x), \ldots, b_n(x)$ будут иметь следующий вид:

$$b_i(x)=\int_c^d K_i(\tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

где $K_i(\tau)$ — спектральные характеристики идентифизируемой системы. Приведенная выше методика была использована авторами при изучении различных свойств цветового зрения человека и для совершенствования работы автоматических устройств классификации цветовых оттенков [3]. Данная модель при $n=3$ наиболее адекватно описывает процедуру распознавания цветов органом зрения человека, это позволяет более точно найти спектральные характеристики светофильтров объективных калориметров. Усовершенствованная методика построения объективных калориметров, предложенная авторами, приведена в работе [3].

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Х., 1987. С. 142. 2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М., 1971. С. 271. 3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1965. С. 520.

Поступила в редколлегию 03.05.89

УДК 510.62

В. А. ЧИКИНА, канд. техн. наук, *Ю. В. КОВАЛЕВ*

ДЕКОМПОЗИЦИЯ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Простой и эффективный метод декомпозиции уравнений алгебры конечных предикатов (АКП) путем введения вспомогательных переменных предусматривает обозначение выделенных участков формул произвольных переменных и запись полученных предикатов в виде системы уравнений [1]. При схемном решении [2] возникает самостоятельная задача построения схем, соответствующих заданным уравнениям из обратимых элементов, которые могут реализовывать отношения на две и более переменные.

Построение обратимых элементов на четыре и более переменных затруднено из-за высокой сложности получаемых подсхем. Реализация же их на два и три входа достаточно проста.

В данной работе предлагается процедура декомпозиции на бинарные и тернарные отношения, которые могут быть реализованы простейшими обратимыми элементами на два или три входа.

Полагаем, что декомпозируемое уравнение задается произвольной скобочной формой. Никаких иных ограничений на структуру формулы не налагается. Пусть исходное уравнение представлено строкой символов из алфавита σ и имеет произвольную длину, выходные данные — также строки символов. В каждой такой строке будет записано одно-, двух- или трехместное уравнение.

Процесс декомпозиции разделим на три этапа [3]: лексический анализ исходной строки с целью построения структуры декомпозируемого уравнения; синтаксический анализ правильности построения структуры уравнения; вычленение простейших отношений и их запись в выходной регистр.

Остановимся подробно на каждом из этих этапов.

Результатом этапа лексического анализа является список лексем. Введем переменные:

входной регистр $S=\{S_1, S_2, ..., S_i, ..., S_{k_S}\}$, где S_i — i-я пе-