

УДК 681.511

А. А. МОГИЛА, Г. И. ХЛОПОВ, канд. техн. наук
В. П. ШЕСТОПАЛОВ, акад.

ТРАЕКТОРНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

При проведении физических экспериментов, анализе речевых сообщений [1] часто встречаются сигналы с амплитудной (АМ) и угловой модуляцией (частотной (ЧМ) или фазовой (ФМ)) в виде $U(t) = A(t) \times \exp[j\Phi(t)]$ (1). Каждая из модулирующих составляющих $A(t)$ и $\Phi(t)$ несут свою полезную информацию, однако классические методы спектрального анализа [1] не всегда позволяют восстановить закон угловой модуляции и отличить ее от АМ. Например, сравнивая огибающую спектра сигнала с линейной ЧМ и с АМ по закону $\frac{\sin \alpha t}{\alpha t}$, нетрудно обнаружить их практически полное совпадение, что связано с потерей информации о фазе спектральных составляющих при аппаратурной

обработке сигналов, при которой обычно регистрируется только амплитудный спектр.

В некотором смысле проблема аналогична задаче восстановления пространственного оптического изображения по измерениям интенсивности поля, которая впервые решена Д. Габором, сформулировавшим принципы голографической обработки изображений. Им же предложено [1] проводить анализ сложных сигналов (1) в частотно-временной плоскости $\omega - t$, используя разложение $U(t)$ в ряд по гауссовым функциям, модулирующих гармонические сигналы. Ввиду неортогональности базисных функций применение указанного разложения не нашло широкого применения, однако физические идеи, связанные с использованием $\omega - t$ плоскости, оказались весьма плодотворными. В частности, следует отметить частотно-временное представление сигнала в виде нового интегрального преобразования Габора — Хельстрема

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt d\omega \bar{U}(\tau, \omega) K(t, \tau, \omega), \quad (2)$$

где $\bar{U}(\tau, \omega)$ — функция взаимной неопределенности. Если ядро преобразования $K(t, \omega)$ обладает свойствами импульсного отклика линейного фильтра, выражение (2) можно представить в виде

$$\bar{U}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt U(t) K^*(t, \tau, \omega), \quad (3)$$

причем в случае увеличения длительности отклика фильтра ядро в (2) стремится к монохроматическому сигналу $K \rightarrow \exp(j\omega t)$, а интегральное преобразование Габора—Хельстрема плавно переходит в известное преобразование Фурье. Однако, несмотря на высокую степень обоснованности представления (2), (3), функция-образ \bar{U} является комплексной, в связи с чем указанный путь не привел к разработке достаточно быстрых и эффективных алгоритмов при практической обработке рассматриваемых сигналов.

Предлагается приближенный метод обработки сигналов в виде (1), суть которого — достижение разумного компромисса между простотой алгоритма и достигаемой точностью измерения параметров модуляции. Подход основан на известном свойстве [2] ЧМ-сигналов, спектр которых сосредоточен в окрестности текущего значения измеряемой частоты. Действительно, рассматривая модель сигнала в виде $\Phi(t) = \omega_0 t + m\varphi(t)$, где ω_0 — несущая частота; m — индекс модуляции фазы, получаем спектр

$$\bar{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt A(t) \exp \left[jm \left\{ \varphi(t) + \frac{\omega_0 - \omega}{m} t \right\} \right]. \quad (4)$$

В случае квазистационарного характера сигнала, модулирующие функции $A(t)$, $\varphi(t)$ медленно изменяются на периоде несущей частоты, что позволяет использовать метод стационарной фазы [2] для вычисления (4) при больших индексах модуляции $m \gg 1$. Нетрудно показать,

что основной вклад в интеграл дает лишь малая окрестность вблизи точки стационарной фазы τ , которая находится в результате решения уравнения $\omega = \omega_0 + m\Omega(t)$, где мгновенное приращение частоты $\Omega(t) = d\varphi/dt$, что позволяет записать

$$\bar{U}_\sigma(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt G_\sigma(t, \tau) U(t) \exp(-j\omega t); \quad (5)$$

$$G_\sigma(t, \tau) = \begin{cases} 1 & |t - \tau| \leq \sigma; \\ 0 & |t - \tau| > \sigma. \end{cases} \quad (6)$$

Однако выбор временного «окна» G_σ прямоугольной формы (6) не обеспечивает [3] достаточную точность и разрешающую способность, в связи с чем лучше использовать «окна» в виде плавно спадающей функции с нулевой производной на краю интервала. В результате этого соотношение (5) естественным образом определяет сигнал (1) в частотно-временной области $\omega - t$ и представляет собой кратковременный спектр сигнала, вычисленный в последовательные моменты времени. Необходимо отметить, что в теории радиолокации сигналы также рассматриваются в плоскости «частота — время», где их свойства описываются с помощью функции неопределенности [1]

$$X(\Omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt U(t) U^*(t - \tau) \exp(j\Omega t), \quad (7)$$

которая пропорциональна отклику с выхода согласованного фильтра в зависимости от времени запаздывания и доплеровского сдвига частоты. Поэтому выражение (5) можно трактовать как взаимную функцию неопределенности (ВФН) для сигналов $U(t)$ и $G(t)$, а квадрат ее модуля $|\bar{U}_\sigma(\omega)|^2$, как и в случае обычной функции неопределенности, следует рассматривать как уравнение поверхности, расположенной над плоскостью $\omega - t$ и определяющей вид тела ВФН. Если традиционная функция неопределенности для сигналов, используемых в радиолокации [4], обычно сосредоточена в начале координат $\omega, \tau = 0$, то тело ВФН сложным образом распределено в частотно-временной плоскости, причем проекция его рельефа на плоскость $SO\tau$ описывает амплитудную модуляцию сигнала, а траектория рельефа в плоскости $\omega\tau$ определяется законом его частотной модуляции. Поэтому условимся называть траекторным спектральным анализом метод, позволяющий определить законы модуляции сигнала с помощью изучения его поведения в плоскости частота — время.

Для определения закона ЧМ естественно использовать информацию, содержащуюся в траектории движения энергетического центра тяжести (ЭЦТ) кратковременной спектральной плотности

$$\omega_m(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega |\bar{U}_\sigma(\omega, \tau)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\bar{U}_\sigma(\omega, \tau)|^2}, \quad (8)$$

причем в предлагаемом подходе применяются мощностные характеристики сигнала, и выражение (8) практически не зависит от закона АМ, так как длительность временного «окна» всегда существенно меньше интервала изменения модулирующих функций $A(t)$, $\Phi(t)$.

Подробное изучение траектории движения ЭЦТ вряд ли оправдано, особенно для сигналов, содержащих случайную компоненту (помехи, шумы). Кроме того, в ряде случаев, например при анализе речевых сообщений [1], полная траектория движения ЭЦТ характеризуется значительной информационной избыточностью, что существенно затрудняет обработку сигналов даже при использовании современной вычислительной техники. Поэтому введем усредненные характеристики, которые достаточно точно описывают траекторию ЭЦТ и устойчивы по отношению к случайным воздействиям на сигнал. Такими характеристиками могут служить моменты траектории движения ЭЦТ тела ВФН:

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \omega_m^n(\tau), \quad (9)$$

информативность которых убывает с повышением порядка n [1], благодаря чему можно ограничиться вычислением небольшого количества первых моментов, имеющих простой физический смысл. В частности, среднее значение траектории движения ЭЦТ $\bar{\omega} = M_1/M_0$, среднеквадратичное отклонение (девиация частоты) $\overline{\Delta\omega} = [M_2/M_0 - (M_1/M_0)^2]^{1/2}$ и т. д.

Для определения закона амплитудной модуляции, как указывалось, необходимо вычислить проекцию рельефа тела ВФН на плоскость $SO\tau$:

$$\Pi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |U_\sigma(\omega, \tau)|^2. \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражение (5) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\Pi(\tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt |G_\sigma(t, \tau) A(t)|^2, \quad (11)$$

причем если разделить обе части равенства (11) на $4\pi\sigma$, то можно определить оценку закона АМ в виде средневзвешенного квадрата

$$A(\tau) = \left\{ \frac{1}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dt |G_\sigma(t, \tau) A(t)|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |U_\sigma(\omega, \tau)|^2 \right\}^{1/2}. \quad (12)$$

Как видно, выражение (12) не зависит от угловой модуляции сигнала и в случае прямоугольного временного «окна» записывается особенно просто:

$$\tilde{A}(\tau) = \left\{ \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} dt |A(t)|^2 \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

определяя таким образом, среднеквадратичное значение амплитуды на интервале длительности «окна» 2σ . При этом физически очевидно, что точность отображения закона модуляции рельефом тела ВФН зависит от длительности σ и от скорости изменения частоты $d^2\varphi/dt^2$. Действительно, разлагая $\varphi(t)$ в степенной ряд и ограничиваясь в (4) первыми слагаемыми, вычисляем выражение для тела ВФН:

$$|\bar{U}_\sigma(\omega, \tau)|^2 = |U_0|^2 \{ [C(x) - C(x - x_0)]^2 + [S(x) - S(x - x_0)]^2 \}, \quad (14)$$

где $C(x)$ и $S(x)$ интегралы Френеля [5], $x = (\omega - \varphi') (2|\varphi''|)^{-1/2}$, $x_0 = \sigma \left(\frac{1}{2} |\varphi''| \right)^{1/2}$.

На рис. 1 приведена рассчитанная зависимость относительной ширины тела ВФН $\Delta x_0 = \Delta\omega_0 (2|\varphi''|)^{1/2}$ от нормированной ширины временного «окна» x_0 . При увеличении длительности σ ширина спектра возрастает в результате свиппирования частоты в пределах «окна», а в случае малых значений σ , когда изменением частоты можно пренебречь, спектральная плотность практически совпадает со спектром радиоимпульса с постоянной частотой заполнения, а его ширина возрастает пропорционально σ^{-1} . В результате выбор слишком узкого «окна» приводит к расширению спектра, что не менее опасно как и в случае широкого «окна», особенно при большой девиации

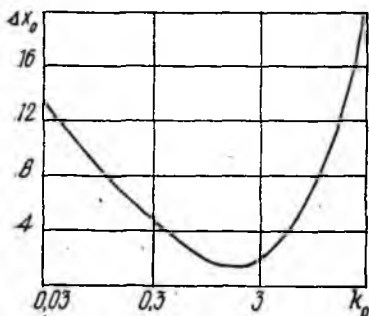


Рис. 1.

частоты, когда заметная доля энергии спектра попадает в область отрицательных частот и структура рельефа ВФН дополнительно искажается. Поэтому параметры системы обработки должны обеспечивать выполнение неравенства $\Delta\omega_0 \ll \omega_m(\tau)$, что было бы просто для постоянной скорости изменения частоты $d\omega/dt$. Однако для реальных сигналов производная от частоты изменяется в широких пределах $0 \leq \omega' \leq \omega_m$, в связи с чем выбор нормированной ширины «окна» целесообразно проводить по среднему значению, которое можно определить на основании неравенства Бернштейна [6], сформулированного в классе целых функций. Так как в рассматриваемом случае вариация частоты исследуемых сигналов ограничена $|\omega(t)| \leq \omega_{\text{макс}}$ на всем интервале изменения, а спектр $\omega(t)$ сосредоточен в полосе пропускания радиотехнического тракта Ω_m , то применение указанного неравенства приводит к простой оценке

$$\left| \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{макс}} = \omega_m \leq \Omega_m \omega_{\text{макс}}. \quad (15)$$

Укажем еще один источник погрешности определения закона ЧМ исследуемого сигнала, связанный с конечностью его времени реализации T_n , в результате чего вместо точного значения моментов соотно-

шение (9) дает только их оценку \hat{M}_n . Следовательно, параметры системы обработки — длительность временного «окна», расстояние между отсчетами $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$ и интервал наблюдения T_n должны выбираться с учетом уменьшения погрешности определения параметров траектории движения ЭЦТ тела ВФН в плоскости $\omega - t$.

Рассмотрим влияние указанных параметров на точность определения закона ЧМ для сигнала (1) с угловой модуляцией по гармоническому закону $\Phi(t) = \omega_0 t + m \sin \Omega t$, $m = \Delta\omega/\Omega$, где $\Delta\omega$ — девиация частоты; Ω — модулирующая частота. Для такого сигнала среднее значение равно

$\bar{\omega} = \omega_0$, среднеквадратичное отклонение $\delta_{\Delta\omega} = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2}}$ и максимальная

скорость изменения мгновенной частоты совпадает с верхней границей неравенства Бернштейна $|\dot{\omega}_m| = \Delta\omega\Omega$.

Обработка сигналов проводилась с использованием ЭВМ типа БЭСМ-6 в два этапа: осуществлялось вычисление ЭЦТ для простейшего прямоугольного «окна» и смежных отсчетов $\tau_{k+1} - \tau_k = \sigma$, а затем ассчитывались три начальных момента (9) траектории ЭЦТ

$$M_n = \sigma \sum_{k=0}^{N-1} \tau_k^n \omega_m(\tau_k), \quad (16)$$

где $N = [T_n/\sigma]$, $n = 0; 1; 2$. Полученные данные использованы для вычисления среднего значения мгновенной частоты $\bar{\omega}$, среднеквадратичной девиации $\hat{\Delta\omega}$, а также средней модулирующей частоты $\hat{\Omega}$, которая определялась как ЭЦТ вторичного спектра $\bar{W}(\Omega)$ для траекторий рельефа тела ВФН:

$$\hat{\Omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega |\bar{W}(\Omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |\bar{W}(\Omega)|^2}; \quad (17)$$

$$\bar{W}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \omega_m(\tau) \exp(-j\Omega\tau). \quad (18)$$

Данные вычислений сравнивались с известными характеристиками сигнала $\bar{\omega}$, $\delta_{\Delta\omega}$ и Ω , а зависимости модуля относительной ошибки вычислений $\Delta_x = |(\hat{x} - x_0)/x_0|$ приведены на рис. 2, где \hat{x} — оценка параметра x , точное значение которого равно x_0 . Изменение длительности обрабатываемой реализации T_n в первую очередь сказывается на точности вычислений модулирующей частоты Ω (рис. 2 а, кривые 1, 2, 3 соответствуют величинам Δ_Ω , Δ_{ω_0} , и $\Delta_{\Delta\omega}$, $x_0 = 2$), для измерений которой с точностью, не ниже 5% необходимо выполнение условия $T_n \Omega \geq 15$. Поскольку частота Ω — наиболее низкочастотный параметр, то для его измерения требуется соответственно наибольшее время, которое в нашем случае должно составлять не менее трех периодов модулирующей частоты.

Для относительно небольших значений девиации частоты $\Delta\omega/\omega_0 = 0,16$ вариация длительности временного «окна» κ_0 мало сказывается на точности вычисления измеряемых величин (рис. 2, б, $T_H\Omega = 20$),

несмотря на изменение скорости перестройки частоты в широких пределах $0 \leq \omega \leq \Delta\omega\Omega$.

В то же время, при увеличении девиации частоты (рис. 2, в, $\Delta\omega/\omega_0 = 0,71$; $T_H\Omega = 20$) наиболее быстро возрастает ошибка вычисления средней частоты $\Delta\omega_0$ (кривая 2), что является следствием сглаживания быстрых изменений мгновенной частоты при большой длительности «окна» $\kappa_0 \gg 1$. Поэтому траектория движения ЭЦТ (рис. 3, кривая 1) заметно отличается от точной зависимости $(\omega - \omega_0)/\Delta\omega = \cos\Omega t$ (кривая 3). Заметим, что ассиметричный характер искажений, особенно в точках перегиба кривой, где производная мгновенной частоты меняет знак. Кроме того, при большой девиации частоты начинают сказываться искажения рельефа тела ВФН, связанные с расширением спектра при малой длительности временного «окна» $\kappa_0 \leq 0,1$ в моменты времени, когда мгновенная частота достигает своего минимума. Искажения рельефа соответствуют траектории движения ЭЦТ, показанной на рис. 3, кривая 2, что в результате приводит к увеличению ошибок вычисления измеряемых величин (рис. 2, в) в области малых длительностей временного «окна».

Если же длительность «окна» выбрать из условия $\kappa_0 = 0,5$, то можно обеспечить достаточно высокое соответствие рельефа тела

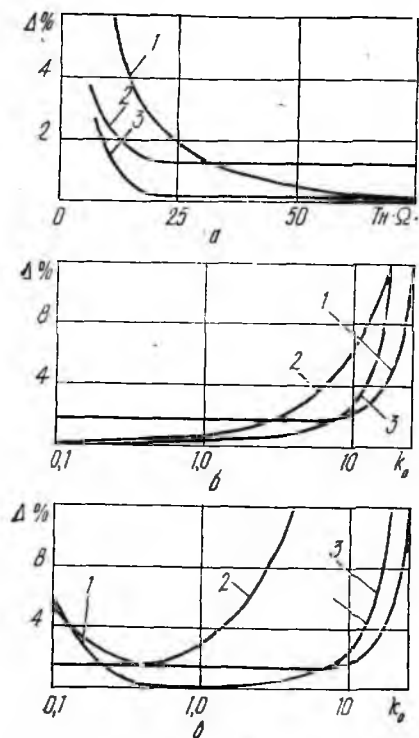


Рис. 2

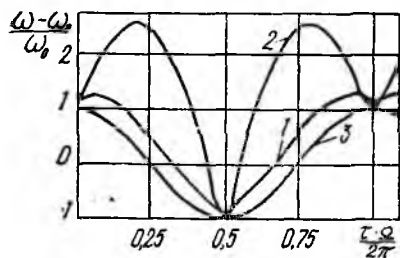


Рис. 3

ВФН и закона ЧМ исследуемого сигнала, приемлемое для решения практических задач (рис. 2, в).

Рамки работы не позволяют привести результаты анализа точности вычисления параметров АМ, которая, как и в предыдущем случае ЧМ, определяется длительностью «окна» и значением производной dA/dt , а численные оценки имеют тот же порядок (рис. 2).

Таким образом, показано, что траекторный спектральный анализ позволяет с приемлемой для практики точностью определять параметры сигналов с АМ и ЧМ одновременно. При этом предложено использовать моменты траектории движения энергетического центра тяжести спектральной плотности в плоскости частота — время в качестве параметров модуляции сигналов. Максимальная точность вычисления параметров модуляции соответствует выполнению ограничений на время реализации исследуемых сигналов $T_n \geq 3T_{\Omega}$ и длительность временного «окна» $\sigma = (\Omega_m \Delta\omega^{\text{макс}})^{-1/2}$, где T_{Ω} — период модулирующей частоты, Ω_m — ширина полосы спектра сигнала, $\Delta\omega^{\text{макс}}$ — максимальная девиация частоты ЧМ.

Список литературы: 1. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2-х т. М., 1983. Т. 1. 312 с. 2. Вакман Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., 1962. 243 с. 3. Красненко Н. П., Федоров В. А. Применение временных и корреляционных окон для оценивания параметров спектральной плотности стационарного случайного процесса // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1985. Т. 28, № 7. С. 79—82. 4. Вакман Д. Е., Седлецкий Р. М. Вопросы анализа радиолокационных сигналов. М., 1973. 312 с. 5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Р. Специальные функции. М., 1968. 340 с. 6. Ахиевер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций. М., 1965. 332 с.

Поступила в редколлегию 21.03.88