



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2021 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студенту Артюх Поліні Андріївні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання процесів перемішування в'язкої рідини у двозв'язних областях

затверджена наказом по університету від 05 листопада 2021 р. № 1641 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2021 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель руху в'язкої нестисливої рідини

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	8 – 14 листопада 2021 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	15 – 21 листопада 2021 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	22 – 28 листопада 2021 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	29 листопада – 5 грудня 2021 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	6 – 9 грудня 2021 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 грудня 2021 р.	виконано

Дата видачі завдання 8 листопада 2021 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ доц. Гибкіна Н.В. \_\_\_\_\_  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 68 с., 1 табл., 7 рис., 1 дод., 57 джерел.

ЗАДАЧА ПЕРЕМІШУВАННЯ, ДВОЗВ'ЯЗНА ОБЛАСТЬ, МЕТОД ГАЛЬОРКІНА, МЕТОД  $R$ -ФУНКЦІЙ, СИСТЕМА НАВ'Є-СТОКСА, ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ.

Об'єкт дослідження – нестационарний процес перемішування в'язкої нестисливої рідини, що описується лінеаризованим диференціальним рівнянням відносно функції течії.

Мета роботи – отримання чисельно-аналітичного розв'язку для нестационарної задачі перемішування в'язкої нестисливої рідини у двозв'язній області.

Методи дослідження – методи  $R$ -функцій та Гальоркіна для нестационарних задач.

В роботі розглядається нестационарна задача перемішування в'язкої нестисливої рідини у двозв'язній області. Проведено аналіз стану проблеми та огляд методів математичного моделювання процесів перемішування. За допомогою методу  $R$ -функцій отримано структуру розв'язку задачі, а також побудовано рівняння області в аналітичному вигляді, для апроксимації невизначеної компоненти застосовано метод Гальоркіна. За результатами обчислювального експерименту наведено характеристики функції течії та функції завихреності.

## ABSTRACT

Introductory note: 68 pages, 1 table, 7 figures, 1 appendix, 57 sources.

DOUBLY-CONNECTED DOMAIN, FLUID MIXING PROBLEM, GALERKIN METHOD, NAVIER-STOKES SYSTEM, R-FUNCTIONS METHOD, STREAM FUNCTION

Object of research – unsteady mixing process of a viscous incompressible fluid, which is described by linearized equations with respect to the stream function.

Purpose of work – to obtain a numerical-analytical solution for the unsteady mixing problem of a viscous incompressible fluid in a doubly-connected domain.

Methods of research – the *R*-functions method combined with the Galerkin method for unsteady problems.

The paper is dedicated to the unsteady mixing problem of a viscous incompressible fluid in a doubly-connected domain. Analysis of the current problem state was conducted and review of methods of mathematical modelling was given. The solution structure was obtained by the application of the *R*-functions method, as well as the domain equation in an analytical form. The Galerkin method was used for approximation of the unknown component. As a result of the computational experiment, the stream function's and the vorticity function's characteristics were given.

## ЗМІСТ

	С.
Вступ .....	7
1 Аналіз стану проблеми і методів математичного моделювання процесів перемішування.....	9
1.1 Математичні моделі процесів перемішування.....	9
1.2 Огляд методів математичного моделювання процесів перемішування ...	13
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....	19
1.4 Постановка задач дослідження .....	21
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....	22
2.1 Метод $R$ -функцій .....	22
2.2 Метод Гальоркіна для нестационарних задач .....	27
2.3 Математичне моделювання процесів перемішування у двозв'язних областях методами $R$ -функцій і Гальоркіна .....	29
3 Програмна реалізація .....	36
3.1 Програмне середовище Mathematica .....	36
3.2 Алгоритм розв'язання задачі перемішування в'язкої рідини у двозв'язних областях .....	38
3.3 Опис програми .....	38
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз .....	40
Висновки .....	47
Перелік джерел посилання .....	48
Додаток А Вихідний код програми .....	54

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Сучасний розвиток обчислювальної техніки дозволяє проводити математичне моделювання різних фізичних процесів та спрощує дослідження можливих властивостей. Відомо, що фізичні експерименти займають багато часових та матеріальних ресурсів, а використання математичного апарату допомагає уникнути цих недоліків.

Однією з важливих фізичних задач є моделювання перемішування в'язкої нестисливої рідини у замкненій області. Математичною моделлю цієї задачі є система нелінійних диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса, що доповнена рівнянням неперервності. Нелінійність зумовлює складність знаходження аналітичного розв'язку, тому актуальною задачею є отримання чисельних та наближено-аналітичних розв'язків. Сучасні можливості комп'ютерів з паралельними обчислюваннями надають можливість швидкого знаходження чисельних розв'язків, наприклад, за допомогою методу сіток або скінченних елементів. Однак, той факт, що розв'язки відомі лише на деякій множині точок унеможливує його аналітичне дослідження. Тому розробка нових та вдосконалення існуючих наближено-аналітичних методів є актуальною задачею.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є застосування до математичного моделювання задачі перемішування в'язкої нестисливої рідини методів  $R$ -функцій та Гальоркіна. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі математичного моделювання процесів перемішування;
- застосувати метод розрахунку нестационарної течії у наближенні Стокса на основі методів  $R$ -функцій та Гальоркіна;
- розробити програмну реалізацію розв'язання тестових задач перемішування;
- провести обчислювальні експерименти та дослідити отримані результати.

*Об'єктом дослідження є нестационарний процес перемішування в'язкої нестисливої рідини, що описується лінеаризованим диференціальним рівнянням відносно функції течії у наближенні Стокса.*

*Предметом дослідження є математична модель і методи розв'язання задачі перемішування в'язкої нестисливої рідини у двозв'язних областях складної геометрії.*

**Методи дослідження.** У кваліфікаційній роботі використовуються метод  $R$ -функцій для отримання нормалізованого рівняння межі області та побудови розв'язку задачі; метод Гальоркіна та сплайни для апроксимації невизначених компонент структури; квадратурні формули Гаусса для чисельного інтегрування; явні методи Рунге-Кути з автоматичним вибором кроку інтегрування для розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь.

**Публікації.** Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на XXVI Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук АРАМС – 2021» (м. Львів, 27–28 вересня 2021 р.) [55].

# 1 АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ

## 1.1 Математичні моделі процесів перемішування

Математичною моделлю задачі перемішування рідини в області  $G \subset \mathbb{R}^3$  є система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса, яка виводиться з закону збереження маси. Розглянемо теорему про зміну головного вектору кількості руху системи, що застосована до механіки суцільних середовищ [45].

Теорема. Індивідуальна похідна (за часом) від головного вектору кількості руху об'єму рідини дорівнює головному вектору об'ємних та поверхневих сил, що діють на частинки, розташовані відповідно у об'ємі та на поверхні, що його обмежує.

Виділимо у рідини довільний скінченний об'єм  $\tau$ . Якщо  $\delta\tau$  – це елемент об'єму ( $m^3$ ), що містить точку  $M$  зі швидкістю  $\mathbf{v}$  ( $m/s$ ), тоді вектор його кількості руху  $\delta\mathbf{K}$  ( $kg \cdot m/s$ ) дорівнює

$$\delta\mathbf{K} = \rho\mathbf{v}\delta\tau,$$

де  $\rho$  – густина ( $kg/m^3$ ). Тоді головний вектор кількості руху у всьому об'ємі  $\tau$  дорівнює сумі або інтегралу елементарних кількостей руху:

$$\mathbf{K} = \int_{\tau} \rho\mathbf{v}\delta\tau.$$

Виходячи з тих же міркувань, головні вектори об'ємних та поверхневих сил будуть відповідно дорівнювати

$$\int_{\tau} \rho\mathbf{F}\delta\tau \text{ і } \int_{\tau} \mathbf{p}_n\delta\sigma,$$

де  $\mathbf{F}$  – густина розподілу об’ємних сил (об’ємна сила),  $m/c^2$ ;

$\mathbf{p}_n$  – вектор напружень, Па;

$\delta\sigma$  – елемент поверхні, що обмежує об’єм  $\delta\tau$ ,  $m^2$ .

Тоді сформульовану вище теорему про зміну кількості руху можна записати в наступному вигляді:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} \delta\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} \delta\tau + \int_{\sigma} \mathbf{p}_n \delta\sigma. \quad (1.1)$$

Перетворимо ліву частину цього рівняння:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} \delta\tau = \int_{\tau} \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v} \delta\tau) = \int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta\tau + \int_{\tau} \mathbf{v} \frac{d}{dt} (\rho \delta\tau) = \int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta\tau.$$

Тут інтеграл  $\int_{\tau} \mathbf{v} \frac{d}{dt} (\rho \delta\tau) = 0$  за умовою збереження маси.

В останньому доданку правої частини (1.1) проведемо заміну його виразом  $\mathbf{p}_n = n_x \mathbf{p}_x + n_y \mathbf{p}_y + n_z \mathbf{p}_z$ , де  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  – напрямні косинуси, та застосовуючи теорему Остроградського-Гаусса отримаємо:

$$\int_{\sigma} (n_x \mathbf{p}_x + n_y \mathbf{p}_y + n_z \mathbf{p}_z) \delta\sigma = \int_{\tau} \left( \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) \delta\tau = \int_{\tau} \operatorname{div} P \delta\tau.$$

Повертаючись до рівності (1.1), отримаємо

$$\int_{\tau} \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \operatorname{div} P \right) \delta\tau = 0.$$

Враховуючи, що об'єм інтегрування  $\tau$  – довільний, отримаємо рівняння динаміки суцільного середовища у напруженнях

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} P. \quad (1.2)$$

Для декартової системи координат рівняння (1.2) матиме вигляд:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \quad (1.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho F_y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \quad (1.4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho F_z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \quad (1.5)$$

До цих рівнянь додається рівняння неперервності, яке у тривимірному просторі має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.6)$$

Для нестисливої в'язкої рідини напруженості записуються в аналітичному вигляді:

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$p_{xy} = p_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right),$$

де  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості.

Підставимо ці вирази у рівняння (1.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \Delta v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta v_x.
\end{aligned}$$

Тут враховано, що для нестисливої рідини  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , що впливає з рівняння (1.6), виходячи з того, що  $\rho = \text{const}$ . Після аналогічних дій для рівнянь (1.4), (1.5) отримаємо

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v_y, \quad \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z.$$

Тоді, підставляючи отримані вирази в (1.3) – (1.5), вважаючи, що об'ємні сили відсутні ( $\mathbf{F} = 0$ ) та додаючи рівняння неперервності (1.6) для нестисливої рідини, отримаємо систему рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.10)$$

де  $\nu$  – коефіцієнт в'язкості рідини;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа;}$$

$t$  – час.

Рівняння (1.7) – (1.10) можна записати у векторному вигляді:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.12)$$

де  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  – оператор набла.

Розв'язання задачі (1.11), (1.12) пов'язано зі значними труднощами, які, в першу чергу, викликані наявністю нелінійного доданку  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ . Вважатимемо, що течія має невеликий порядок конвективних сил інерції до порядку сил в'язкості, тому нелінійним доданком можна знехтувати.

## 1.2 Огляд методів математичного моделювання процесів перемішування

Переважає більшість досліджень, що присвячені дослідженню потоку рідини, заснована на застосуванні конвекційних рівнянь Нав'є-Стокса, що доповнені умовою неперервності [4]. Рівняння Нав'є-Стокса випливають з постулатів (гіпотез) ньютонівської механіки континуума, кожна частинка якої розглядається як матеріальна точка.

Нелінійні явища з'являються в широкому спектрі наукових застосувань, таких як фізика плазми, фізика твердого тіла, динаміка рідини та хімічна кінетика [29]. Через підвищений інтерес до теорії одиночних хвиль для аналізу цих наукових моделей було використано широкий спектр аналітичних і чисельних методів. Математичне моделювання багатьох фізичних систем призводить до

нелінійних звичайних або диференціальних рівнянь у частинних похідних у різних галузях фізики та техніки.

Для аналізу математичної моделі, яка надає розв'язок, що відповідають фізичній реальності, потрібен ефективний метод. Звичайні аналітичні процедури лінеаризують систему або припускають, що нелінійності відносно незначні. Такі припущення іноді сильно впливають на розв'язок щодо реальної фізики явища. Таким чином, велике значення має пошук точних розв'язків нелінійного звичайного або диференціального рівняння з частинними похідними. Різні потужні математичні методи були запропоновані для отримання точних та наближених аналітичних розв'язків:

- зворотного розсіювання [2];
- метод  $\tanh$  [9];
- метод синус-косинус [34];
- метод однорідного балансу [8];
- метод Ехр-функції [20];
- метод розкладання Адоміана [3];
- метод аналізу гомотопії [24];
- метод гомотопічних збурень [18];
- варіаційні методи [17, 19].

Деякі з цих методів використовують специфічні перетворення для того, щоб звести рівняння до простіших або до системи рівнянь, а інші дають розв'язок у вигляді ряду, який збігається до точного розв'язку. Існують ще інші методи, які використовують пробну функцію в ітераційній схемі, яка швидко збігається.

Варіаційний ітераційний метод (VIM) вперше був запропонований Хе [17], систематично проілюстрований у 1999 р. [19] і використаний для надання наближених розв'язків задачі протікання в пористих середовищах з дробовими похідними. VIM корисний для отримання точних і наближених розв'язків лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь. У цьому методі вводяться загальні множники Лагранжа для побудови корекційного функціоналу задач. Мно-

жники можна оптимально визначити за допомогою теорії варіацій. Немає необхідності в лінеаризації чи дискретизації та великій обчислювальній роботі. Він був використаний для ефективного, легкого і точного розв'язування великого класу нелінійних задач з апроксимацією [32, 37]. Багато авторів [1, 28, 35] показали, що цей метод є більш потужним, ніж існуючі методи, такі як метод Адо-міана [3].

Ісмаїл і Раббох [21] представили обмежувальне наближення Паде для узагальнених рівнянь Фішера та Бургера-Фішера. Апроксимації Паде, які часто демонструють чудову продуктивність у порівнянні з серійними наближеннями, забезпечують успішний інструмент та перспективну схему для ідентичних застосувань.

Для отримання чисельного розв'язку системи Нав'є-Стокса найчастіше використовують наступні методи:

- метод скінченних різниць (МСР);
- метод скінченних елементів (МСЕ);
- метод радіально-базисних функцій (РБФ);
- метод Гальоркіна у поєднанні з методом  $R$ -функцій.

Одним з універсальних сіткових методів для розв'язання крайових задач є МСР. Він простий в програмній реалізації та дозволяє швидко отримувати результати для простих областей. Тим не менш, метод досить давно застосовується для отримання наближених розв'язків системи Нав'є-Стокса [12 – 14]. Так, наприклад, у роботі [30] МСР застосовується до початково-крайової задачі, що описує стаціонарну течію Стокса у багатозв'язній каверні з чотирма прямокутними вставками. Крайові умови задавались як на зовнішній, так і на внутрішніх межах. Додаткові крайові умови на функцію течії були виведені з умови єдиності тиску. Сітка підбиралась особливим чином: вузли сітки повинні зберігати форму внутрішніх об'єктів. Таким чином, до суттєвих недоліків цього методу можна віднести необхідність перебудови сітки для кожної зміни розташування внутрішніх прямокутників, складність урахування додаткових крайових умов, а також необхідність подрібнення сітки біля кутів меж областей.

Варто зазначити, що суттєвою перевагою знаходження розв'язків за допомогою МСР є можливість використання паралельних обчислень, зокрема, за допомогою технології CUDA. Це дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати та, як наслідок, провести більше експериментів за фіксований проміжок часу. Наприклад, у роботі [33] розглядається нестационарне рівняння Нав'є-Стокса з урахуванням теплопровідності у формулюванні «функція течії, завихреність» у прямокутній області зі вставкою. Використання паралельних обчислень на рівномірних сітках дозволило отримати значне прискорення обчислень. До недоліку слід віднести невелику точність обчислень, що зумовлена використанням типу float замість double, що є обмеженням, зумовленим особливостями технології CUDA.

Наступним найбільш вживаним методом є МСЕ, що дозволяє отримувати більш точні результати для складних областей у порівнянні з МСР. Варто зазначити, що можливість використання різних фігур в якості скінченних елементів (трикутники, піраміди, призми, прямокутники тощо) дозволяє регулювати розмір сітки, а також апроксимувати об'єкти зі складною формою межі, тобто більш точно враховувати початкові та крайові умови задачі.

Зазвичай МСЕ використовують для розв'язання нестационарної системи Нав'є-Стокса у формулюванні «функція течії, завихреність», як, наприклад, у роботах [11, 15]. У статті [15] МСЕ застосовувався до розв'язання початково-крайової задачі для багатозв'язних областей, виведені крайові умови для зовнішньої задачі. Автори провели значну кількість обчислювальних експериментів для багатозв'язних областей: прямокутник з квадратом в середині та прямокутник з аеродинамічним профілем крила.

Існує багато модифікацій МСЕ. Так, наприклад, Shao X. та Han D. пропонують використовувати спрощений дворівневий метод для розв'язання стационарної системи Нав'є-Стокса у формулюванні «функція течії» [31]. Цей метод вимагає розв'язання двох невеликих систем на грубому просторі (coarse space) та одну симетричну лінійну задачу на удосконаленому просторі (refined space). Це дозволило зменшити затрати на обчислення і зменшило складність

розв'язання у порівнянні з іншими відомими модифікаціями [7] та зі стандартним МСЕ [27]. Отримано багато чисельних розв'язків для задачі течії в каверні з прямокутною вставкою для різних чисел Рейнольдса.

Можливість використання різних типів елементів в МСЕ відкриває широкий простір практичного застосування чисельних розв'язків. Одним з прикладів є симуляція течії довкола профілей крила, що показано в роботі [5]. Математичною моделлю такої течії є нестационарне рівняння Нав'є-Стокса, яке записане в формулюванні «функція течії, завихреність». Дискретизація за часом проводилась за допомогою схеми Ейлера першого порядку з явним врахуванням в'язкості, а просторова дискретизація – за допомогою змішаного МСЕ. Окремо досліджено узагальнені крайові умови для зовнішніх течій. Обчислювальні результати отримано для прямокутних областей з різною кількістю аеродинамічних профілей. Як показано на схемах, розмір елементів зменшується при наближенні до внутрішніх об'єктів. Отримані результати добре узгоджуються з іншими авторами [15, 16].

Класичною тестовою задачею є задача обтікання циліндра рідиною в прямокутній відкритій області. Її широко використовують при доведенні ефективності розроблених методів або їх модифікації, зокрема, для стабілізованого МСЕ, приклад застосування якого показано в [6]. У роботі представлені чисельні розв'язки нестационарної системи Нав'є-Стокса в поєднанні з рівнянням переносу тепла, що робить їх корисними для різних інженерних задач, наприклад, при моделюванні вентиляційних систем. Стабілізований МСЕ характеризується більш простою програмною реалізацією і має менший негативний вплив на точність обчислень. Дискретизація за часом зроблена за допомогою широко відомої однокрокової схеми.

Як було зазначено вище, велика кількість переваг МСЕ зумовили його широке використання при моделюванні різних течій за допомогою системи Нав'є-Стокса. Однак, слід зауважити, що метод потребує великої кількості вхідних даних для побудови сітки, доволі складний в програмній реалізації та потребує обчислення інтегралів.

Крім сіткових методів, що описані вище, для розв'язання задачі розрахунку течії рідини використовуються безсіткові методи, які засновані на радіальних базисних функціях (РБФ). Головною перевагою безсіткових методів є те, що вони надають можливість дослідити фізичну область в будь-якій точці. У роботі [36] запропонована нова схема для нестационарної нестисливої рідини у формулюванні «функція течії, завихреність». Для отримання розв'язку використовується безсітковий метод РБФ, в якому точки колокації можуть бути обрані довільно. Це дозволяє уникнути складної проблеми побудови сітки, яка притаманна традиційному МСЕ, що є дуже затратною обчислювальною операцією. Відомо, що більш ніж 70% загального обчислювального часу витрачається на сіткові генератори. Для тестування запропонованого методу використовувались відомі точні розв'язки, які задовольняють системі Нав'є-Стокса. Відносна похибка склала 0,6 %.

У статтях [22, 23] розглядається нова обчислювальна процедура, що заснована на колокації точки на декартових сітках. Одновимірні інтегровані РБФ-мережі четвертого та другого порядку використовуються на лініях сітки для представлення функції течії та температури відповідно. Диференціальні рівняння для функції течії, які містять мішані похідні високого порядку, дискретизуються за допомогою точкової колокації. Відмічено, що загально прийняті РБФ-методи є глобальними та приводять до повних матриць. На відміну від загально прийнятих методів, запропонований метод використовує РБФ-центри на двох асоційованих лініях сітки, а не на всій множині РБФ-центрів, щоб сконструювати апроксимацію в даній точці. Обчислювальний експеримент було проведено для квадратної області з круглою вставкою, що обертається. Наведено порівняння з результатами, отриманими іншими методами.

Як узагальнення з приводу використання РБФ методів можна вказати, що вони мають багато переваг: можливість отримання гладких розв'язків навіть у багатозв'язних областях довільної геометрії, висока точність та швидкість збіжності до розв'язку апроксимованої цільової функції та здатність працювати в просторі будь-якої розмірності.

Окремо варто зазначити застосування методу  $R$ -функцій до моделювання фізичних процесів, який розробляється школою академіка НАН України В. Л. Рвачова. Цей структурно-варіаційний метод в поєднанні з методом Рітца (Гальоркіна) дозволяє знаходити наближені аналітичні розв'язки для стаціонарної (нестаціонарної) системи Нав'є-Стокса. За допомогою методу  $R$ -функцій можна побудувати рівняння будь-якої області, що складається з простих елементів (лінія, коло і т.д.), тобто точно задовольнити крайовим умовам задачі. Метод застосовувався до задач обчислювальної гідродинаміки в роботах Колосової С.В. [42, 43], Сидорова М. В. [52, 53], Максименко-Шейко К. В. [47, 48], Артюха А. В. [38, 40, 41], Слесаренка А. П. [54], Суворової І. Г. [56, 57].

### 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглянемо нестаціонарну задачу перемішування в'язкої нестисливої рідини в двозв'язній області  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  з кусочно-гладкою межею. Вважатимемо, що ділянки межі  $\partial\Omega_0$  нерухомі, а коло, що знаходиться всередині області і має межу  $\partial\Omega_1$ , рухається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\tau(t)$ . Припустимо, що в початковий момент часу рідина знаходиться у стані спокою ( $\tau(0) = 0$ ). Необхідно знайти розподіл поля швидкостей руху течії.

Рух течії описується лінеаризованою за Стоксом системою рівнянь:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1.15)$$

Розв'язок системи рівнянь (1.13) – (1.15) ускладнюється наявністю тиску  $p$  та рівняння неперервності (1.15), тому зручно використовувати функцію течії  $\psi = \psi(x, y, t)$ , яка дає можливість виключити з рівнянь тиск  $p$  та перетворити рівняння (1.15) у тотожність.

Введемо функцію течії  $\psi = \psi(x, y, t)$ , яка пов'язана з вектором  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  швидкостей рідини за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.16)$$

Використовуючи функцію течії  $\psi$ , задану співвідношеннями (1.16), система рівнянь Нав'є-Стокса (1.13) – (1.15) зводиться до одного лінійного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta \psi) + \nu \Delta^2 \psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad t > 0.$$

Початкові та крайові умови для функції течії можуть бути отримані з відповідних умов, які накладаються на вектор швидкості  $\mathbf{v}$ . Враховуючи припущення, наведені вище, крайові та початкові умови запишуться так:

$$\begin{aligned} \psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_1} = z(t), \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1} = \tau(t), \\ \psi|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

де  $z(t)$  – деяка невідома функція часу;

$\tau(t)$  – кутова швидкість  $\partial\Omega_1$ .

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного аналізу методів математичного моделювання процесів перемішування в'язкої рідини у багатозв'язних областях, можна зробити висновок, що перспективним є їх вдосконалення шляхом сумісного застосування методів  $R$ -функцій та Гальоркіна для нестационарних задач. Метою кваліфікаційної роботи є застосування до математичного моделювання задачі перемішування в'язкої нестисливої рідини методів  $R$ -функцій та Гальоркіна. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі математичного моделювання процесів перемішування;
- застосувати метод розрахунку нестационарної течії у наближенні Стокса на основі методів  $R$ -функцій та Гальоркіна;
- розробити програмну реалізацію розв'язання тестових задач перемішування;
- провести обчислювальні експерименти та дослідити отримані результати.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Метод $R$ -функцій

Введемо основні поняття теорії методу  $R$ -функцій [44, 51].

Означення.  $R$ -функцією (функцією В.Л. Рвачова) називається функція  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ , визначена всюди в  $\mathbb{R}^n$ , якщо існує така булева функція  $F$ , що

$$S[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S(x_1), \dots, S(x_n)], \quad S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Означення. Функція  $F$  з (2.1) називається супроводжуючою.

Кожній  $R$ -функції відповідає єдина супроводжуюча, обернене твердження неправильно.

Теорема. Множина  $R$ -функцій, що відповідає довільному розбиттю числової осі, є функціонально замкнутою.

Основною системою  $R$ -функцій є система  $\mathcal{R}_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv -x, \\ x_1 \wedge_\alpha x_2 &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left( x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right), \\ x_1 \vee_\alpha x_2 &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left( x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right). \end{aligned}$$

Супроводжуючими булевими функціями для них є відповідно  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ . Недоліком цієї системи при  $\alpha = 0$  є недиференційовність похідних в точці  $(0, 0)$ .

Означення. Під локусом будемо розуміти множину точок  $\mathbb{R}^n$ , для якої за допомогою деякої системи функцій  $H$  шляхом утворення їх суперпозиції мож-

на написати рівняння  $f(\vec{x}) = 0$ ,  $f \in \mathfrak{M}(H)$ .

Означення. Геометричний об'єкт, який можна задати рівнянням  $f(\vec{x}) = 0$ , назвемо елементарним локусом.

Перейдемо тепер до оберненої задачі аналітичної геометрії: для заданого в  $\mathbb{R}^2$  геометричного об'єкту  $\Omega$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  необхідно побудувати функцію  $\omega(x, y)$ , яка буде додатною всередині області  $\Omega$ , від'ємною поза межами  $\Omega$  та дорівнювати нулю на межі  $\partial\Omega$ . Таким чином, рівняння  $\omega(x, y) = 0$  буде визначати геометричне місце точок, яке відповідає межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$ .

Припустимо, що область  $\Omega$  можна побудувати за допомогою опорних локусів та записати у вигляді предикатного рівняння

$$\Omega \equiv F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = 1, \quad (2.2)$$

де  $\Sigma_i = (\sigma_i(x, y) \geq 0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – опорні локуси.

Для переходу від предикатної форми (2.2) до форми, прийнятої в аналітичній геометрії, область  $\Omega$  замінюють на  $\omega(x, y)$ , а предикатні операції  $\{\cap, \cup, \neg\}$  на відповідні їм  $R$ -операції  $\{\wedge_0, \vee_0, \neg\}$ . Таким чином, отримаємо єдиний аналітичний вираз  $\omega(x, y)$ , що за допомогою елементарних функцій визначає рівняння  $\omega(x, y) = 0$  межі  $\partial\Omega$ . При цьому для внутрішніх точок області буде справедлива нерівність  $\omega(x, y) > 0$ , а для зовнішніх –  $\omega(x, y) < 0$ .

Означення. Рівняння  $\omega(x, y) = 0$  межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  називається нормалізованим на межі  $\partial\Omega$ , якщо функція  $\omega(x, y)$  задовольняє умовам  $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \text{ де } \mathbf{n} \text{ – вектор зовнішньої нормалі до } \partial\Omega, \text{ визначений в її регуляр-}$$

них точках.

Теорема [51]. Якщо  $\omega_1(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^2)$  задовольняє умовам  $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$  і

$\frac{\partial \omega_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} > 0$ , то функція  $\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + |\nabla \omega_1|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^2)$ , задовольняє умовам

$\omega|_{\partial \Omega} = 0$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = -1$  в усіх регулярних точках межі  $\partial \Omega$ , а рівняння  $\omega(x, y) = 0$

називається нормалізованим.

У окремому випадку, коли  $|\nabla \omega_1| \neq 0$  в  $\Omega \cup \partial \Omega$  для побудови нормалізованого рівняння  $\partial \Omega$  можна скористатися більш простою формулою  $\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla \omega_1|}$ .

Наприклад, розглянемо область  $\Omega$  (рис. 2.1), яка є внутрішньою частиною кола з радіусом  $r=3$  та центром в точці  $(0,0)$ , що обмежена прямими  $y=2$  і  $y=-2$ .

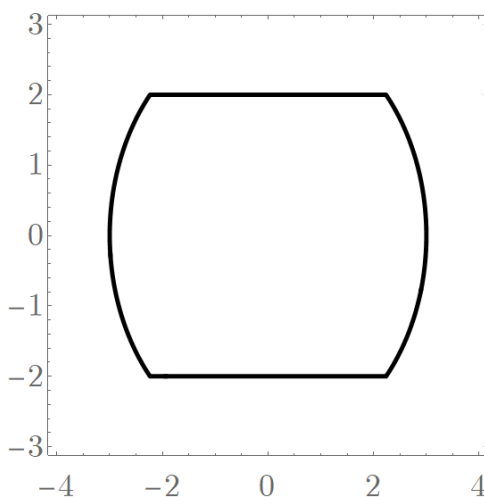


Рисунок 2.1 – Область  $\Omega$

Введемо наступні області:

–  $\Omega_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{6}(-x^2 - y^2 + 3^2) \geq 0 \right\}$  – внутрішня частина кола з радіусом

$r=3$  та центром в точці  $(0,0)$ ;

–  $\Omega_2 = \{(x, y) \mid 2 - y \geq 0\}$  – напівплощина під прямою  $y=2$ ;

–  $\Omega_3 = \{(x, y) \mid 2 + y \geq 0\}$  – напівплощина над прямою  $y=-2$ .

Тоді область  $\Omega$  можна представити у вигляді  $\bar{\Omega} = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$ . Якщо ж представити  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  та  $\Omega_3$  як двозначні предикати, то отримаємо таке предикатне рівняння області  $\bar{\Omega} \equiv \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3 = 1$ .

Підставляючи тепер замість  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  та  $\Omega_3$  відповідні ліві частини визначаючих їх нерівностей та скориставшись операцією  $R$ -кон'юнкції  $\wedge_0$ , отримаємо функцію

$$\omega(x, y) = \left[ \frac{1}{6}(-x^2 - y^2 + 3^2) \right] \wedge_0 [2 - y] \wedge_0 [2 + y] \equiv -4 + \frac{1}{6}(9 - x^2 - y^2) - \sqrt{(2 - y)^2 + (2 + y)^2} - \sqrt{\frac{1}{36}(9 - x^2 - y^2)^2 + \left(4 - \sqrt{(2 - y)^2 + (2 + y)^2}\right)^2}. \quad (2.3)$$

Функція (2.3) буде мати наступні властивості:

- $\omega(x, y) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- $\omega(x, y) > 0$  у  $\Omega$ ;
- $\omega(x, y) < 0$  зовні  $\bar{\Omega}$ ;
- $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = -1$ , де  $\mathbf{n}$  – вектор зовнішньої нормалі до  $\partial\Omega$ .

Розглянемо крайову задачу

$$Au = f, \quad (2.4)$$

$$L_i u \Big|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i, \quad (2.5)$$

де  $A: X \rightarrow Y$ ,  $X$ ,  $Y$  – функціональні простори;

$L_i$  – оператор крайових умов;

$\partial\Omega_i$  – покриття межі  $\partial\Omega$ .

Означення. Загальною структурою розв'язку крайової задачі (2.4), (2.5) називають вираз

$$u = B(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_i\}_{i=1}^m), \quad (2.6)$$

який при будь-якому виборі невизначеної компоненти  $\Phi$  точно задовольняє крайовим умовам. Тут  $B$  – оператор, що залежить від геометрії області  $\Omega$  та ділянок  $\partial\Omega_i$  її межі, а також операторів крайових умов  $L_i$ , але не залежить від вигляду оператора  $A$  та функції  $f$ .

Означення. Частинною структурою розв'язку називається формула

$$u = B_i(\Phi, \omega, \omega_i, \varphi_i),$$

яка при будь-якому виборі невизначеної компоненти  $\Phi$  точно задовольняє лише крайовим умовам на  $i$ -й ділянці межі  $\partial\Omega_i$ ,  $\Phi \in \mathfrak{M}$ .

Означення. Структура (2.6), яка враховує крайові умови (2.5), називається повною структурою на множині  $\mathfrak{M}$ , якщо існує  $\Phi^* \in \mathfrak{M}$ , для якого вираз

$$u^* = B(\Phi^*, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_i\}_{i=1}^m)$$

визначає точний розв'язок крайової задачі (2.4), (2.5).

Відомо [52], що якщо функція  $\psi = \psi(x, y, t)$  задовольняє крайовим умовам

$$\psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s, t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T],$$

то їм задовольняє жмуток функцій

$$\psi = f - \omega \cdot (D_1 f + g) + \omega^2 \Phi,$$

де  $f = EC\tilde{f}$ ,  $g = EC\tilde{g}$  – продовження функцій  $f$ ,  $g$  в  $\Omega$ ;

$\omega(x, y) = 0$  – рівняння межі  $\partial\Omega$ , записана за допомогою методу  $R$ -функцій;

$$D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y};$$

$\Phi = \Phi(x, y)$  – невизначена компонента.

Якщо межа  $\partial\Omega$  розбита на ділянки  $\partial\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , і на них задані крайові умови вигляду

$$\tilde{\varphi}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \varphi_1 & \text{на } \partial\Omega_1; \\ \dots & \dots \\ \varphi_m & \text{на } \partial\Omega_m. \end{cases}$$

Продовжимо функцію  $\tilde{\varphi}$  всередину області  $\Omega$ . Нехай  $\omega_i(x, y) = 0$  – нормалізоване рівняння  $\partial\Omega_i$ . Тоді функцію  $\varphi$  можна записати у вигляді

$$\varphi = EC\tilde{\varphi} = \frac{\varphi_1\tau_1 + \dots + \varphi_m\tau_m}{\tau_1 + \dots + \tau_m}, \quad (2.7)$$

де  $\tau_i = \frac{1}{\omega_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Означення. Оператор  $EC$  називається оператором склеювання.

## 2.2 Метод Гальоркіна для нестационарних задач

Введемо до розгляду операторне рівняння з початковою умовою [46, 49]

$$\frac{d}{dt}Au + Bu = f(t), \quad (2.8)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (2.9)$$

Нехай  $A, B$  – оператори, що діють в деякому сепарабельному гільбертовому просторі  $H$ . Нехай задача Коші (2.8), (2.9) має єдиний розв’язок. Розглянемо метод отримання наближених розв’язків задачі (2.8), (2.9).

Нехай оператори  $A, B$  – додатньо визначені. Вважатимемо, що їх області визначення  $D(A), D(B)$  перетинаються по деякій множині  $D$ , щільній у даному гільбертовому просторі  $H$  і в кожному з енергетичних просторів  $H_A, H_B$ . Тоді ці простори перетинаються по деякій множині  $D_0 \supset D$ , щільній в кожному з них, де  $D_0$  – повний гільбертовий простір зі скалярним добутком у вигляді

$$[u, v]_0 = [u, v]_A + [u, v]_B,$$

норму в  $D_0$  позначимо як  $|u|_0$ .

Нехай маємо координатну послідовність

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots, \quad (2.10)$$

яка задовольняє наступним умовам:

- а)  $\varphi_n \in D_0, n = 1, 2, \dots$ ;
- б)  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  лінійно незалежні при будь-якому  $n$ ;
- в) система (2.10) повна в  $D_0$ .

З в) випливає, що система (2.10) повна у будь-якому з просторів  $H_A, H_B$ .

Нехай  $\varphi$  та  $\psi$  з (2.10) належать простору  $D_0$ . Наближений розв’язок задачі (2.8), (2.9) шукатимемо у вигляді

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k.$$

Невідомі функції  $c_k(t)$  можна знайти з умови ортогональності похибки першим  $n$  координатним функціям, тобто необхідно розв'язати наступну систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \{ [\varphi_k, \varphi_j]_A \dot{c}_k(t) + [\varphi_k, \varphi_j]_B c_k(t) \} = (f(t), \varphi_j)_{L_2}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.11)$$

$$c_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.12)$$

де крапка означає диференціювання по  $t$ .

Теорема. Нехай оператори  $A$  і  $B$  неперервні та задовольняють умові

$$\left( \frac{d}{dt} Au + Bu, u \right) \geq 0.$$

Тоді система рівнянь (2.11), (2.12) має єдиний розв'язок.

### 2.3 Математичне моделювання процесів перемішування у двозв'язних областях методами $R$ -функцій і Гальоркіна

Розглянемо початково-крайову задачу для функції течії  $\psi = \psi(x, y, t)$  у двозв'язній області  $\Omega$  з кусочно-гладкими межами  $\partial\Omega_i$ ,  $i = 0, 1$ :

$$\frac{\partial(-\Delta\psi)}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (2.13)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_1} = z(t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_1} = \tau(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.14)$$

$$\psi|_{t=0} = 0. \quad (2.15)$$

Згідно з принципом суперпозиції  $\psi = \psi(x, y, t)$  можна подати у вигляді

$$\psi = \psi_0 + z(t)\psi_1, \quad (2.16)$$

де  $\psi_0 = \psi_0(x, y, t)$ ,  $\psi_1 = \psi_1(x, y, t)$  – нові невідомі функції. Тоді для розв'язання задачі (2.13) – (2.15) необхідно знайти розв'язки двох допоміжних задач:

$$\frac{\partial(-\Delta\psi_0)}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi_0 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (2.17)$$

$$\psi_0|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi_0|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_1} = \tau(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.18)$$

$$\psi_0|_{t=0} = 0, \quad (2.19)$$

i

$$\frac{\partial(-\Delta\psi_1)}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi_1 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (2.20)$$

$$\psi_1|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi_1|_{\partial\Omega_1} = 1, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2.21)$$

$$\psi_1|_{t=0} = 0. \quad (2.22)$$

Крайовим умовам вигляду (2.18), (2.21) задовольняє жмуток функцій

$$\psi = f - \omega \cdot (D_1 f + g) + \omega^2 \Phi, \quad (2.23)$$

де  $\omega(x, y) = 0$  – рівняння  $\partial\Omega$ , що записане за допомогою методу  $R$ -функцій;

$$D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y};$$

$\Phi = \Phi(x, y)$  – невизначена компонента.

Враховуючи формулу склеювання (2.7), отримаємо

– для задачі (2.17) – (2.19):

$$f_0 = 0, \quad g_0 = \frac{0 \cdot \omega_1 + \tau(t) \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1} = \frac{\tau(t) \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1},$$

– для задачі (2.20) – (2.22):

$$f_1 = \frac{0 \cdot \omega_1 + 1 \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1}, \quad g_0 = 0,$$

де  $\omega_0(x, y) = 0$ ,  $\omega_1(x, y) = 0$  – рівняння  $\partial\Omega_0$  і  $\partial\Omega_1$  відповідно.

Тоді згідно з структурно-варіаційним методом  $R$ -функцій, отримаємо структури розв'язку задач (2.17) – (2.19) та (2.20) – (2.22) відповідно:

$$\psi_0 = -\omega \frac{\tau(t) \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi_0, \quad (2.24)$$

$$\psi_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_1 \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi_1. \quad (2.25)$$

У задачі (2.17) – (2.19) зробимо заміну  $\psi_0 = \varphi_0 + u_0$ ,  $u_0$  – нова невідома функція,  $\varphi_0 = -\omega \frac{\tau(t) \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1}$ . Тоді для  $u_0$  отримаємо задачу з однорідними крайовими умовами:

вими умовами:

$$\frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u_0 = F_0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (2.26)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2.27)$$

$$u_0|_{t=0} = 0, \quad (2.28)$$

$$\text{де } F_0 = -\nu \Delta^2 \varphi_0 + \frac{\partial(\Delta \varphi_0)}{\partial t}.$$

Зробивши заміну  $\psi_1 = \varphi_1 + u_1$ , де  $u_1$  – нова невідома функція,  $\varphi_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_1 \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1}$ , отримаємо аналогічну (2.26) – (2.28) задачу з однорідними крайовими умовами для  $u_1$ :

$$\frac{\partial(-\Delta u_1)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u_1 = F_1, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (2.29)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2.30)$$

$$u_1|_{t=0} = 0, \quad (2.31)$$

$$\text{де } F_1 = -\nu \Delta^2 \varphi_1 + \frac{\partial(\Delta \varphi_1)}{\partial t}.$$

Для розв'язання задач (2.26) – (2.28) і (2.29) – (2.31) застосуємо метод Галльоркіна для нестационарних задач [49]. Введемо оператори  $A$  і  $B$ , що діють в  $L_2(0, T; L_2(\Omega))$  за правилами  $Au = \Delta^2 u$ ,  $Bu = -\Delta u$  на областях визначення

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{\mathbf{n}}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_B = \left\{ u \mid u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{\mathbf{n}}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

На  $D_A$  введемо енергетичний добуток  $[u, v]_A$ , враховуючи формулу Гріна [50], за правилом: для будь-яких  $u, v \in D_A$

$$[u, v]_A = (Au, v)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, dx dy = \iint_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx dy,$$

а відповідна енергетична норма дорівнює

$$\|u\|_A^2 = \iint_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy.$$

На  $D_B$  введемо енергетичний добуток  $[u, v]_B$ , враховуючи формулу Гріна, для будь-яких  $u, v \in D_B$  та відповідну норму:

$$[u, v]_B = (Bu, v)_{L_2(\Omega)} = -\iint_{\Omega} \Delta u \cdot v dx dy = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy,$$

$$\|u\|_A^2 = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy.$$

Відомо [50], що оператори  $A$  і  $B$  симетричні та додатньо визначені. Тоді, враховуючи введені оператори, задані задачі (2.26) – (2.28) і (2.29) – (2.31) можна записати в операторній формі:

$$\frac{d}{dt} B \Delta u_i + v A u_i = F_i, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad i = 0, 1, \quad (2.32)$$

$$u_i|_{t=0} = 0. \quad (2.33)$$

Варіаційне формування задачі (2.32), (2.33) можна записати у вигляді:

$$[u'_i, v]_B + v [u_i, v]_A = (F_i, v)_{L_2(\Omega)}, \quad t \in (0, T], \quad i = 0, 1, \quad (2.34)$$

$$(u_i, v)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad t = 0, \quad (2.35)$$

де  $u'$  – похідна за часом.

Для знаходження розв'язків задачі (2.34), (2.35) скористаємось методом Гальоркіна, згідно з яким наближений розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$u_{i,n}(t) = \sum_{j=1}^n c_{i,j}(t) \varphi_j, \quad (2.36)$$

де  $c_{i,j}(t)$ ,  $i=0,1$ ,  $j=\overline{1,n}$  – невідомі функції;

$\{\varphi_j\}$  – координатна послідовність.

Оскільки з (2.24), (2.25) випливає, що  $u_i = \omega^2 \Phi$ ,  $i=0,1$ , то координатну послідовність можна взяти в вигляді  $\varphi_j = \omega^2 \tau_j$ , де  $\{\tau_j\}$  – будь-яка повна в  $L_2(\Omega)$  система координатних функцій.

У відповідності з методом Гальоркіна невідомі функції  $c_{i,j}(t)$ ,  $i=0,1$ ,  $j=\overline{1,n}$ , будемо шукати з умови ортогональності помилки, що отримується при підстановці (2.36) в рівняння (2.34), першим  $n$  координатним функціям  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Як наслідок, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^n \dot{c}_{i,j}(t) b_{jk} + \nu \sum_{j=1}^n c_{i,j}(t) a_{jk} = l_{ik}(t), \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.37)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j}(0) s_{jk} = 0, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.38)$$

де  $b_{jk} = [\varphi_j, \varphi_k]_B$ ,  $a_{jk} = [\varphi_j, \varphi_k]_A$ ,  $l_{ik}(t) = (F_i, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}$ ,  $i=0,1$ ;

$$s_{jk} = (\varphi_j, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}.$$

Введемо до розгляду матриці  $C_i(t) = \{c_{i,j}(t)\}$ ,  $B = \{b_{jk}\}$ ,  $A = \{a_{jk}\}$ ,  $L_i(t) = \{l_{ik}(t)\}$ ,  $S = \{s_{jk}\}$ . Тут матриці  $B$ ,  $A$ ,  $S$  – квадратні порядку  $n$ , що не залежать від  $i$ , тобто однакові для всіх допоміжних задач, а  $C_i$ ,  $L_i$  – матриці-стовпці. Тоді задачу (2.37), (2.38) можна переписати в матричному вигляді:

$$BC'_i(t) + \nu AC_i(t) = L_i(t), \quad t \in (0;T], \quad i=0,1, \quad (2.39)$$

$$SC(0) = 0. \quad (2.40)$$

У роботі [39] доведено, що задача (2.39), (2.40) має узагальнений розв'язок і він єдиний.

Функцію  $z(t)$  для (2.16) знайдемо з умови однозначності тиску у двозв'язній області:

$$\oint_{\partial\Omega_1} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0.$$

Враховуючи, що для лінеаризованої задачі

$$\frac{\partial p}{\partial x} = v\Delta v_x - \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = v\Delta v_y - \frac{\partial v_y}{\partial t},$$

та беручи до уваги, що  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , отримаємо задачу Коші для невідомої функції  $z(t)$ :

$$a(t)z'(t) + b(t)z(t) + d(t) = 0, \quad z(0) = 0, \quad (2.41)$$

$$a(t) = \oint_{\partial\Omega_1} \left[ v \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t \partial y} \right] dx + \left[ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t \partial x} - v \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} \right] dy, \quad (2.42)$$

$$b(t) = \oint_{\partial\Omega_1} \left[ v \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial y} \right] dx + \left[ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial x} - v \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} \right] dy, \quad (2.43)$$

$$d(t) = \oint_{\partial\Omega_1} -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} dx + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dy. \quad (2.44)$$

Звідси, підставляючи  $z(t)$  в вираз (2.16), отримаємо  $\psi = \psi(x, y, t)$  – розв'язок задачі (2.13) – (2.15).

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Програмне середовище Mathematica

Wolfram Mathematica – програма символічних математичних обчислень, яку іноді називають програмою комп’ютерної алгебри, що використовується в багатьох наукових, інженерних, математичних та обчислювальних областях. Mathematica є потужним пакетом програм для математики і використовується майже у всіх галузях науки. Програма має широке застосування, починаючи від квантових обчислень, статистичного аналізу, теорії чисел, зоології, астрономії та багатьох інших. Mathematica надає багатий набір програмних розширень своєї мови для кінцевого користувача, і це дозволяє писати програми в процедурному, функціональному або логічному (на основі правил) стилі або в суміші всіх трьох. Для завдань, що вимагають інтерфейсів із зовнішнім середовищем, Mathematica надає протокол MathLink, що дозволяє зв’язувати математичні програми із зовнішніми програмами, написаними на C, C++, F77, F90, F95, Java або іншими мовами.

Стівен Вольфрам, головний розробник системи та автор документації користувача для системи, визначає декілька цілей для Mathematica, які коротко наведено нижче [10]:

- забезпечити систему для виконання інтерактивних символічних математичних обчислень (інтерактивна Mathematica);
- забезпечити середовище для математичної демонстрації та навчання;
- забезпечити мову програмування, яка об’єднує ідеї процедурного програмування, функціонального програмування, програмування на основі правил, об’єктно-орієнтованого програмування та програмування на основі обмежень;
- забезпечити засоби для точних символічних обчислень і числових обчислень довільної точності;
- забезпечити середовище для спрощення та маніпулювання математичними функціями та об’єктами;

– забезпечити високоякісну побудову графіків алгебраїчних або дискретних обчислень у форматі, яким можна маніпулювати далі;

– забезпечити вбудовану функціональність (типи даних) для алгебраїчних маніпуляцій з формулами, що містять поліноми, раціональні функції, звичайні функції елементарного обчислення, розширені функції фізики («спеціальні функції»), функції теорії чисел, комбінаторики, а також складні структури даних (списки, матриці, літеральні функції та аргументи тощо) та пошук помилок.

Найскладніша модель інтерфейсу, що надається, називається ноутбуком. Користувач вводить команди у вигляді тексту в контурний процесор-секцію. Комп'ютер створює додатковий текст і відображає його в секції.

Функціональні та орієнтовані на список характеристики мови Wolfram Language дозволяють їй забезпечити нативний вбудований паралелізм даних, автоматично розподіляючи обчислення між доступними комп'ютерами та ядром процесора.

Паралелізація – це форма обчислень, при якій можна виконувати багато операцій одночасно [26]. Паралельне обчислення використовує декілька елементів обробки одночасно для завершення роботи. Це досягається шляхом розбиття завдання на незалежні частини, де кожен елемент обробки міг виконувати свою частину алгоритму одночасно з іншими. Елементи обробки можуть бути різноманітними і включати в себе ресурси, такі як комп'ютер з кількома процесорами, кілька комп'ютерів, що під'єднано до мережі, спеціалізоване обладнання або будь-яку комбінацію перерахованого вище.

Протокол зв'язку MathLink можна використовувати для керування кількома процесами ядра Mathematica всередині самої Mathematica [25]. Ця функція дозволяє реалізувати середовище для паралельного програмування, Parallel Computing Toolkit, використовуючи процеси з розподіленою пам'яттю. Високорівнева мова програмування Mathematica дозволяє легко і природно виразити парадигми паралельного програмування та розпаралелювати інші, чисто числові обчислення.

### 3.2 Алгоритм розв'язання задачі перемішування в'язкої рідини у двозв'язних областях

Крок 1. Задати вихідні дані:

– ширина та висота прямокутника, координати центру кола та його радіус;

– коефіцієнт в'язкості рідини;

– кінцевий момент часу.

Крок 2. Ввести систему  $R$ -функцій  $\mathcal{R}_0$  та записати нормалізоване рівняння області  $\omega(x, y) = 0$ .

Крок 3. Реалізувати чисельне інтегрування.

Крок 4. Задати координатні функції.

Крок 5. Записати структури розв'язків  $\psi_0$  (2.24) і  $\psi_1$  (2.25).

Крок 6. Перейти до задач з однорідними крайовими умовами.

Крок 7. Обчислити інтеграли, що є елементами матриць  $B$ ,  $A$ ,  $S$  та векторів  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  у системі звичайних диференціальних рівнянь (2.39), (2.40).

Крок 8. Знайти коефіцієнти методу Гальоркіна з системи звичайних диференціальних рівнянь та отримати вирази для  $\psi_0$  та  $\psi_1$ .

Крок 9. Розв'язати задачу Коши (2.41) – (2.44) та знайти  $z(t)$ .

Крок 10. Отримати розв'язок задачі перемішування (2.13) – (2.15), скориставшись результатами, які отримано в кроках 8 та 9.

### 3.3 Опис програми

Програма розрахунку функції течії для задачі перемішування (2.13) – (2.15) була розроблена мовою програмування Wolfram у середовищі Mathematica. Програма умовно поділяється на 10 логічних блоків. Далі коротко наведемо опис кожного з них.

Введення початкових даних. На цьому етапі задаються ширина  $a$  та висота  $b$  прямокутника і координати центру кола  $(c, d)$  та його радіус  $r$ , коефіцієнт в'язкості рідини  $\nu$  та кінцевий момент часу  $T$ :  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=0,5$ ,  $d=0,5$ ,  $r=0,25$ ,  $\nu=1$ ,  $T=2\pi$ .

Система  $R$ -функцій  $\mathcal{R}_0$ . Задаємо функції для операцій  $\wedge_0$ ,  $\vee_0$ , елементарні локуси та отримуємо нормалізоване рівняння межі області  $\omega(x, y) = 0$ .

Чисельне інтегрування. Задаємо коефіцієнти для квадратурної формули Гаусса за допомогою нулів полінома Лагранжа 16-го степеня.

Координатні функції. Задаємо функцію для сплайнів Шенгберга 6-го порядку та функції для її похідних до 3-го порядку.

Структура розв'язку та її диференціювання. Задаємо структури розв'язків  $\psi_0$  та  $\psi_1$ . Використовуючи функцію  $D[]$ , обчислюємо похідні до 3-го порядку для складових структур розв'язків та функції області  $\omega(x, y)$ .

Обчислення матриць, які не залежать від ітерації, та векторів і чисел. За допомогою вбудованих функцій `ParallelTable[]`, `ParallelDo[]` та `SetSharedVariable[]`, а також квадратурної формули Гаусса, обчислюємо інтеграли, що є елементами матриць  $B$ ,  $A$ ,  $S$  та векторів  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $C_0$ ,  $C_1$ .

Невідомі змінні та розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь. Використовуючи функцію `NDSolve[]` та метод `ExplicitRungeKutta`, розв'язуємо системи звичайних диференціальних рівнянь та знаходимо коефіцієнти методу Гальоркіна.

Обчислення  $z(t)$ . Обчислюємо вирази для коефіцієнтів  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $d(t)$ , беручи за основу функцію для чисельного інтегрування `NIntegrate[]`. За допомогою `DSolve[]` отримуємо розв'язок задачі Коши для  $z(t)$ . Обчислюємо розв'язок задачі перемішування та його похідні. Графіки функції течії, завихреності та вектору швидкостей отримано, використовуючи функції `ContourPlot[]`, `StreamDensityPlot[]`, `VectorPlot[]` та `Plot3D[]`.

Таблиці. Обчислюємо норми для функції течії, компонент вектору швидкості та завихреності в залежності від часу  $t$ .

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

В ході обчислювального експерименту було розв'язано задачу перемішування (2.12) – (2.14) в наступному вигляді (коефіцієнт в'язкості рідини  $\nu = 1$ ):

$$\frac{\partial(-\Delta\Psi)}{\partial t} + \nu\Delta^2\Psi = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, 2\pi], \quad (4.1)$$

$$\Psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \Psi|_{\partial\Omega_1} = z(t), \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega_1} = -1 + e^{-t}, \quad t \in (0, 2\pi], \quad (4.2)$$

$$\Psi|_{t=0} = 0. \quad (4.3)$$

Область  $\Omega$  (рис. 4.1) – внутрішня частина прямокутника з вершинами у точках  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  та вирізом у вигляді кола з радіусом  $r = 0,25$  і центром в  $(0,5;0,5)$ , тобто

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\} / \{(x, y) | (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 \leq 0,25^2\}.$$

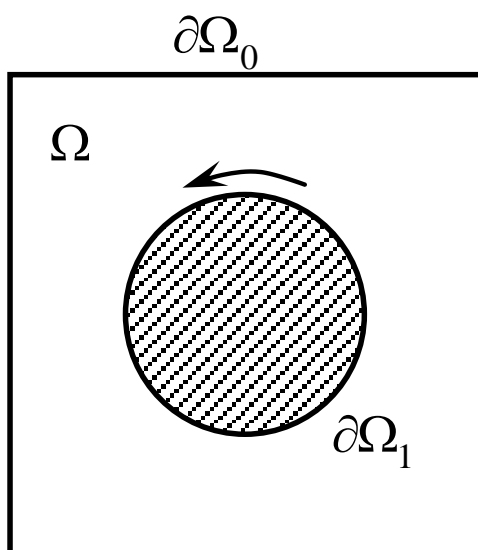


Рисунок 4.1 – Область  $\Omega$

Нормалізоване рівняння області  $\Omega$  в системі  $\mathcal{R}_0$  має вигляд

$$\omega(x, y) = \left( \frac{1}{a} x(a-x) \right) \wedge_0 \left( \frac{1}{b} y(b-y) \right) \wedge_0 \left( \frac{1}{2r} ((x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2) \right) = 0.$$

Для реалізації чисельного інтегрування було обрано квадратурну формулу Гаусса з вузлами, що є нулями полінома Лежандра 16-го степеня. За координатні функції у методі Гальоркіна обрано сплайни Шенберга шостого степеня:

$$\varphi_i(x, y) = B_6 \left( \left| \frac{N_x x}{a} - i \right| \right) \cdot B_6 \left( \left| \frac{N_y y}{b} - i \right| \right),$$

де  $N_x = 10$ ,  $N_y = 10$ , а  $B_6$  має вигляд

$$B_6(x) = \begin{cases} \frac{11}{20} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{12}, & 0 < x < 1; \\ \frac{17}{40} + \frac{5x}{8} - \frac{7x^2}{4} + \frac{5x^3}{4} - \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{24}, & 1 < x < 2; \\ \frac{243}{120} - \frac{81x}{24} + \frac{9x^2}{4} - \frac{3x^3}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{120}, & 2 < x < 3. \end{cases}$$

Структури розв'язку (2.24), (2.25) допоміжних задач мають вигляд:

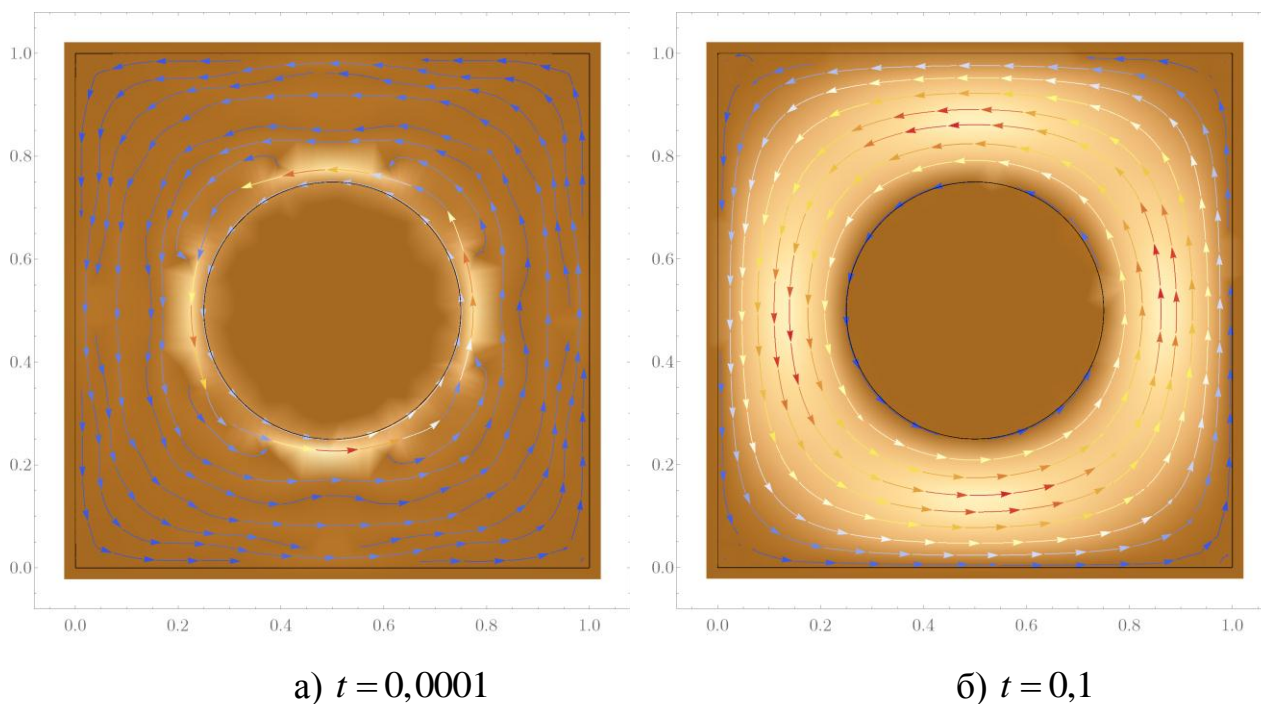
$$\psi_0 = -\omega \frac{(-1 + e^{-t}) \cdot \omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi, \quad \psi_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_1 \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi.$$

У таблиці 4.1 наведені норми функції течії, компонент вектору швидкості та завихреності. Зі збільшенням часу значення майже не змінюються, тобто течія виходить на стаціонарний режим.

Таблиця 4.1 – Норми в  $L_2(\Omega)$ 

$t$	$\ \psi\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_x\ _{L_2(\Omega)}$	$\ v_y\ _{L_2(\Omega)}$	$\ \zeta\ _{L_2(\Omega)}$
0,01	0,0270444	2,2382982	2,2382982	37,1918453
0,05	0,0552382	2,2412091	2,2412091	37,3507815
0,1	0,0569046	2,2438919	2,2438919	37,5419758
0,5	0,0519146	2,2617420	2,2617420	38,7772558
1,0	0,0479509	2,2767580	2,2767580	39,7723806
2,0	0,0442206	2,2920054	2,2920054	40,7474575
3,0	0,0428879	2,2977651	2,2977651	41,1074373
4,0	0,0424036	2,2999041	2,2999041	41,2400321
5,0	0,0422264	2,3006937	2,3006937	41,2888331
$2\pi$	0,0421519	2,3010264	2,3010264	41,3093662

На рисунку 4.2 показані поля вектору швидкостей для різних значень часу. Так, при  $t = 0,0001$  бачимо, що циліндр тільки починає обертатись і перемішування ще не почалось. З рисунку 4.2 б) видно, що швидкість більша довкола циліндра (більш світлий колір фону) і рідина вже перемішана.

Рисунок 4.2 – Поле вектору швидкостей  $(v_x, v_y)$  в залежності від часу  $t$



значеннях  $t$ . Напрямок росту функції зумовлений напрямом руху циліндра, що знаходиться в центрі квадрату.

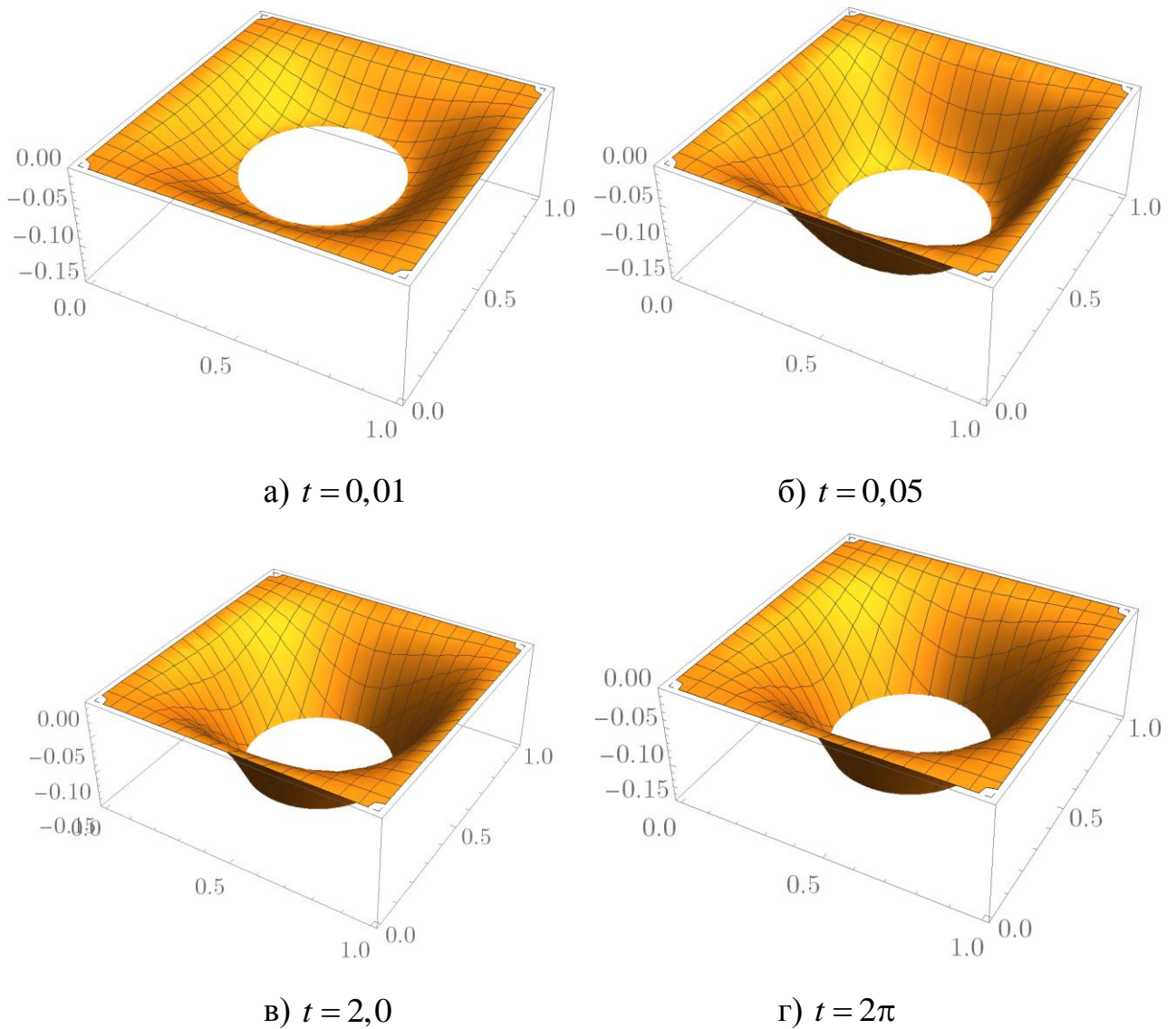
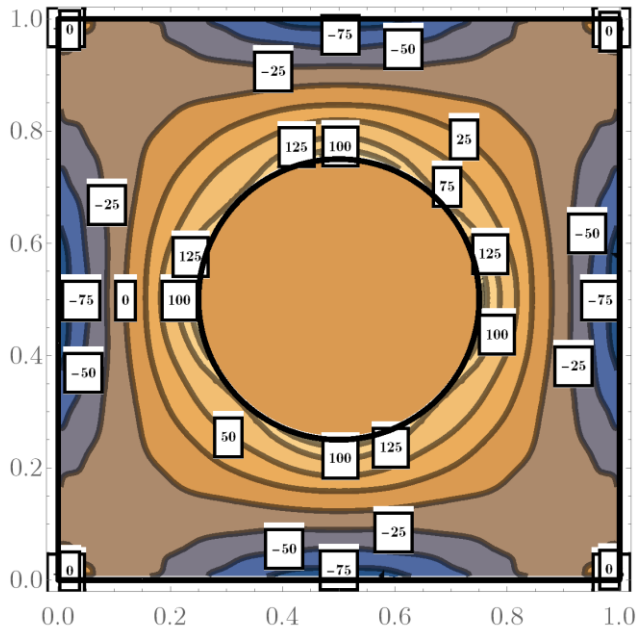
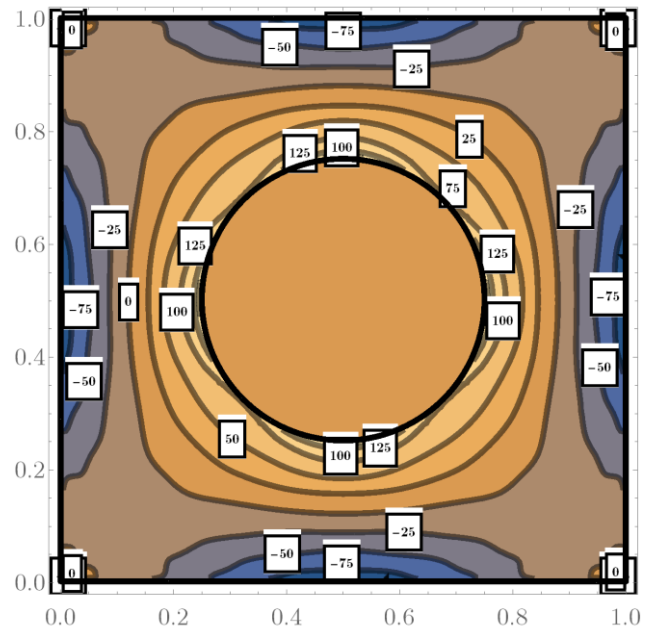
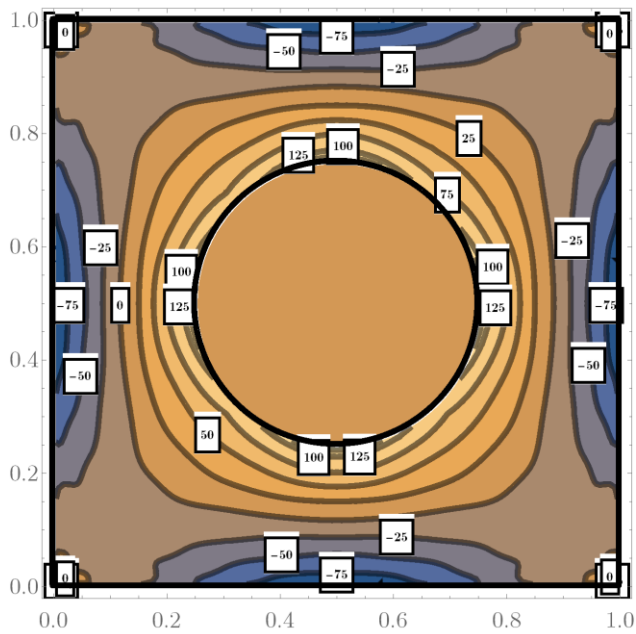
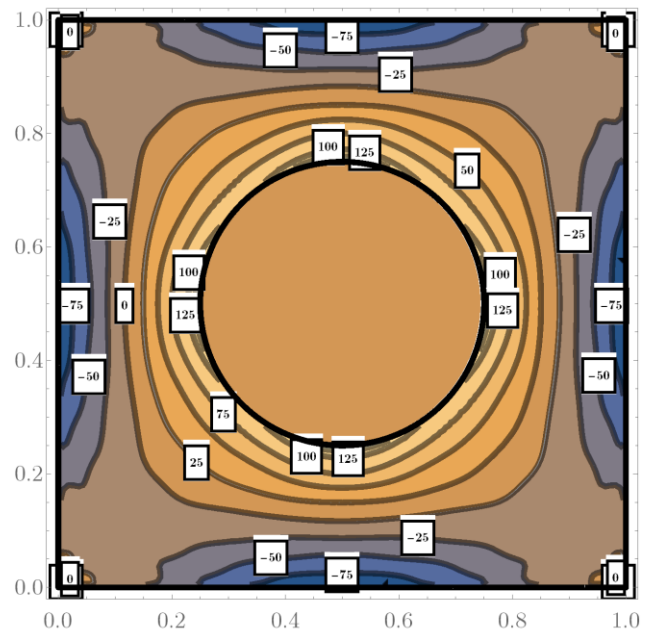


Рисунок 4.4 – Графік поверхні функції течії  $\psi(x, y, t)$  в залежності від часу  $t$

На рисунку 4.5 представлені лінії рівня завихреності  $\zeta = -\Delta\psi$ . З рисунків видно, що функція майже не змінюється з часом і має однакову структуру.

а)  $t = 0,01$ б)  $t = 0,05$ в)  $t = 2,0$ г)  $t = 2\pi$ Рисунок 4.5 – Лінії рівня функції завихреності  $\zeta(x, y, t)$  в залежності від часу

На рисунку 4.6 зображені тривимірні графіки функції завихреності  $\zeta$ . Деякі нерівності по краях можна віднести до помилок при побудові графіків.

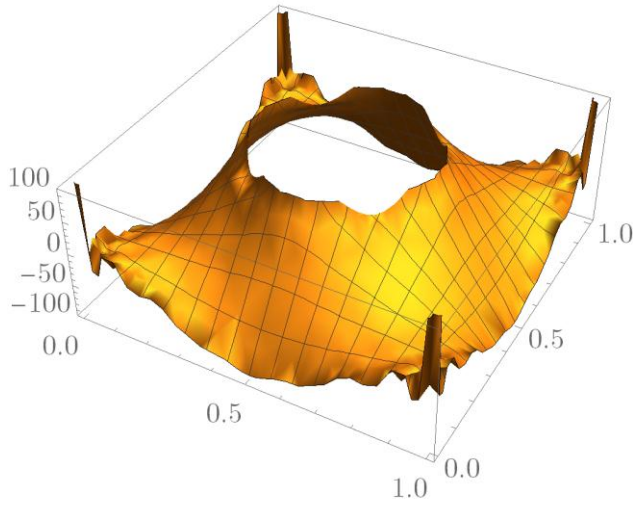
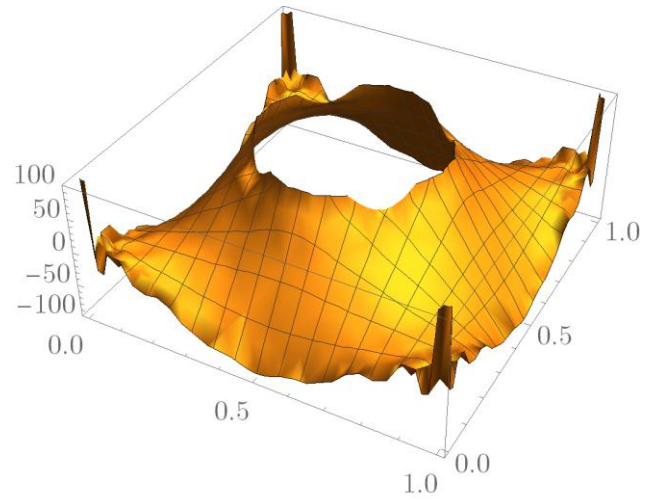
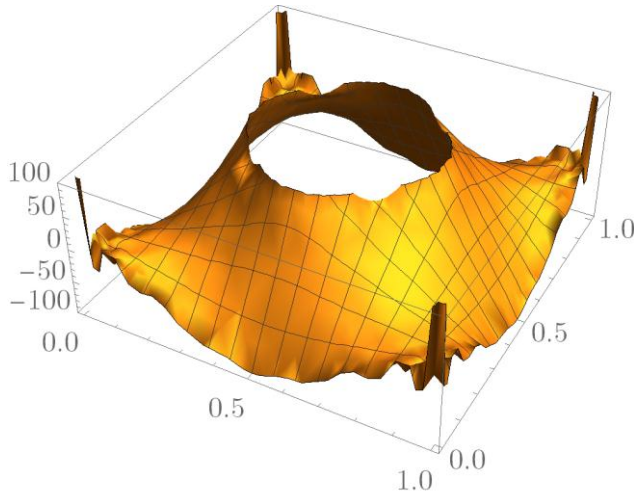
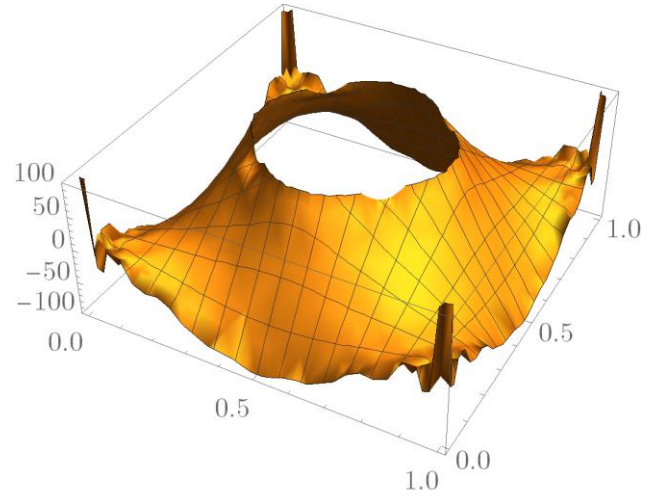
а)  $t = 0,01$ б)  $t = 0,05$ в)  $t = 2,0$ г)  $t = 2\pi$ 

Рисунок 4.6 – Графік поверхні функції завихреності  $\zeta(x, y, t)$   
в залежності від часу  $t$

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі вдосконалено метод математичного моделювання процесу перемішування в'язкої нестисливої рідини у двозв'язних областях, що описується системою рівнянь Нав'є-Стокса та рівнянням неперервності у наближенні Стокса. З метою зменшення розмірності задачі, а також автоматичному виконанню рівняння неперервності була введена функція течії, яка пов'язана з вектором швидкостей. Отримане диференціальне рівняння четвертого порядку розв'язувалось за допомогою методів  $R$ -функцій та Гальоркіна. Це дозволило отримати наближено-аналітичний розв'язок поставленої задачі. Метод  $R$ -функцій був використаний для отримання структури розв'язку, а також для побудови аналітичного рівняння області, в якій розглядалась задача. Це дозволило точно задовольнити крайовим умовам, а після введення відповідної заміни – отримати початково-крайову задачу з однорідними крайовими умовами, що є необхідною умовою для застосування методу Гальоркіна для нестационарних задач.

У роботі проведено обчислювальний експеримент для області, що є квадратом з циліндром всередині, який обертається. Побудовані лінії рівня та тривимірні графіки функції течії та завихреності при різних значеннях часу, а також вектору швидкостей. Отримані числові характеристики течії: норми функцій у відповідному просторі. Також проведено аналіз результатів та їх можливе застосування для різних прикладних фізичних задач.

На основі проведених досліджень можна стверджувати, що побудований метод та отримані на його основі результати мають високу практичну цінність і можуть бути використані при математичному моделюванні процесів перемішування у областях різної геометрії. Варто зазначити, що розроблений метод не змінюється при переході до нової області.

У подальшому планується розглянути нелінійну задачу в поєднанні з температурою, що значно розширить можливості практичного застосування методу.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Abdou M. A., Soliman A. A. Variational–iteration method for solving Burgers’ and coupled Burgers’ equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. Vol. 181. P. 245–251.
2. Ablowitz M. J., Clarkson P. A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering transform. Cambridge : Cambridge University Press, 1990. 516 p.
3. Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition methods. Dordrecht : Springer, 1994. 354 p.
4. Baranovskii E., Burmasheva N., Prosviryakov E. Exact Solutions to the Navier–Stokes Equations with Couple Stresses // Symmetry. 2021. Vol. 13. P. 1–12.
5. Biava M., Modugno D., Quartapelle L., Stoppelli M. Weak  $\psi$ – $\omega$  Formulation for Unsteady Flows in 2D Multiply Connected Domains // Journal of Computational Physics. 2002. Vol. 177, № 2. P. 209–232.
6. Dyja R., Gawronska E., Grosser A. Numerical problems related to solving the Navier-Stokes equations in connection with the heat transfer with the use of FEM // Procedia Engineering. 2017. Vol. 177. P. 78–85.
7. Fairag F. Two-level finite element method for the stream function formulation of the Navier–Stokes equations // Computers & Mathematics with Applications : Pergamon. 1998. Vol. 36. P. 117–127.
8. Fan E., Zhang H. A note on the homogeneous balance method // Physics Letters A. 1998. Vol. 246, № 5. P. 403–406.
9. Fan E. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations // Physics Letters A. 2000. Vol. 277, № 4. P. 212–218.
10. Fatemaw R. J. A Review of Mathematica. // Journal of Symbolic Computation. 1992. Vol. 13. P. 545–579.
11. Fawehinmi O. B., Gaskell P. H., Thompson H. M. Finite element analyses of flow in a cavity with internal // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. 2002. Vol. 216. P. 517–530.
12. Gresho P. M. Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formu-

lation Issues // Annual Review of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 23, №1. P. 413–453.

13. Gresho P. M. Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991. Vol. 87, № 2. P. 201–252.

14. Gresho P. M. Some Interesting Issues in Incompressible Fluid // Advances in Applied Mechanics. 1991. Vol. 28. P.45–140.

15. Guermond J.-L., Quartapelle L. Uncoupled  $\omega$ - $\psi$  Formulation for Plane Flows in Multiply Connected Domains // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 1997. Vol. 07, № 06. P. 731–767.

16. Gunzburger M. D., Peterson J. S. Finite-Element Methods for the Streamfunction-Vorticity Equations: Boundary-Condition Treatments and Multiply Connected Domains // Society for Industrial and Applied Mathematics. 1988. Vol. 9, № 4. P. 650–668.

17. He J. H. Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1998. Vol. 167, № 12. P. 69–73.

18. He J. H. Homotopy perturbation technique // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 178. P. 257–62.

19. He J. H. Variational iteration method – a kind of nonlinear analytical technique: some examples // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1999. Vol. 34, № 4. P. 699–708.

20. He J. H., Wu Xu-H. Exp-function method for nonlinear wave equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. Vol. 30, № 3. P. 700–708.

21. Ismail H. N. A., Abde Rabboh A. A. A restrictive Padé approximation for the solution of the generalized Fisher and Burger–Fisher equations // Applied Mathematics and Computation. 2004, Vol. 154. P. 203–210.

22. Le-Cao K., Mai-Duy N., Tran-Cong T. An Effective Integrated-RBFN Cartesian-Grid Discretization for the Stream Function–Vorticity–Temperature Formulation in Nonrectangular Domains // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2009. Vol. 55, № 6. P. 480–502.

23. Le-Cao K., Mai-Duy N., Tran C.-D., Tran-Cong T. Numerical study of stream-function formulation governing flows in multiply-connected domains by integrated RBFs and Cartesian grids // *Computers & Fluids*. 2011. Vol. 44. P. 32–42.
24. Liao S. J. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems : PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University. 1992.
25. Mäder R. Parallel Computing with Mathematica. In. Ganzha V.G., Mayr E.W., Vorozhtsov E.V. (eds) // Springer, Berlin, Heidelberg : Computer Algebra in Scientific Computing CASC 2001. 2001. P. 399.
26. Maiti S. K. Parallel Evaluation of Mathematica Programs in Remote Computers Available in Network. 2006. URL : [arXiv:cs/0606023v3](https://arxiv.org/abs/cs/0606023v3) (дата звернення: 03.12.2021)
27. Mizukami A. A stream function-vorticity finite element formulation for Navier-Stokes equations in multi-connected domain // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1983. Vol. 19. P. 1403–1409.
28. Momani S., Abusaad S. Application of He's variational-iteration method to Helmholtz equation // *Chaos Solitons Fractals*. 2005. Vol. 27, № 5. P. 1119–1123.
29. Rashidi M., Shahmohamadi H. Analytical solution of three-dimensional Navier–Stokes equations for the flow near an infinite rotating disk // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. Vol. 14. P. 2999–3006.
30. Rubel A. A stream function formulation for the multiply connected driven cavity Stokes flow problem // AIAA, ASME, SIAM, and APS, National Fluid Dynamics Congress. 1988. P. 63–67.
31. Shao X., Han D. Error estimate for a simple two-level discretization of stream function form of the Navier–Stokes equations // *Applied Mathematics and Computation*. 2012. Vol. 218, № 19. P. 9943–9952.
32. Tari H., Ganji D. D., Rostamian M. Approximate solutions of K(2,2), KdV and modified KdV equations by variational iteration method, homotopy perturbation method and homotopy analysis method // *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2007. Vol. 8, № 2. P. 203–210.
33. Parallel CUDA implementation of a numerical algorithm for solving the

Navier-Stokes equations using the pressure uniqueness condition / Temirbekov A., Baigereyev D., Temirbekov N. [et al.] // AIP Conference Proceedings : AIP Publishing LLC, 2021. Vol. 2325, № 1. P. 20063.

34. Wazwaz A. M. The tanh and the sine–cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2006. Vol. 11, № 2. P. 148–160.

35. Wazwaz A. M. A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. Vol. 207, № 1. P. 129–136.

36. Yun-Xin Z., Yong-Ji T. Meshless schemes for unsteady Navier–Stokes equations in vorticity formulation using radial basis functions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 192, № 2. P. 328–338.

37. Yusufoglu E. Variational iteration method for construction of some compact and noncompact structures of Klein–Gorden equations // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2007. Vol. 8, № 2. P. 153–158.

38. Артюх А. В. Математическое моделирование и численный анализ нестационарных течений вязкой теплопроводной жидкости методами  $R$ -функций и Галёркина // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 1. С. 9–19.

39. Артюх А. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2016. 251 с.

40. Артюх А. В., Сидоров М. В. Исследование нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости (приближение Стокса) методами  $R$ -функций и Галеркина // Радиоэлектроника и информатика. 2011. № 3 (54). С. 16–21.

41. Артюх А. В., Сидоров М. В. Математическое моделирование и численный анализ течения в канавке подшипника методами  $R$ -функций и Галерки-

на // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. 2012. № 1037, вып. 20. С. 11–17.

42. Колосова С. В. Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе // Прикладная механика. 1971. № 7, вып. 10. С. 100–105.

43. Колосова С. В. Применение проекционных методов и метода  $R$ -функций к решению краевых задач в бесконечных областях : дис. на соискание наук. степень канд. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.07 «Вычислительная математика» / Харьковский ин-т радиоэлектроники. Харьков, 1972. 85 с.

44. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. Москва : Физматлит, 2006. 416 с.

45. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва : Дрофа, 2003. 840 с.

46. Литвинов В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. Москва : Наука, 1982. 376 с.

47. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Математическое моделирование движения несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим с пристеночными винтовыми вставками методом  $R$ -функций // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2005. Т. 48, № 1. С. 163–169.

48. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Моделирование движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам методом  $R$ -функций // Электронное моделирование. 2005. Т. 27, № 1. С. 31–43.

49. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва : Наука, 1966. 432 с.

50. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.

51. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. Киев : Наук. думка, 1982. 552 с.

52. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 52–54.

53. Сидоров М. В. Об одном подходе к численному моделированию конвективных вязких течений в односвязных и многосвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2003. № 4. С. 55–57.

54. Слесаренко А. П., Котульский Д. А.  $R$ -функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения // Проблемы машиностроения. 2001. Т. 4, № 3 – 4. С. 72–78.

55. Стаднікова Г. В., Артюх П. А., Сидоров М. В. Чисельне моделювання нестационарних процесів перемішування у багатозв'язних областях // XXVI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» : зб. наукових праць (м. Львів, 27–28 вересня 2021 р.). Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2021. С. 165–169.

56. Суворова И. Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестник НТУ «ХПИ». 2004. № 31. С. 141–148.

57. Суворова И. Г., Кравченко О. В., Баранов И. А. Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода  $R$ -функций // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2011. Т. 54, № 2. С. 139–149.