НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Луханін В.С.
Науковий керівник – к.ф.-м.н., проф. Колосова С.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Леніна,14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), E-mail: pmkaf@kture.kharkov.ua

In this work we consider the possibility of application of the two-sided successive approximation method for the semilinear elliptic problem $-\Delta u = \lambda + u^p$, $x \in \Omega$, $u > 0, x \in \Omega$, $u = 0$, $x \in \partial\Omega$ ($\lambda > 0$, $p > 1$).

Рівняння вигляду $-\Delta u = f(u)$ описує багато реальних процесів, наприклад, якщо $f(u) = u^p$, $p > 0$, воно входить в математичну модель про розподіл густини газу у зорях.

У цій роботі розглядається питання побудови двобічних наближень, що збігаються до додатного розв'язку наступної крайової задачі [1]

$$-\Delta u = \lambda + u^p \qquad \forall x \in \Omega \subset R^2, \quad u > 0, \ x \in \Omega, \ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

де λ, p – дійсні параметри, $\lambda > 0$, $p > 1$.

Відомо [2], що задача (1) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int_\Omega G(x,\xi)\left(\lambda + u^p(\xi)\right)d\xi, \tag{2}$$

де $G(x,\xi)$ – функція Гріна оператора Лапласа першої крайової задачі в області Ω.

На конусі K невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій введемо у розгляд нелінійне операторне рівняння

$$u = Au, \tag{3}$$

де

$$Au(x) = \int_\Omega G(x,\xi)\left(\lambda + u^p(\xi)\right)d\xi.$$

Оператор A має такі властивості:

1) оператор A монотонний на конусі K, тобто $\forall u, v \in K$, таких що $u \le v$, виконано $Au \le Av$;

2) існує конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ такий, що $A\langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle$, де $v_0(x) \equiv 0$, $w_0(x) = 1 - \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < 1$.

3) оператор A угнутий на $\langle v_0, w_0 \rangle$, тобто на заданому конусному відрізку виконується наступна умова

$$A(tu) \ge tAu \quad \forall t \in [0,1]. \tag{4}$$

Складемо різницю

$$A(tu)-tAu=\int_{\Omega}\left[\lambda(1-t)+u^{p}\left(t^{p}-1\right)\right]G(x,\xi)d\xi .$$

Вона буде невід'ємною, якщо припустити

$$\frac{\lambda(1-t)}{1-t^{p}}\geq u^{p} .$$

Остання нерівність виконується $\forall u\in\langle v_0,w_0\rangle$, тому виконується і для $u=w_0=1-\varepsilon$, що приводить до умови

$$\frac{\lambda(1-t)}{1-t^{p}}\geq(1-\varepsilon)^{p} . \tag{5}$$

Якщо $p=2$, із співвідношення (5) отримаємо

$$\lambda\geq 2(1-\varepsilon)^{2} . \tag{6}$$

Умова (6) є обмеженням на вибір параметра ε.

4) оператор A u_0-угнутий, тобто $\forall t_0\in(0,1)$ можна вказати таке $\eta=\eta(u,t_0)>0$, що

$$A(t_0u)\geq(1+\eta)t_0Au$$

на відрізку, порівнянному з u_0.

В якості u_0 візьмемо

$$u_0(x)=\int_{\Omega}G(x,\xi)d\xi .$$

Встановлені властивості оператора А дозволяють зробити висновок, що існує, і притому єдиний, додатний розв'язок задачі (1) при $n=2$ на конусному відрізку $\langle v_0,w_0\rangle$, де $v_0=0$, $w_0=1-\varepsilon$ $(0\leq\varepsilon<1)$, якщо виконується умова (6), яка пов'язує параметри λ, p і ε.

Для задачі (1) будуємо ітераційний процес за схемою

$$u^{(k+1)}(x)=\int_{\Omega}G(x,\xi)\left[\lambda+\left(u^{(k)}(\xi)\right)^{p}\right]d\xi,\ k=0,1,2...,$$

отримаємо двобічні наближення

$$v_0\leq v_1\leq...\leq u^{*}\leq...\leq w_1\leq w_0 ,$$

де $u^{*}\in\langle v_0,w_0\rangle$ – точний розв'язок задачі (1).

1. Positive Solutions for a Nonhomogeneous Semilinear Elliptic Problem with Supercritical Exponent. Zhao Pei-hao, Zhong Cheng-kui, Zhu Jiang. Journal of Mathematical Analysis and Applications 254, 335-347 (2001)

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.:Наука, 1969. – 456 с.