УДК 621.396.67

В.В. ДОЛЖИКОВ, д-р физ.-мат. наук

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ НА ФОКАЛЬНОЙ СФЕРЕ КРУГЛОЙ СФОКУСИРОВАННОЙ АПЕРТУРЫ

Введение

К настоящему времени поле ряда излучающих систем (ИС) в их зоне Френеля изучено довольно обстоятельно. Однако имеющаяся в литературе информация не в полной мере удовлетворяет потребности практики. Связано это с тем, что в реальных ИС распределение источников всегда в той или иной мере случайно. Наличие случайностей в распределении источников существенно ухудшает характеристики ИС, ограничивает их потенциальные возможности. При этом с увеличением электрических размеров ИС и усложнением их конструкции, роль различных факторов, порождающих «случайности» в амплитудно-фазовом распределении и положении источников значительно возрастает. Это проявляется особенно заметно в крупных, сложных, дорогостоящих антеннах. В 80 – 90-х годах Я.С. Шифриным и его сотрудниками был выполнен цикл работ по построению статистической теории ИС (теории антенн со случайными источниками) в зоне Френеля применительно к линейным излучающим системам, результаты которых в обобщенном виде приведены в [1].

Изучение статистики поля ИС в их зоне Френеля на примере линейной излучающей системы (ЛИС) позволило выявить присущие этой зоне основные статистические эффекты и закономерности их изменения. Однако с практической точки зрения более важное значение имеют исследования для ИС с двумерными апертурами, в частности для широко распространенного типа антенн – антенны с круглой апертурой. Результаты изучения средних и флуктуационных характеристик приведены в [2, 3].

Цель настоящей работы – изучение корреляционных характеристик поля на фокальной сфере, сфокусированных в зону Френеля антенн с круглой апертурой, при наличии в их раскрыве фазовых флуктуаций.

1. Исходные соотношения

Рассмотрим плоскую синфазную равномерно возбужденную круглую апертуру радиуса R, сфокусированную в зону Френеля. Как показано в [2], поле данной антенны в приближении Френеля можно представить в виде

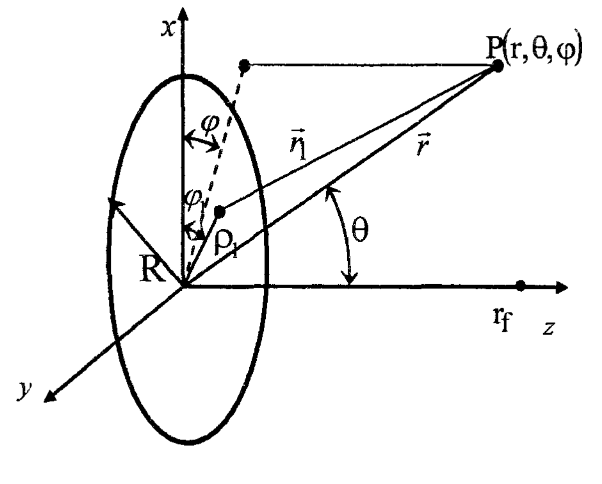

Рис.1

$$E_0(\zeta,\psi)=\frac{2}{\chi}\int_0^1 e^{i2\zeta u^2} J_0(u\psi)\,u\,du. \qquad (1)$$

Входящие в (1) безразмерные переменные ψ, u, χ и ζ связаны с реальными координатами системы (см. рис.1) следующими соотношениями: $\psi = kR\sin\theta$, $u=\rho_1/R$, $\chi = r/r_{\text{äç}}$ и $\zeta=\frac{\pi}{16\chi_0}\left(1-\frac{\chi_0}{\chi}\right)$. Здесь $k=2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны в свободном пространстве, $r_{\text{ä.ç}}=8R^2/\lambda$ – расстояние до границы дальней зоны, χ_0 – нормированное значение фокусного расстояния.

Если на апертуре имеются фазовые флуктуации $\Phi(u,\varphi_1)$, то вместо (1) имеем для поля отдельной реализации выражение [2]

$$E(\zeta,\psi,\varphi)=\frac{1}{\pi\chi}\int\limits_S e^{i\Phi(u,\varphi_1)}e^{i2\zeta u^2}e^{iu\psi\cos(\varphi-\varphi_1)}ds\ . \tag{2}$$

Будем считать, что функция $\Phi(u,\varphi_1)$ нормальная однородная по раскрыву случайная функция с нулевым средним значением, дисперсией $\overline{\Phi^2(u,\varphi_1)}=\sigma^2(u,\varphi_1)=\alpha=const$ и коэффициентом корреляции гауссовского вида:

$$r=\frac{\overline{\Phi(u,\varphi_1)\cdot\Phi(u',\varphi_1')}}{\alpha}=e^{-\frac{u^2+u'^2-2uu'\cos(\varphi_1-\varphi_1')}{c^2}},$$

где числитель дроби в показателе экспоненты – квадрат расстояния между точками с координатами u,φ_1 и u',φ_1', а знаменатель – квадрат радиуса корреляции c в относительных единицах, связанный с радиусом корреляции фазовых флуктуаций ρ_0 соотношением $c=\rho_0/R$.

Тогда усредняя соотношение (2) получим [2]:

$$\overline{E(\zeta,\psi,\varphi)}=\frac{1}{\chi}e^{-\frac{\alpha}{2}}F_0(\zeta,\psi), \tag{3}$$

где $F_0(\zeta,\psi)=2\int\limits_0^1 e^{i2\zeta u^2}J_0(\psi u)udu$.

Соотношения (2) и (3) являются исходными для определения корреляционных характеристик поля антенны с круглой апертурой.

2. Корреляция компонент комплексного поля

2.1. Общие соотношения

В рамках корреляционной теории флуктуации поля с точностью до множителя $\left(i\pi E_A e^{-ikr}/8\right)$

$$\begin{aligned}\delta E(\zeta,\psi,\varphi)&=E(\zeta,\psi,\varphi)-\overline{E(\zeta,\psi,\varphi)}=\\&=\frac{1}{\pi\chi_0}\left(1-\frac{16\chi_0}{\pi}\zeta\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\left[2\zeta u^2+u\psi\cos(\varphi-\varphi_1)\right]}\left[e^{i\Phi(u,\varphi_1)}-e^{-\frac{\alpha}{2}}\right]d\varphi_1udu=,\\&=A(\zeta,\psi,\varphi)+iB(\zeta,\psi,\varphi),\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$A(\zeta,\psi,\varphi)=\mathrm{Re}\,\delta E(\zeta,\psi,\varphi),\ B(\zeta,\psi,\varphi)=\mathrm{Im}\,\delta E(\zeta,\psi,\varphi) \tag{5}$$

- реальная и мнимая части флуктуаций поля, описываются корреляционной матрицей второго порядка [4]

$$\mathbf{K}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)=\begin{pmatrix}K_{AA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1) & K_{AB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)\\ K_{BA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1) & K_{BB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $K_{AA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ и $K_{BB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ – корреляционные функции, а $K_{AB_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ и $K_{BA_1}(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ – взаимные корреляционные функции реальной и мнимой частей (компонент) флуктуаций поля.

В случае, когда $\psi \neq \psi_1$, $\zeta \neq \zeta_1$, $\varphi \neq \varphi_1$, корреляционная матрица (6) характеризует корреляционную связь между флуктуациями поля в произвольных точках (ζ,ψ,φ) и $(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$. Эта же матрица **K** при $\zeta=\zeta_1$, но $\varphi \neq \varphi_1$, $\psi \neq \psi_1$ будет характеризовать корреляцию между флуктуациями поля в поперечном направлении (в точках, лежащих на сфере радиуса ζ, а при $\zeta=\zeta_1=0$ на фокальной сфере). При $\psi=\psi_1=0$ – она характеризует корреляционную связь флуктуаций поля в продольном направлении (вдоль фокальной оси). Если же $\psi=\psi_1$, $\zeta=\zeta_1$, $\varphi=\varphi_1$, то диагональные элементы матрицы **K** определяют дисперсию $\sigma_A^2(\zeta,\psi,\varphi)$, $\sigma_B^2(\zeta,\psi,\varphi)$, а недиагональные – взаимную корреляционную функцию $K_{AB}(\zeta,\psi,\varphi)$ реальной и мнимой компонент флуктуаций поля в точке с координатами ζ, ψ, φ.

Отметим, что если флуктуации поля ИС распределены по нормальному закону, то статистическое описание функции $\delta E(\zeta,\psi,\varphi)$ с помощью матрицы **K** будет исчерпывающим. Нормальный закон распределения флуктуаций поля будет иметь место в случае малых фазовых флуктуаций в апертуре или в случае, когда радиус корреляции этих флуктуаций много меньше размера ИС [4].

Введем, следуя [4], вспомогательные корреляционные функции

$$\begin{aligned} K_1(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1) &= \overline{\delta E(\zeta,\psi,\varphi)\cdot\delta E^*(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)} = \\ &= \overline{E(\zeta,\psi,\varphi)\cdot F^*(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)} - \overline{E(\zeta,\psi,\varphi)}\cdot\overline{E^*(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} K_2(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1) &= \delta E(\zeta,\psi,\varphi)\cdot\delta E(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1) = \\ &= \overline{E(\zeta,\psi,\varphi)\cdot E(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)} - \overline{E(\zeta,\psi,\varphi)}\cdot\overline{E(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}, \end{aligned} \tag{8}$$

где * – знак комплексного сопряжения.

Значение функции $K_1(\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)$ при $\zeta_1=\zeta$, $\psi_1=\psi$, $\varphi_1=\varphi$ определяет дисперсию флуктуаций поля:

$$K_1(\zeta,\psi,\varphi) = \overline{\left|\delta E(\zeta,\psi,\varphi)\right|^2} = \overline{\left|F(\zeta,\psi,\varphi)\right|^2} - \left|\overline{F(\zeta,\psi,\varphi)}\right|^2, \tag{9}$$

где первое слагаемое есть средняя интенсивность поля, а второе – квадрат модуля среднего поля.

При принятой в данной работе статистике фазовых флуктуаций первые слагаемые в правой части (7) и (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{E(\zeta,\psi,\varphi)\cdot E^*(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)} &= \frac{e^{-\alpha}}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}\times \\ &\times\left\{E_0(\zeta,\psi)\cdot E_0^*(\zeta_1,\psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(+1)^n\alpha^n}{n!}T_n^{(1)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)\right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \overline{E(\zeta,\psi,\varphi)\cdot E(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)} &= \frac{e^{-\alpha}}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)}\cdot\times \\ &\times\left\{E_0(\zeta,\psi)\cdot E_0(\zeta_1,\psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}T_n^{(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $c_n = c/\sqrt{n}$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1$, $\chi(\zeta) = \frac{1}{\chi_0}\left(1 - \frac{16\pi}{\pi}\zeta\right)$ и согласно (П.7)

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = 4\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\pm 1)^m \cos(m\Delta\varphi)\, S_m^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1), \quad (12)$$

где

$$S_m^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1) = \int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2\left(\zeta u^2 \mp \zeta_1 u_1^2\right)} I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right) J_m(\psi u) J_m(\psi_1 u_1)\, uu_1\, du\, du_1 .$$

Подставляя (10), (11) в (7), (8) и учитывая (3), получаем

$$K_{1,2}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{1}{\chi(\zeta)\chi_1(\zeta_1)} e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n \alpha^n}{n!} T_n^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi). \quad (13)$$

В общем случае, как следует из (12) и (13), K_1 и K_2 – комплексные функции. Следовательно, в зоне Френеля вещественная и мнимая части флуктуаций поля коррелированны, в отличие от дальней зоны, где они не коррелированны [4].

Определим элементы корреляционной матрицы через введенные корреляционные функции $K_{1,2}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$. При этом далее аргументы у $K_{1,2}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$ и $K_{AA,BB,AB,BA}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$ для краткости будут опускаться. Так как

$$K_1 = \overline{\delta E(\zeta,\psi,\varphi)\cdot\delta E^*(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)} = \overline{\left[(A+iB)\cdot(A_1+iB_1)^*\right]} =$$
$$= \overline{\left[(AA_1+BB_1)+i(BA_1-AB_1)\right]} = \left(K_{AA_1}+K_{BB_1}\right)+i\left(K_{BA_1}-K_{AB_1}\right) \quad (14)$$

и аналогично

$$K_2 = \overline{\delta F(\zeta,\psi,\varphi)\cdot\delta F(\zeta,\psi,\varphi)} = \left(K_{AA_1}+K_{BB_1}\right)+i\left(K_{BA_1}+K_{AB_1}\right), \quad (15)$$

то

$$K_{AA_1,BB_1} = \frac{\operatorname{Re}K_1 \pm \operatorname{Re}K_2}{2}, \quad K_{BA_1,AB_1} = \frac{\operatorname{Im}K_2 \pm \operatorname{Im}K_1}{2} \quad (16)$$

Нормированные корреляционные функции флуктуаций комплексного поля и его компонент определяются выражениями:

$$R(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{K_1(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_1(\zeta,\psi)\sigma_1(\zeta_1,\psi_1)},$$
$$R_{AA_1,BB_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{K_{AA_1,BB_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_{A,B}(\zeta,\psi)\sigma_{A_1,B_1}(\zeta_1,\psi_1)}, \quad (17)$$
$$R_{AB_1,BA_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi) = \frac{K_{AB_1,BA_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_{A,B}(\zeta,\psi)\sigma_{B_1,A_1}(\zeta_1,\psi_1)},$$

где

$$\sigma_1(\zeta,\psi) = \sqrt{K_1(\zeta,\psi,\zeta,\psi,\Delta\varphi=0)}, \quad \sigma_{A,B}(\zeta,\psi) = \sqrt{K_{AA,BB}(\zeta,\psi,\zeta,\psi,\Delta\varphi=0)} .$$

Полученные соотношения справедливы при произвольной величине фазовых флуктуаций на апертуре и любом соотношении между их радиусом корреляции и размером ИС. Рассмотрим ряд частных случаев.

2.2. Корреляция компонент поля на фокальной сфере

Для точек на фокальной сфере корреляционные функции будем записывать с верхним индексом "$\perp$" – например, $K_{1,2}^{\perp}$, $K_{AA_1}^{\perp}$, $K_{BB_1}^{\perp}$, $K_{AB_1}^{\perp}$ и т.д.

Полагая $\zeta=\zeta_1=0$ и опуская в перечне аргументов нули, для $T_n^{(1),(2)}(c_n,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)$ получим из (12):

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=4\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\pm 1)^m\cos(m\Delta\varphi)S_m(c_n,\psi,\psi_1), \quad (18)$$

где $S_m(c_n,\psi,\psi_1)=S_m^{(1),(2)}(c_n,0,\psi,0,\psi_1)$ и равна

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=\int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)uu_1 du du_1. \quad (19)$$

Так как $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$ – вещественные функции, то и $K_{1,2}^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)$ – также вещественная функция. Тогда из (14) и (15) следует, что взаимные поперечные[1] корреляционные функции

$$K_{BA_1,AB_1}^{\perp}=0. \quad (20)$$

Таким образом, вещественные и мнимые части флуктуаций поля на фокальной сфере не коррелированны при любых значениях α, c и фокусного расстояния. Аналогичным свойством обладают флуктуации поля в дальней зоне ЛИС [4].

Поперечные (угловые) корреляционные функции вещественных и мнимых компонент флуктуаций поля при этом равны:

$$K_{AA_1,BB_1}^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=\left[K_1^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)\pm K_2^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)\right]/2. \quad (21)$$

Нормированные корреляционные функции для реальной и мнимой частей поля имеют вид

$$R_{AA_1,BB_1}^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=\frac{K_1^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)\pm K_2^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sqrt{\left[K_1^{\perp}(\psi,\psi)\pm K_2^{\perp}(\psi,\psi)\right]\cdot\left[K_1^{\perp}(\psi_1,\psi_1)\pm K_2(\psi_1,\psi_1)\right]}}, \quad (22)$$

где

$$K_1^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)\pm K_2(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=\frac{4}{\chi_0^2}e^{-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})\left[1\pm(-1)^{m+n}\right]\times$$
$$\times\cos(m\Delta\varphi)S_m(c_n,\psi,\psi_1) \quad (23)$$

и $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$, определено в (19).

Положение точки наблюдения на фокальной сфере определяется двумя координатами θ и φ (ψ и φ). При изучении зависимости корреляционных свойств поля от обобщенной угловой координаты ψ будем рассматривать точки, для которых $\Delta\varphi=0$ (точки расположены по одну сторону от фокальной оси) или $\Delta\varphi=\pi$ (точки расположены симметрично по разные

[1] Здесь и далее вместо термина «корреляционные функции в поперечном направлении» будем использовать менее корректный, но более краткий термин – «поперечные корреляционные функции» и вместо «корреляционные функции в радиальном направлении» - «радиальные» корреляционные функции.

стороны фокальной оси). Проведем анализ корреляционных свойств поля на фокальной сфере для ряда частных случаев.

Радиусы корреляции малы. В случае малых радиусов корреляции ($c << 1$) для $S_m(c_n, \psi, \psi_1)$, определенного формулой (19), согласно приложению (П.10), имеет место представление:

$$S_m(c_n, \psi, \psi_1) = \frac{c_n^2}{2} S_m^{(0)}(\psi, \psi_1), \qquad (24)$$

где

$$S_m^{(0)}(\psi, \psi_1) = \frac{\psi J_{m+l}(\psi) J_m(\psi_1) - \psi_1 J_m(\psi) J_{m+l}(\psi_1)}{\psi^2 - \psi_1^2}.$$

Корреляционные функции $K_{1,2}^{\perp}(\psi, \psi_1, \Delta\varphi)$ тогда принимают вид

$$K_{1,2}^{\perp}(\psi, \psi_1, \Delta\varphi) = \frac{2c^2}{\chi_0^2} e^{-\alpha} M_{1,2}(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} (\pm 1)^m (2 - \delta_{0m}) \cos(m\Delta\varphi) S_m^{(0)}(\psi, \psi_1), \qquad (25)$$

где верхний знак относится к $K_1^{\perp}(\psi, \psi_1, \Delta\varphi)$, а нижний – к $K_2^{\perp}(\psi, \psi_1, \Delta\varphi)$,

$$M_{1,2}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n \alpha^n}{n! n} = \begin{cases} Ei(\alpha) - \ln\alpha - \gamma \\ \Gamma(0, \alpha) - \ln\alpha - \gamma \end{cases}. \qquad (26)$$

В (26) $Ei(\alpha)$ – интегральная показательная функция, $\Gamma(0, \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \left(e^{-t}/t\right) dt$ - неполная гамма-функция [6], γ – постоянная Эйлера.

Рассмотрим флуктуации в точках главного сечения пространственного распределения поля, лежащих по одну сторону от фокальной оси $(\Delta\varphi = 0)$.

Учитывая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{om}) S_m^{(0)}(\psi, \psi_1) = \frac{J_1(\psi - \psi_1)}{\psi - \psi_1}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2 - \delta_{om}) S_m^{(0)}(\psi, \psi_1) = \frac{J_1(\psi + \psi_1)}{\psi + \psi_1}$$

из (25) находим

$$K_{1,2}^{\perp}(\psi, \psi_1, 0) = \frac{2c^2}{\chi_0^2} e^{-\alpha} M_{1,2}(\alpha) \frac{J_1(\psi \mp \psi_1)}{(\psi \mp \psi_1)}, \quad \sigma^{\perp 2}(\psi, \psi, 0) = \frac{c^2}{\chi_0^2} e^{-\alpha} M_1(\alpha). \qquad (27)$$

Последнее выражение определяет дисперсию флуктуаций комплексного поля, из которого следует, что эти флуктуации при малых радиусах корреляции фазовых ошибок статистически однородны (дисперсия не зависит от координат).

Из (27) и (26) для корреляционных функций вещественной и мнимой компонент флуктуаций поля и их дисперсий получим:

$$K_{AA_1, BB_1}^{\perp}(\psi, \psi_1, 0) = \frac{1}{2\chi_0^2} c^2 e^{-\alpha} M_1(\alpha) \left[\frac{J_1(\psi - \psi_1)}{\psi - \psi_1} \pm M_0(\alpha) \frac{J_1(\psi + \psi_1)}{\psi + \psi_1} \right], \qquad (28)$$

$$\sigma_{A,B}^{\perp\,2}(\psi, \psi) = \frac{1}{4\chi_0^2} c^2 e^{-\alpha} M_1(\alpha) \left[1 \pm M_0(\alpha) \frac{J_1(2\psi)}{\psi} \right]. \qquad (29)$$

Величина $M_0(\alpha)$, определенная соотношением

$$M_0(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{n! n} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n! n} = \frac{M_2(\alpha)}{M_1(\alpha)}, \qquad (30)$$

отрицательна и модуль её монотонно уменьшается с ростом α. Для малых α это следует из асимптотического разложения $M_0(\alpha)$ при $\alpha \ll 1$:

$$M_0(\alpha) \approx -(1-0.5\alpha).$$

Для более широкого интервала значений α график $|M_0(\alpha)|$ представлен на рис. 2.

Нормированные корреляционные функции флуктуаций комплексного поля и их компонент при этом имеют вид:

$$R^{\perp}(\psi,\psi_1,0) = \frac{2J_1(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}, \tag{31}$$

$$R^{\perp}_{AA_1,BB_1}(\psi,\psi_1,0) = \frac{2\{J_1(\psi-\psi_1)/(\psi-\psi_1) \pm M_0(\alpha)[J_1(\psi+\psi_1)/\psi+\psi_1]\}}{\sqrt{1\pm M_0(\alpha)J_1(2\psi)/\psi}\sqrt{1\pm M_0(\alpha)J_1(2\psi_1)/\psi_1}}. \tag{32}$$

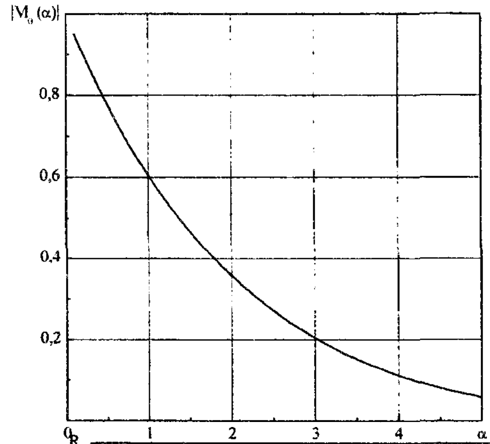

Рис. 2.

Если точки ψ и ψ_1 разнесены более чем на 3.82, независимо от их абсолютных значений, то флуктуации комплексного поля в них практически не коррелированны, поскольку $R^{\perp}(\psi,\psi_1,0)$ < 0.1 (рис. 3). Так как при $c \ll 1$ поле распределено нормально, это означает, что флуктуации поля в этих точках статистически независимы.

При расположении точек ψ и ψ_1 вне главного лепестка (фокального пятна) $(\psi$ *è* $\psi_1 > 3.82)$ корреляционные функции вещественной и мнимой компонент флуктуаций поля в них имеют близкие значения (рис. 4). Их близость тем больше, чем больше дисперсия флуктуаций фазы в раскрыве. Так как с ростом α величина $M_0(\alpha)$ монотонно уменьшается (рис.2),то $R^{\perp}_{AA_1}(\psi,\psi_1,0) \approx \approx R^{\perp}_{BB_1}(\psi,\psi_1,0) = 0.5R^{\perp}(\psi,\psi_1,0)$.

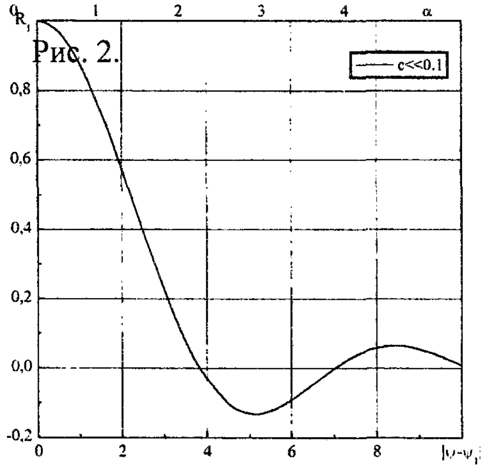

Рис. 3

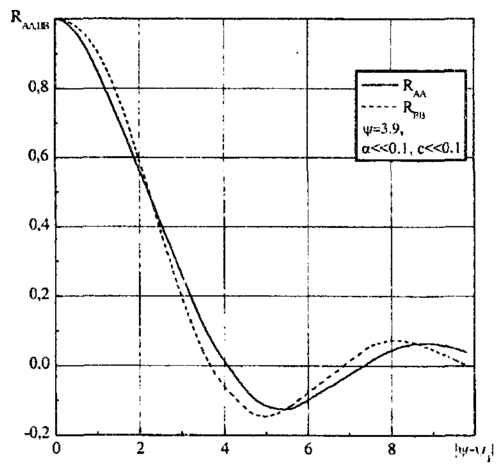

Рис. 4

Заметим, что такими же свойствами обладают корреляционные функции для линейных ИС [4].

Случай симметричного относительно фокуса расположения точек наблюдения рассмотрен ниже.

Флуктуации малы ($\alpha << 1$). В этом случае в выражениях для корреляционных функций $K_{1,2}^{\perp}(\psi,\psi_1,\Delta\varphi)$ на плоскости $\Delta\varphi=0$ достаточно ограничиться членами первого порядка малости по α:

$$K_{1,2}^{\perp}(\psi,\psi_1,0)=\pm\frac{4}{\chi_0^2}\alpha\sum_{m=0}^{\infty}(\pm1)^m(2-\delta_{0m})S_m(c,\psi,\psi_1), \tag{33}$$

где $S_m(c,\psi,\psi_1)$ для произвольных c определено в (19).

Корреляционные функции вещественных и мнимых частей при этом примут вид:

$$K_{AA_1}^{\perp}(\psi,\psi_1,0)=\frac{4}{\chi_0^2}\alpha\sum_{m=0}^{\infty}S_{2m+1}(c,\psi,\psi_1), \tag{34}$$

$$K_{BB_1}^{\perp}(\psi,\psi_1,0)=\frac{4}{\chi_0^2}\alpha\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})S_{2m}(c,\psi,\psi_1), \tag{35}$$

Для дисперсий σ_A^2, σ_B^2 имеем следующие выражения:

$$\sigma_A^{\perp 2}(\psi)=\frac{4}{\chi_0^2}\alpha\sum_{m=0}^{\infty}S_{2m+1}(c,\psi,\psi),\quad \sigma_B^{\perp 2}(\psi)=\frac{4}{\chi_0^2}\alpha\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})S_{2m}(c,\psi,\psi).$$

Нормированные корреляционные функции для флуктуаций комплексного поля $R^{\perp}(\psi,\psi_1,0)$ и мнимых их частей $R_{BB_1}^{\perp}(\psi,\psi_1,0)$ при этом определяются соотношениями (17).

Выясним характер изменения корреляционных функций по мере изменения параметра c.

Для малых и больших радиусов корреляции $S_m(c,\psi,\psi_1,)$ определяются соответственно выражениями (24) и П.12 для $n=1$:

при $c>>1$

$$S_m(c,\psi,\psi_1)=\frac{J_{m+1}(\psi)J_{m+1}(\psi_1)}{c^{2m}\psi\psi_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+1)^2}{k!(m+k)!}\frac{1}{c^{2k}}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!(m+k+p+1)c^{2p}}\right\}^2.$$

Будем полагать $\psi_1=0$, что не снижает общности выводов, но упрощает все вычисления. Согласно (19) все $S_m(c,\psi,\psi_1)$, кроме $m=0$, при $\psi_1=0$ обращаются и в нуль и

$$K_1^{\perp}(\psi,0,0)=\frac{4}{\chi_0^2}\alpha S_0(c,\psi,0),\ K_2^{\perp}(\psi,0,0)=-\frac{4}{\chi_0^2}\alpha S_0(c,\psi,0)=-K_1^{\perp}(\psi,0,0). \tag{36}$$

Следовательно,

$$K_{AA_1}^{\perp}(\psi,0,0)=0\,,K_{BB_1}^{\perp}(\psi,0,0)=\frac{4}{\chi_0^2}\alpha S_0(c,\psi,0). \tag{37}$$

Равенство нулю величины $K_{AA_1}^{\perp}$ отражает тот факт, что в рассматриваемом приближении реальная часть флуктуаций поля в направлении главного максимума равна нулю.

Корреляционная функция $K_{BB_1}^{\perp}$ мнимых частей флуктуаций поля с учетом явного вида $S_0(c,\psi,0)$ определяется следующими выражениями:

для $c<<1$

$$K_{BB_1}^{\perp}(\psi,0,0)=\frac{2}{{\chi_0}^2}\alpha c^2\cdot\frac{J_1(\psi)}{\psi}, \tag{38}$$

и для $c >> 1$

$$K_{BB_1}^{\perp}(\psi,0,0)=\frac{2}{{\chi_0}^2}\alpha\frac{J_1(\psi)}{\psi}\left\{1-\frac{1}{c^2}\left[1-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi)}{\psi}\right]\right\}. \tag{39}$$

Соответственно нормированные корреляционные функции
для $c << 1$

$$R^{\perp}(\psi,0,0)=\frac{2}{\psi}J_1(\psi),\quad R_{BB_1}^{\perp}(\psi,0,0)=\frac{4}{\psi}J_1(\psi)\frac{1}{\sqrt{2\left(1+J_1(2\psi)/\psi\right)}}, \tag{40}$$

и для $c >> 1$

$$R^{\perp}(\psi,0,0)=sign\left(J_1(\psi)\right)\left[1-\frac{1}{c^2}\frac{J_2^2(\psi)}{J_1^2(\psi}\right],\quad R_{BB_1}^{\perp}(\psi,0,0)=sign\left(J_1(\psi)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right). \tag{41}$$

Результаты расчета величин $R^{\perp}(\psi,0,0)$ и $R_{BB_1}^{\perp}(\psi,0,0)$ для ряда значений параметра c приведены на рис. 5 и 6. Из этих рисунков видно, что по мере увеличения параметра c корреляционное расстояние увеличивается.

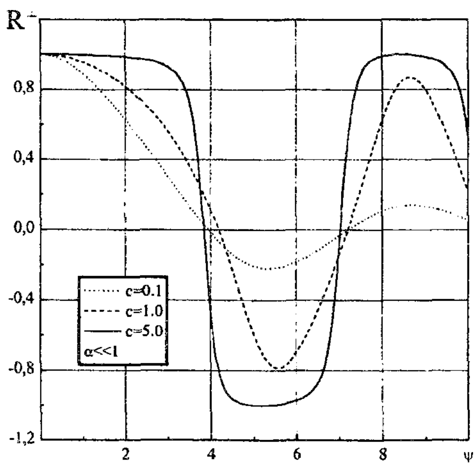

Рис. 5

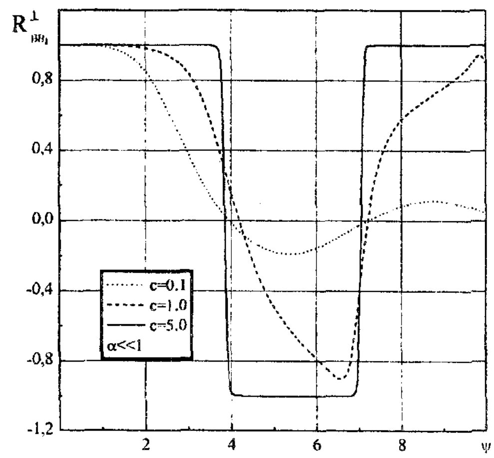

Рис. 6

Корреляция поля в симметричных точках. В этом случае $\psi=\psi_1$, $\Delta\varphi=\pi$ и из (22) имеем:

$$R_{AA_1,BB_1}^{\perp}(\psi,\psi,\pi)=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^n}{n!}(2-\delta_{0m})\left[(-1)^{m+n}\pm 1\right]S_m(c_n,\psi,\psi)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(2-\delta_{0m})\left[1\pm(-1)^{m+n}\right]S_m(c_n,\psi,\psi)}. \tag{42}$$

Используя формулу (19), можно по соотношению (42) рассчитать $R_{AA_1,BB_1}^{\perp}(\psi,\psi,\pi)$ при любых значениях дисперсии α и радиусов корреляции c флуктуаций.

При $c << 1$ имеем для произвольных значений дисперсии:

$$K_1^{\perp}(\psi,\psi,\pi)=\frac{1}{\chi_0^2}c^2e^{-\alpha}M_1(\alpha)\frac{J_1(2\psi)}{\psi},\quad K_2^{\perp}(\psi,\psi,\pi)=\frac{1}{\chi_0^2}c^2e^{-\alpha}M_2(\alpha)$$

и, соответственно:

$$K^{\perp}_{AA_1,BB_1}(\psi,\psi,\pi)=\frac{1}{2\chi_0^2}c^2e^{-\alpha}M_1(\alpha)\left[\frac{J_1(2\psi)}{\psi}\pm M_0(\alpha)\right].$$

При $\alpha<<1$, ограничиваясь в (42) слагаемыми с $n=1$, получим:

$$R^{\perp}_{AA_1}(\psi,\psi,\pi)=-1;\qquad R^{\perp}_{BB_1}(\psi,\psi,\pi)=1. \tag{43}$$

Соотношение (43) означает, что при малых флуктуациях фазы источников флуктуации поля в симметричных точках на фокальной сфере связаны линейной зависимостью. Аналогичный результат имеет место и для ЛИС для дальней зоны.

По мере увеличения флуктуаций источников связь флуктуаций поля в симметричных точках на фокальной сфере ослабевает. Покажем это для случая, когда $c<<1$. Из выражения (42) для $S_m(c,\psi,\psi)$, опуская промежуточные преобразования, имеем

$$R^{\perp}_{AA_1,BB_1}(\psi,\psi,\pi)=\left[\frac{J_1(2\psi)}{\psi}\pm M_0(\alpha)\right]\Big/\left[1\pm\frac{J_1(2\psi)}{\psi}M_0(\alpha)\right], \tag{44}$$

где $M_0(\alpha)$ определена соотношением (28) и ее график представлен на рис.2.

Поскольку модуль $M_0(\alpha)$ с ростом α стремится к нулю, то очевидно, что $\left|R^{\perp}_{AA_1,BB_1}\right|$ меняется от 1 при $\alpha=0$ и до $\frac{J_1(2\psi)}{\psi}$ при $\alpha>1$.

3. Корреляция амплитуд и фаз поля

При изучении этого вопроса ограничимся случаем малых фазовых флуктуаций в апертуре. При этом флуктуации амплитуды δP и фазы $\delta\Psi$ комплексного поля сфокусированной в зону Френеля круглой апертуры описываются следующими выражениями согласно [3]:

$$\delta P(\zeta,\psi,\varphi)=\cos\Psi_0\,\mathrm{Re}(\delta E)+\sin\Psi_0\,\mathrm{Im}(\delta E),$$

$$\delta\Psi(\zeta,\psi,\varphi)=\frac{1}{|E_0(\psi,\zeta)|}\left[\cos\Psi_0\,\mathrm{Im}(\delta E)-\sin\Psi_0\,\mathrm{Re}(\delta E)\right],$$

где величины с нулевым индексом относятся к случаю, когда флуктуации отсутствуют.

С учетом обозначений (5), имеем:

$$\delta P(\zeta,\psi,\varphi)=A(\zeta,\psi,\varphi)\cos\Psi_0+B(\zeta,\psi,\varphi)\sin\Psi_0,$$

$$\delta\Psi(\zeta,\psi,\varphi)=\frac{1}{|E_0(\zeta,\psi)|}B(\zeta,\psi,\varphi)\cos\Psi_0-A(\zeta,\psi,\varphi)\sin\Psi_0.$$

Если учесть, что

$$\cos\Psi_0=\frac{A_0(\zeta,\psi)}{|E_0(\zeta,\psi)|},\qquad \sin\Psi_0=\frac{B_0(\zeta,\psi)}{|E_0(\zeta,\psi)|},$$

то получим:

$$\delta P(\zeta,\psi,\varphi)=\frac{1}{|E_0(\zeta,\psi)|}\left[A_0(\zeta,\psi)A(\zeta,\psi,\varphi)+B_0(\zeta,\psi)B(\zeta,\psi,\varphi)\right], \tag{45}$$

$$\delta\Psi(\zeta,\psi,\varphi)=\frac{1}{|E_0(\zeta,\psi)|^2}\left[A_0(\zeta,\psi)B(\zeta,\psi,\varphi)-B_0(\zeta,\psi)A(\zeta,\psi,\varphi)\right]. \tag{46}$$

Корреляционные функции флуктуаций амплитуды K_{PP_1}, фазы $K_{\Psi\Psi_1}$ и их взаимные корреляционные функции запишутся следующим образом:

$$K_{PP_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\overline{\delta P(\zeta,\psi,\varphi)\delta P(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=\frac{1}{\left|E_0(\zeta,\psi)\right|\left|E_{01}(\zeta_1,\psi_1)\right|}\left[A_0A_{01}K_{AA_1}+B_0B_{01}K_{BB_1}+A_0A_{01}K_{AB_1}+B_0A_{01}K_{BA_1}\right], \quad (47)$$
$$K_{\Psi\Psi_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\overline{\delta\Psi(\zeta,\psi,\varphi)\delta\Psi(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=\frac{1}{\left|E_0(\zeta,\psi)\right|^2\left|E_{01}(\zeta_1,\psi_1,)\right|^2}\left[A_0A_{01}K_{BB_1}+B_0B_{01}K_{AA_1}-A_0B_{01}K_{BA_1}-B_0A_{01}K_{AB_1}\right], \quad (48)$$
$$K_{P\Psi_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\overline{\delta P(\zeta,\psi,\varphi)\delta\Psi(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=\frac{1}{\left|E_0(\zeta,\psi)\right|\left|E_{01}(\zeta_1,\psi_1)\right|^2}\left[A_0A_{01}K_{AB_1}-B_0B_{01}K_{BA_1}-A_0B_{01}K_{AA_1}+B_0A_{01}K_{BB_1}\right], \quad (49)$$
$$K_{\Psi P_1}(\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\overline{\delta\Psi(\zeta,\psi,\varphi)\delta P(\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)}=$$
$$=\frac{1}{\left|E_0(\zeta,\psi)\right|^2\left|E_{01}(\zeta_1,\psi_1)\right|}\left[A_0A_{01}K_{BA_1}-B_0B_{01}K_{AB_1}+A_0B_{01}K_{BB_1}-B_0A_{01}K_{AA_1}\right]. \quad (50)$$

Следует отметить, что выражения (45), (46) при $\zeta_1=\zeta$, $\psi_1=\psi$ преобразуются в полученные ранее выражения [2, 3] для дисперсий амплитуды и фазы поля $\sigma_P^2(\zeta,\psi)$, $\sigma_\psi^2(\zeta,\psi)$.

Нормированные корреляционные функции R_{PP_1}, $R_{\Psi\Psi_1}$, $R_{P\Psi_1}$, $R_{\Psi P_1}$ определяются соотношениями:

$$R_{PP_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\frac{K_{PP_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_P(\zeta,\psi)\sigma_{P_1}(\zeta_1,\psi_1)},\ R_{\Psi\Psi_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\frac{K_{\Psi\Psi_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_\Psi(\zeta,\psi)\sigma_{\Psi_1}(\zeta_1,\psi_1)}, \quad (51)$$
$$R_{P\Psi_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=\frac{K_{P\Psi_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_P(\zeta,\psi)\sigma_{\Psi_1}(\zeta_1,\psi_1)},\ R_{\Psi P_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1),\Delta\varphi=\frac{K_{\Psi P_1}(\zeta,\psi;\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)}{\sigma_\Psi(\zeta,\psi)\sigma_{P_1}(\zeta_1,\psi_1)}. \quad (52)$$

Формулы (45) – (50) позволяют рассчитать корреляционные характеристики флуктуаций амплитуды и фазы поля для круглой апертуры, сфокусированной в зону Френеля при малых фазовых флуктуаций поля возбуждения с произвольными значениями радиуса корреляции c.

Учитывая, что на фокальной сфере ($\zeta=\zeta_1=0$), получим:

$$F_0(0,\psi)=\frac{2J_1(\psi)}{\psi},\qquad A_0(0,\psi)=\frac{2J_1(\psi)}{\psi},\qquad B_0(0,\psi)=0$$

и для корреляционных функций амплитуды и фазы из (78) и (79) имеем:

$$K_{PP_1}^{\perp}(\psi,\psi_1)=sign\left[J_1(\psi)\cdot J_1(\psi_1)/\psi\psi_1\right]K_{AA_1}^{\perp}(c,\psi_1),$$
$$K_{\Psi\Psi_1}^{\perp}(c,\psi,\psi_1)=\frac{\psi\psi_1}{4J_1(\psi)\cdot J_1(\psi_1)}K_{BB_1}^{\perp}(c,\psi,\psi_1), \quad (53)$$
$$K_{P\Psi_1}^{\perp}(\psi,\psi_1)=K_{\Psi P_1}^{\perp}(\psi,\psi_1)=sign\left[J_1(\psi)/\psi\right]\frac{\psi_1}{J_1(\psi_1)}A_0A_{0_1}K_{AB_1}^{\perp}(\psi,\psi_1).$$

Соответственно нормированные корреляционные и взаимные корреляционные функции описываются следующими выражениями:

$$R^{\perp}_{PP_1,\Psi\Psi_1}(\psi,\psi_1)=R^{\perp}_{AA_1,BB_1}(\psi,\psi_1),\quad R^{\perp}_{P\Psi_1,\Psi P_1}(\psi,\psi_1)=R^{\perp}_{AB_1,BA_1}(\psi,\psi_1)$$

Ранее было показано, что на фокальной сфере $K^{\perp}_{AB_1}=0$ и $K^{\perp}_{BA_1}=0$ в силу вещественности $K^{\perp}_{1,2}(\psi,\psi_1)$. Следовательно, взаимные корреляционные функции $K^{\perp}_{P\Psi_1}$, $K^{\perp}_{\Psi P_1}$ также равны нулю и флуктуации амплитуд и фаз не коррелированны. Отметим, что корреляционная функция флуктуаций амплитуды поля определяется только корреляционной функцией флуктуаций вещественной компоненты поля $K^{\perp}_{AA_1}$, а фазы – мнимой компоненты $K^{\perp}_{BB_1}$. Поэтому характер изменения $K^{\perp}_{PP_1}$ и $K^{\perp}_{\Psi\Psi_1}$ от радиуса корреляции флуктуаций фазы источников такой же, как и у $K^{\perp}_{AA_1}$ и $K^{\perp}_{BB_1}$ соответственно и описывается выражениями (32), (33)

Заключение

В работе получены выражения для корреляционных и взаимных корреляционных функций вещественной и мнимой компонент поля, а также для амплитуды и фазы этого поля в зоне Френеля. Проанализированы зависимости указанных характеристик от параметров фазовых флуктуаций – их дисперсии и радиуса корреляции. Полученные результаты будут полезны при оценке разброса случайной ДН (амплитудной, фазовой, поляризационной в определенном угловом секторе), необходимого при решении ряда важных прикладных задач. К числу таковых можно, в частности, отнести задачу анализа потенциальной точности моноимпульсных РЛС или фазовых пеленгаторов, работающих в неоднородной среде, расчет надежности систем углового разнесенного приема и т.д.

Приложение

П. Вычисление функций $T^{(1),(2)}_n(c,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$

П.1 Общий случай

Исходные выражения для $T^{(1),(2)}_n(c,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)$ имеют вид

$$T^{(1),(2)}(c_n,\zeta,\psi,\varphi,\zeta_1,\psi_1,\varphi_1)=\int\limits_S\int\limits_{S'} e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}} e^{i2(\zeta u^2\mp\zeta_1 u_1^2)} J^{(1),(2)}(u,u_1,\psi,\varphi,\psi_1,\varphi_1)uu_1 du du_1, \quad (\text{П}.1)$$

где $c_n=c/\sqrt{n}$ и

$$J^{(1),(2)}(u,u_1,\psi,\varphi,\psi_1,\varphi_1)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{2uu_1}{c_n^2}\cos(\varphi'-\varphi_1')} e^{i[u\psi\cos(\varphi-\varphi')\mp u_1\psi_1\cos(\varphi_1-\varphi_1')]}d\varphi' d\varphi_1'. \quad (\text{П}.2)$$

Введем ряд переменных:

$\eta'=\varphi-\varphi'$, $\eta_1'=\varphi-\varphi_1'$, $\theta=\varphi_1'-\varphi'$, $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi$,

и заметим, что $\eta_1'-\eta_1=\theta+\Delta\varphi$.

С учётом новых переменных экспоненциальные множители в (П.2) запишутся следующим образом:

$e^{\frac{2uu_1}{c_n^2}\cos(\varphi'-\varphi_1')}=e^{x\cos\theta}$, $\quad e^{i\psi u\cos(\varphi-\varphi')}=e^{iy\cos\eta'}$, $\quad e^{\mp i\psi_1 u_1\cos(\varphi_1-\varphi_1')}=e^{\mp iy_1\cos\eta_1'}$.

Воспользуемся формулами Якоби – Ангера для производящих функций [5]:

$$e^{\mp iz\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\mp i)^n e^{in\varphi}J_n(z),\qquad e^{z\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}I_n(z). \quad (\text{П}.3)$$

где $J_n(z)$ и $I_n(z)$ – функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Бесселя n-го порядка соответственно.

С учетом (П.3) и введенных обозначений будем иметь:

$$e^{i\psi u\cos\eta'}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\psi u),\ e^{\mp i\psi_1 u_1\cos\eta_1'}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\mp1)^n i^n e^{in\eta_1'}J_n(\psi_1 u_1),$$

$$e^{i[\psi u\cos(\varphi-\varphi_1')\mp\psi_1 u_1\cos(\varphi_1-\varphi_1')]}=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(\mp1)^n i^{n+m}e^{i(n\eta'+m\eta_1')}J_n(\psi u)J_m(\psi_1 u_1),\ e^{\frac{2uu_1}{c_n^2}\cos(\varphi'-\varphi_1')}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\theta}I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right).$$

Тогда (П.2) принимает вид:

$$J^{(1),(2)}(u,u_1,\psi,\varphi,\psi_1,\varphi_1)=\sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty}(\mp1)^m i^{n+m}I_k\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_n(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}e^{i(n\eta'+m\eta_1')}d\eta' d\eta_1'. \quad (П.4)$$

Интегрирование по η' и η_1' дает следующий результат:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}e^{i(n\eta'+m\eta_1')}d\eta' d\eta_1'=4\pi^2\delta_{n,k}\delta_{n,(-m)}, \quad (П.5)$$

где $\delta_{n,k}$ символ Кронекера.

Подставив (П.5) в (П.6), после ряда преобразований получим:

$$J^{(1),(2)}(u,u_1,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=4\sum_{m=-\infty}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\mp1)^m\cos(m\Delta\varphi)I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1), \quad (П.6)$$

и имеем для $T_n^{(1),(2)}(c,u,u_1,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)$ соответственно

$$\begin{gathered}T_n^{(1),(2)}(c,\zeta,\psi,\zeta_1,\psi_1,\Delta\varphi)=4\sum_{m=-\infty}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\mp1)^m\cos(m\Delta\varphi)\times\\ \times\int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}}e^{i2(\zeta u^2\mp\zeta_1 u_1^2)}I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)\,uu_1\,du\,du_1\end{gathered}. \quad (П.7)$$

П.2 Асимптотические выражения для $T_n^{(1),(2)}(c,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)$ при $c<<1$ и $c>>1$

При произвольных c из (П.7), полагая $\zeta=\zeta_1=0$ и опуская нулевые значения из перечня аргументов, имеем

$$T_n^{(1),(2)}(c,\psi,\psi_1,\Delta\varphi)=4\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\pm1)^m\cos(m\Delta\varphi)S_m(c_n,\psi,\psi_1). \quad (П.8)$$

где

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=\int_0^1\int_0^1 e^{-\frac{u^2+u_1^2}{c_n^2}}I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)uu_1\,du\,du_1$$

Рассмотрим случай $c<<1$. Введем следующие обозначения:

$$f_m(u,u_1)=e^{-\frac{2uu_1}{c_n^2}}I_m\left(\frac{2uu_1}{c_n^2}\right)J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u_1)uu_1,\ s(u_1)=-(u-u_1)^2$$

Тогда $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$ в (П.8) примет вид:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1)=\int_0^1\int_0^1 e^{\frac{s(u_1)}{c_n^2}}f_m(u,u_1)du_1 du \quad (П.9)$$

Внутренний интеграл по u_1 в (П.9) является интегралом Лапласа и для вычисления его асимптотического (при $c\to0$) значения воспользуемся следующим разложением [7]:

$$\int_0^1 e^{\frac{s(u_1)}{c_n^2}}f_m(u,u_1)du_1\approx e^{\frac{s(u=u_1)}{c_n^2}}\sum_{k=0}^{\infty}b_k c^{2(k+\frac{1}{2})},$$

где

$$b_k = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2k)!}(\frac{d}{du_1})^k \{f_m(u_1,u)[\frac{2(s(u_1=u)-S(u_1,u))}{(u_1-u)^2}]^{-k-\frac{1}{2}}\}\Big|_{u_1=u}.$$

и ограничимся в нем главным членом. Тогда для (П.9) имеем:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1) = c_n\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{-\frac{2u^2}{c_n^2}} I_m(\frac{2u^2}{c_n^2})J_m(\psi u)J_m(\psi_1 u)u^2 du.$$

При вычислении интеграла при $c \to 0$, используем асимптотическое разложение $\exp\left(-2u^2/c_n^2\right)I_m\left(-2u^2/c_n^2\right)$ при больших значениях аргумента [6] и, ограничившись в нем членами первого порядка малости по c_n, для $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$ имеем:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1) = \frac{c_n^2}{2}\frac{\psi J_{m+1}(\psi)J_m(\psi_1) - \psi_1 J_m(\psi)J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2-\psi_1^2}. \qquad (П.10)$$

Подставив (П.10) в (П.8) получим окончательное выражение при $c \ll 1$

$$T_n^{(1),(2)}(c_n,\psi,\psi_1,\Delta\varphi) = 2c_n^2\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})(\pm 1)^m\cos(m\Delta\phi)\frac{\psi J_{m+1}(\psi u)J_m(\psi_1)-\psi J_m(\psi)J_{m+1}(\psi_1)}{\psi^2-\psi_1^2}. \qquad (П.11)$$

Рассмотрим теперь случай $c \gg 1$. Для получения асимптотического выражения для $T_n^{(1)(2)}(c,0,\psi,0,\psi_1,\Delta\varphi)$ при $c \gg 1$ воспользуемся разложением $I_m\left(2uu_1/c_n^2\right)$ [6]:

$$I_m(\frac{2uu_1}{c_n^2}) = \sum_{\hat{e}=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\frac{u^{2k+m}u_1^{m+2k}}{c_n^{2(m+2k)}}.$$

Тогда $S_m(c_n,\psi,\psi_1)$ в (П.8) запишется в следующем виде:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\frac{1}{c_n^{2(m+2k)}}\left\{\int_0^1 e^{-\frac{u^2}{c_n^2}}u^{m+2k}J_m(\psi u)udu\int_0^1 e^{-\frac{u_1^2}{c_n^2}}u_1^{m+2k}J_m(\psi_1 u_1)u_1 du_1\right\}.$$

Интегралы в фигурных скобках после разложения $\exp(u^2/c_n^2)$ в степенной ряд сводятся к сумме стандартных интегралов от произведения степенной и бесселевой функций [6]. Опуская простые, но громоздкие преобразования, получим:

$$S_m(c_n,\psi,\psi_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\frac{1}{c_n^{2(m+2k)}}F_{m,k}(\psi)F_{m,k}(\psi_1), \qquad (П.12)$$

где

$$F_{m,k}(\psi) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(m+p+k)!(p+k)!}{p!c_n^{2p}}\sum_{t=0}^{p+k}(-1)^t\frac{(m+2t+1)}{(m+p+k+t)!(p+k-t)!}\frac{J_{m+2t+1}(\psi)}{\psi}. \qquad (П.13)$$

Из выражений (П.12) и (П.13) видно, что если ограничиваться членами не выше второго порядка малости по $(1/\tilde{n}_n)$, то необходимо найти только $S_0(c_n,\psi,\psi_1)$ и $S_1(c_n,\psi,\psi_1)$. Соответствующие выражения имеют вид

$$S_0(c_n,\psi,\psi_1) = \frac{J_1(\psi)J_1(\psi_1)}{\psi\psi_1}\left\{1-\frac{1}{c_n^2}\left[1-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)}-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)}\right]\right\}, \qquad (П.14)$$

$$S_1(c_n,\psi,\psi_1) = \frac{1}{c_n^2}\frac{J_2(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi\psi_1}. \qquad (П.15)$$

Выражения (П.8), (П.14) и (П.15) позволяют получить в явном виде $T_n^{(1),(2)}$ при $c >> 1$:

$$T_n^{(1),(2)}(c,\psi,\psi_1,\Delta\varphi) = 4\left\{\frac{J_1(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi\psi_1}\left[1-\frac{1}{c_n^2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi)}{J_1(\psi)}-\frac{1}{2}\frac{J_3(\psi_1)}{J_1(\psi_1)}\right)\right]\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{2}{c_n^2}\cos(\Delta\varphi)\frac{J_2(\psi)J_2(\psi_1)}{\psi-\psi_1}\right\}. \qquad (П.16)$$

Список литературы: 1. *Шифрин Я.С.* Статистическая теория антенн // Справочник по антенной технике. В 5 т. / под ред. Л.Д. Бахраха и Е.Г. Зелкина. – М. : ИПРЖР, 1997. – Т. 1. – С. 148 – 206. Английский перевод (дополненное издание) Y.S. Shifrin. Statistical Antenna Theory (Theory Foundation, State-of-the-Art, Basic Applications) // Telecommunications and RadioEngineering. – 2001. – vol. 55, N 6–7. – P 1– 68. 2. *Шифрин Я.С., Должиков В.В.* Статистика поля антенны с круглой апертурой, сфокусированной в зону Френеля. Ч. 1. Средние характеристики поля // Электромагнитные волны и электронные системы: – 2010. – Т.15. – № 9. – С. 15-31. 3. *Шифрин Я.С., Должиков В.В.* Статистика поля антенны с круглой апертурой сфокусированной в зону Френеля. Ч. 2. Флуктуационные характеристики поля // Электромагнитные волны и электронные системы.- 2010. – Т.15. № 10. – С. 6-23. 4. *Шифрин Я.С.* Вопросы статистической теории антенн – М. : Сов. радио, 1970. Английский перевод Y.S. Shifrin. Statistical Antenna Theory. Golem Press, 1971. – 370 p. 5. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций – М. : ИЛ, 1949. 6. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. 7. *Федорюк М.В.* Метод перевала – М. : Наука, 1977.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 23.02.2011