МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Роговой Н.С.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36)
E-mail: rogovoy.nikita@mail.ru

We model process of mixing of a viscous incompressible liquid in rectangular area when lateral walls are at rest, and the top and bottom walls are moved by turns or with overlapping. To find analytical expression for a stream function, a structural-variational method of R-functions was used. As coordinate functions was taken two-dimensional finite splines. Process is modelled at different geometrical parameters of area. Movement of particles of a liquid is modelled. We find and investigate periodic points: areas of intensive mixing. Calculations were made using the mathematical package MATHEMATICA 7.

Изучение механизмов перемешивания и управления им применяется в различных областях науки и техники: химической и пищевой индустрии, геологии, океанологии, физиологии и т.д. Поэтмоу интерес к аналитическим и численным исследованиям в этой области постоянно возрастает. При этом моделируются квазипериодические течения, в которых возможно развитие хаоса.

Рассматривается задача течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости. Боковые стенки полости находятся в состоянии покоя, а верхняя и нижняя движутся со скоростями $v_{top}(t)$ и $v_{bot}(t)$ соответственно. Плоское квазистационарное стоксовое течение будем описывать с помощью функции тока $\psi(x,y,t)$, вводимой соотношениями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Функция тока является решением задачи

$$\Delta^2\psi = 0 \text{ в } \Omega = (0,a)\times(0,b), \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = \begin{cases} v_{top}(t), & y = b, \\ -v_{bot}(t), & y = 0, \\ 0, & x = 0, a, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Решение задачи (1) – (2) можно представить в виде

$$\psi(x,y,t) = v_{top}(t)\psi_1(x,y) + v_{bot}(t)\psi_2(x,y), \tag{3}$$

где $\psi_1(x,y)$ – решение задачи

$$\Delta^2\psi_1 = 0 \text{ в } \Omega, \tag{4}$$

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega}=0\,,\quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=\begin{cases}1, & y=b,\\ 0, & y=0,\ x=0,a,\end{cases} \tag{5}$$

а $\psi_2(x,y)$ – решение задачи

$$\Delta^2\psi_2=0 \text{ в } \Omega\,, \tag{6}$$

$$\psi_2\big|_{\partial\Omega}=0\,,\quad \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=\begin{cases}-1, & y=0,\\ 0, & y=b,\ x=0,a,\end{cases} \tag{7}$$

Для решения задач (4) – (5) и (6) – (7) использован метод R-функций [2], в соотвтествии с которым функции $\psi_1(x,y)$ и $\psi_2(x,y)$ будем искать в виде

$$\psi_1(x,y)=-\frac{\omega(x,y)\omega_2(x,y)}{\omega_1(x,y)+\omega_2(x,y)}+\omega^2(x,y)\Phi_1(x,y)=\varphi_1+\omega^2\Phi_1\,,$$

$$\psi_2(x,y)=-\frac{\omega(x,y)\omega_4(x,y)}{\omega_3(x,y)+\omega_4(x,y)}+\omega^2(x,y)\Phi_2(x,y)=\varphi_2+\omega^2\Phi_2\,,$$

где

$$\omega_3(x,y)=y\,,\ \ \omega_1(x,y)=b-y\,,\ \omega_2(x,y)=\left[\frac{1}{a}x(a-x)\right]\wedge_\alpha y\,,$$

$\omega_3(x,y)=y$, $\omega_4(x,y)=\left[\frac{1}{a}x(a-x)\right]\wedge_\alpha (b-y)$, $\wedge_\alpha$ – знак R-коньюнкции [2].

Для аппроксимации неопределённых компонент Φ_1 и Φ_2 использовали метода Ритца [1] с выбором системы бикубических сплайнов в качестве координатной системы [3].

Рассматривался режим движения стенок с перекрытием: одна стенка начинает своё движение до того, как другая стенка остановилась. Промоделировано поведение частиц жидкости за 100 периодов времени. Траектории движения частиц жидкости расчитывались как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\,,\ x(0)=x_0\,,\ y(0)=y_0\,. \tag{8}$$

Для системы (8) были найдены периодические точки гиперболического и эллиптического типа, были сделаны выводы о характере перемешивания в окрестности каждой из этих точек.

Список источников:

1. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982.—552 с.

2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 353 с.