УДК 621.391

В. И. АНТЮФЕЕВ, канд. техн. наук, А. С. СУЛТАНОВ, канд. техн. наук, Ю. В. ОВСЯННИКОВ, А. С. ВОРОНОВА, В. Г. КУБАТА

СИНТЕЗ МНОГОКАНАЛЬНОГО РАДИОМЕТРА С ЧАСТИЧНО ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ. *СООБЩЕНИЕ 2.* СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Используя выражение (1) работы [1] и принятые в ней обозначения, получаем систему уравнений максимального правдоподобия

$$\int_0^\tau \frac{m_k(t)\,dt}{1+\sum_{i=1}^N m_i(t)\,q_i} = \frac{1}{1+\hat g}\int_0^\tau \frac{m_k(t)\,v^2(t)\,dt}{[1+\sum_{i=1}^N m_i(t)\,q_i]^2}\quad (k=\overline{1,\ N});$$

$$1+\hat g = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{v^2(t)\,dt}{1+\sum_{i=1}^N m_i(t)\,q_i},$$

которая для семейства цифровых модулирующих функций $\{m_i\}_{i=1}^N \in Z_1^n$ принимает вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_{kj}\,\Delta t_j}{1+\sum_{i=1}^N m_{ij}\hat q_i}\left[1-\frac{\nu_j}{(1+\hat g)(1+\sum_{i=1}^N m_{ij}\hat q_i)}\right]=0\quad (k=\overline{1,\ N});$$

$$1+\hat g = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^N \frac{\nu_j\,\Delta t_j}{1+\sum_{i=1}^N m_{ij}\hat q_i}.$$

Здесь $\nu_j = \frac{1}{\Delta t_j} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v^2(t)\,dt$, $(t_j,\ t_{j+1})$ — интервалы постоянства системы $\{m_i\}$ $(j = \overline{1,\ m})$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$; $\hat{g}$, $\hat{q}_i$ $(i = \overline{1,\ N})$ — оценки максимального правдоподобия параметров $g, q_1, \ldots, q_N$, $m_{kj} = m_k(t)$ для $t \in (t_j,\ t_{j+1})$.

Поскольку m_{kj}, $\hat{q}_i \geqslant 0$, то необходимыми условиями выполнения уравнений (1) являются следующие:

$$\nu_j = (1 + \hat{g})\,(1 + \sum_{i=1}^{N} m_{ij}\hat{q}_i) \quad (j = \overline{1,\ m}). \tag{2}$$

Чтобы осуществить раздельное измерение оценок $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_N$, необходимо, наряду с системой модулирующих функций $\{m_i\}_{i=1}^{N}$, ввести семейство демодулирующих функций $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$, ортогональное первому, т. е. удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} \xi_k(t)\, m_i(t)\, dt = \varepsilon\delta_{ik}\ \forall i,\ k \in \overline{1,\ N},\ \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Можно показать, что для выполнения условия (3) элементы семейства $\{\xi_i\}$ должны принадлежать классу цифровых функций с теми же интервалами постоянства, что и у системы $\{m_i\}$. Тогда, домножив уравнение (2) на $\xi_{kj}\,\Delta t_j/\tau$ и просуммировав по j, получим

$$\hat{q}_k = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\tau(1+\hat{g})} \sum_{j=1}^{m} \xi_{kj}\,\nu_j\,\Delta t_j - \bar{\xi}\right]. \tag{4}$$

Умножение уравнения (2) на $\Delta t_j/\tau$ и выполнение суммирования по j с учетом соотношения (4) дает

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{N} \nu_j\,\Delta t_j = \frac{\overline{m}}{\varepsilon\tau} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N} \xi_{kj}\,\nu_j\,\Delta t_j + (1+\hat{g})\,(1 - \overline{m}\,\bar{\xi}\,N/\varepsilon), \tag{5}$$

где $\bar{\xi} = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{m} \xi_{kj}\,\Delta t_j\ \forall k \in \overline{1,\ N}$. Исключая из уравнений (4), (5) $1 + \hat{g}$, приходим к выражению

$$\hat{q}_k = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\int\limits_0^{\tau} \xi_k(t)\, v^2(t)\, dt}{\int\limits_0^{\tau}\left[1 - \frac{\overline{m}}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N} \xi_i(t)\right] v^2(t)\, dt}\left(1 - \frac{\overline{m}\,\bar{\xi}\,N}{\varepsilon}\right) - \bar{\xi}\right\}. \tag{6}$$

Можно показать, что для семейств $\{m_i\} \in Z_1^n$ условие (3) выполняется в двух случаях. В первом—система модулирующих функций должна быть ортогональной, что возможно для семейств с $r=0$, а $\{\xi_i\}=\{m_i\}$ (рис. 4, *а* работы [1]). Такая система используется в радиометрах с временным уплотнением сигналов, для нее $\bar{\xi}=\bar{m}=\varepsilon=p$ и выражение (6) принимает вид

$$\hat{q}_k=\frac{\int\limits_0^\tau m_k(t)\,v^2(t)\,dt}{\int\limits_0^\tau\left[1-\sum\limits_{i=1}^N m_i(t)\right]v^2(t)\,dt}\,\frac{1-pN}{p}-1.$$

Когда параметр p принимает оптимальное значение $\hat{p}=(N+\sqrt{N})^{-1}$, множитель $(1-\hat{p}N)/\hat{p}=\sqrt{N}$, а

$$1-\sum_{i=1}^N m_i(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\ \tau]\setminus Y;\\ 0, & t\in Y;\end{cases}\qquad Y=\bigcup_{i=1}^N \operatorname{supp} m_i.$$

Во втором случае система $\{m_i\}$ должна быть такой, чтобы порожденное ею семейство $\{\mu_i=m_i-\bar{m}\}_{i=1}^N$ было ортогональным, а $\{\xi_i\}=\{\mu_i\}$. Для такого радиометра $\bar{m}=p$, $\bar{\xi}=0$, $\varepsilon=p(1-p)$, а выражение (6) принимает вид

$$\hat{q}_k=\frac{1}{p}\,\frac{\int\limits_0^\tau \mu_k(t)\,v^2(t)\,dt}{\int\limits_0^\tau\left[1-p-\sum\limits_{i=1}^N \mu_i(t)\right]v^2(t)\,dt}. \tag{7}$$

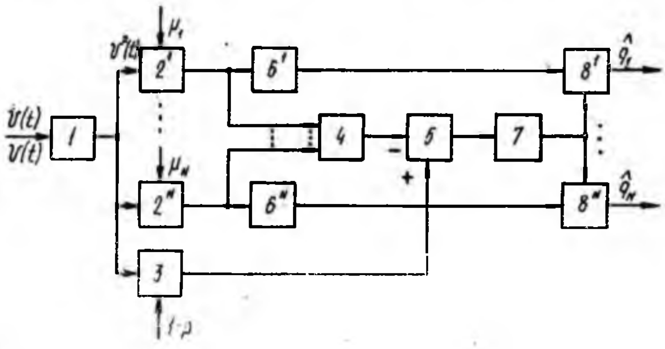

Рис. 1

Соответствующая оптимальная структура синтезируемой части радиометра приведена на рис. 1, где обозначено: *1* — квадратичный детектор; *2*^{1}, ..., *2*, *3*^{N} — перемножители; *4*, *5* — сумматоры; *6*^{1}, . . . , *6*^{N}, *7* — интеграторы; *8*^{1}, ..., *8*^{N} — устройства деления. Из оптимальных систем модулирующих функций, представленных в работе [1], условию ортогомальности функций μ_1 удовлетворяет лишь семейство $\{m_i(t) = \frac{1}{2}[1 - \mathrm{wal}_i(t)]\} \in Z_1^{\frac{N+1}{2}}$, которое является оптимальным при малых отношениях сигнал-шум q.

Представляет интерес построить семейства модулирующих функций класса $Z_{1\perp}^{n}$ ($n = \overline{2,\ N - 1/2}$), порождающие ортогональные системы (μ_i), т. е. удовлетворяющие условию $r = p^2$. Радиометры, в которых используются такие семейства, кроме обеспечения возможности раздельного измерения оценок $q_1, \ldots, q_N$, позволяют получать некоррелированные оценки, как это следует из выражения (5) работы [1]. Парабола $r = p^2$ показана на рис. 2 (этой же статьи) штрих-пунктирной линией и близка к кривой, соответствующей оптимальным семействам. Точками пересечения параболы с прямыми $r = p \times (n - 1)/(N - 1)$ ($n = \overline{2,N}$) определяются оптимальные для каждого класса $Z_{1\perp}^{n}$ значения параметра p: $p_n = (n - 1)/(N - 1)$ ($n = \overline{2,\ N + 1/2}$).

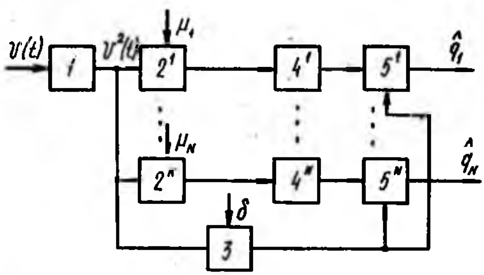

Рис. 2

Семейства модулирующих функций, приведенные на рис. 4, *б*, *в* работы [1], порождают ортогональные системы $\{\mu_i\}$ при замене указанных параметров p, r соответственно на $p_2 = 1/6$, $r_2 = 1/36$ и $p_3 = 1/3$, $r_3 = 1/9$. В отличие от ансамбля $\left\{\frac{1}{2}[1 - \mathrm{wal}_i(t)]\right\}$ построенные системы функций порождают семейства $\{\mu_i\}$, не обладающие групповой структурой, что затрудняет их формирование. Уравнение (7) для радиометров, использующих рассматриваемые семейства, принимает вид

$$q_k = \frac{(N - 1)\int\limits_0^{\tau} \mu_k(t)\, v^2(t)\, dt}{n(n - 1)\int\limits_0^{\tau} \delta(t)\, v^2(t)\, dt} \quad (n = \overline{2,\ (N + 1)/2}),$$

где $\delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau] \setminus Y; \\ 0, & t \in Y, \end{cases}$ а структура синтезируемой части представлена на рис. 2, где введены обозначения: *1* — квадратичный детектор; $2^1, \ldots, 2^N$, *3* — перемножители; $4^1, \ldots, 4^N$ — интеграторы; $5^1, \ldots, 5^N$ — устройства деления. Практическая реализация структур, приведенных на рис. 1, 2, не вызывает принципиальных трудностей.

Выражение для чувствительности радиометра получаем путем подстановки в формулу (15) работы [1] $r = p_n^2 = [(n-1)/(N-1)]^2$:

$$\Delta T = \frac{(N-1)\,T_{ш}\,(1+qn)}{[\Delta f \tau\,(n-1)\,(N-n)]^{1/2}} \quad (n = \overline{2,\ (N+1)/2}).$$

Граничные значения отношения сигнал-шум q_n, при которых чувствительности радиометров, использующих семейства модулирующих функций $\{m_i\} \in Z_{1\perp}$ с числами n и $n+1$, одинаковы, определяются соотношениями

$$q_1 = \frac{(1+\sqrt{N})\sqrt{N-2} - N + 1}{2(N-1) - (1+\sqrt{N})\sqrt{N-2}};$$

$$q_n = \frac{\sqrt{n(N-n-1)} - \sqrt{(n-1)(N-n)}}{(n+1)\sqrt{(n-1)(N-n)} - n\sqrt{n(N-n-1)}} \quad (n = \overline{2,(N-1)/2}).$$

Во многих практических приложениях радиометрии справедливо неравенство $q_1, \ldots, q_N \ll 1$, поэтому исследуем подробней характеристики приемника с системой модулирующих функций $\left\{\frac{1}{2}[1 - \mathrm{wal}_i(t)]\right\}$,построенной с использованием функций Уолша и являющейся оптимальной в этом случае. Уравнение (6) принимает вид

$$\tilde{q}_k = -\frac{2\int\limits_0^\tau \mathrm{wal}_k(t)\,v^2(t)\,dt}{\int\limits_0^\tau \left[1 + \sum\limits_{i=1}^N \mathrm{wal}_i(t)\right] v^2(t)\,dt}. \qquad (8)$$

Для вычисления чувствительности радиометра обозначим

$$\tilde{\varphi}_k = -\frac{2}{\tau}\int\limits_0^\tau \mathrm{wal}_k(t)\,v^2(t)\ \ dt\,(k=\overline{1,N});$$

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \left[1 + \sum_{i=1}^N \mathrm{wal}_i(t)\right] v^2(t)\,dt$$

и введем центрированные случайные величины $\varphi_k = \tilde{\varphi}_k - \langle\tilde{\varphi}_k\rangle\,(k = \overline{1,N})$, $\psi = \tilde{\psi} - \langle\tilde{\psi}\rangle$. Можно показать, что $\langle\tilde{\varphi}_k\rangle = (1+g)\,q_k$, $\langle\tilde{\psi}\rangle = 1+g$. Представим выражение (8) в виде

$$\tilde{q}_k = \frac{\tilde{\varphi}_k}{\tilde{\psi}} = q_k\,\frac{1+\varphi_k/[q_k(1+g)]}{1+\psi/(1+g)}.$$

Полагая $|\varphi_k/[q_k(1+g)]|$, $|\psi/(1+g)| \ll 1$, получаем $\Delta\tilde{q}_k = \tilde{q}_k - q_k \approx (\varphi_k - q_k\psi)/(1+g)$. С учетом выражений (2) соотношения для φ_k, ψ можно записать следующим образом:

$$\varphi_k = \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1} \mathrm{wal}_{kj}\nu_j - (1+g)\,q_k\ \ (k=\overline{1,N}),\ \ \psi = \nu_1 - (1+g).$$

Здесь использовано равенство $\sum_{i=1}^{N} \mathrm{wal}_{ij} = \begin{cases} N, & j=1; \\ -1, & j=\overline{2, N+1}, \end{cases}$ справедливое для $N = 2^k - 1\ (k \in N)$.

В результате вычисления ковариации канальных сигналов находим

$$R_{ik} = \langle \Delta \hat{q}_i \Delta \hat{q}_k \rangle = \frac{4}{\Delta f \tau} \Big[(1 + N\bar{q}/2)^2 \delta_{ik} - q_{ik} (1 + N\bar{q}/2) + \\ + \frac{1}{4} \sum_{r,s \in I} q_r q_s + \frac{N+1}{4} q_i q_k + (q_i + q_k)/2 \Big], \quad (9)$$

где

$$\bar{q} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} q_r; \quad q_{ik} = (1 - \delta_{ik})\, q_{i \oplus k};$$

$$I = \{(r, s) \in \overline{1, N} \times \overline{1, N} \mid r \oplus s = r \oplus k\}.$$

При выводе формулы (9) использовано групповое свойство функций Уолша [2] $\mathrm{wal}_i(t)\, \mathrm{wal}_k(t) = \mathrm{wal}_{i \oplus k}(t)$, где двоичное разложение числа $i \oplus k$ получается путем поразрядного сложения по модулю 2 коэффициентов двоичных разложений чисел i, k.

Для $i = k$ из формулы (9) следует выражение для чувствительности радиометра по k-му входу:

$$\Delta T_k = \frac{2T_{\text{ш}}}{\sqrt{\Delta f \tau}} \Big[(1 + N\bar{q}/2)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} q_i^2 + \frac{N+1}{4} q_k^2 + q_k \Big]^{1/2}, \quad (10)$$

где учтено, что $I = \mathrm{diag}(\overline{1, N} \times \overline{1, N}) = \{r, s \in \overline{1, N} \times \overline{1, N} \mid r = s\}$.

Полагая $q_1 = \cdots = q_N = q_{\max}$ и $q_1 = \cdots = q_N = q_{\min}$, получаем

$$\frac{2T_{\text{ш}}}{\sqrt{\Delta f \tau}} \left(1 + \frac{N+1}{2} q_{\min} \right) < \Delta T < \frac{2T_{\text{ш}}}{\sqrt{\Delta f \tau}} \left(1 + \frac{N+1}{2} q_{\max} \right).$$

Коэффициент взаимной корреляции канальных сигналов на основании соотношения (9) определяется выражением

$$r_{ik} = X_i X_k \Big[-q_{ik} \Big(1 + \frac{N}{2} \bar{q} \Big) + \frac{1}{4} \sum_{r,s \in I} q_r q_s + \frac{N+1}{4} q_i q_k + \frac{1}{2} (q_i + q_k) \Big]. \quad (11)$$

Здесь

$$X_i = \Big[(1 + N\bar{q}/2)^2 + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{N} q_r^2 + \frac{N+1}{4} q_i^2 + q_i \Big]^{1/2}.$$

В случае $q_1 = \cdots = q_N = q$ из формулы (11) следует, что $r_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, а $\Delta T = 2T_{\text{ш}} (\Delta f \tau)^{-1/2} [1 + (N+1) q/2]$ в соответствии с равенством (10), что совпадает с ранее полученным результатом.

Если ограничиться системами модулирующих функций из классов $Z^1_{1\perp}$ и $Z^{(N+1)/2}_{1\perp}$, можно показать, что чувствительности радиометров с такими семействами совпадают при значениях параметров N, q, лежащих на кривой $N = \begin{cases} q^{-2}, & 0 < q \leqslant 1; \\ 1, & q > 1, \end{cases}$ плоскости N, q. В области $\{N \geqslant 1\} \cap \{N \leqslant q^{-2}\}$ целесообразно использовать приемник с модулирующими функциями на основе функций Уолша, в области $\{N > 1\} \cap \cap \{N > q^{-2}\}$ — радиометр с временным уплотнением сигналов.

Пусть $\{m_i\} \in Z^n_{1\perp}$ и $d = \frac{1}{\tau} \operatorname{mes}[0, \tau] \setminus Y \neq 0$. Построим семейство $\{m'_i = 1 - m_i\}$. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{N} m'_{i1} = N$, то $n = N$, $c = (1 + qN)^{-1}$, т. е. $\{m'_i\} \in Z^N_{1\perp}$, причем для такой системы $d = 0$. Найдем оптимальное семейство и оценим потенциальную чувствительность радиометра с этой системой модулирующих функций. Дифференцируя функцию (15) работы [1] по переменной r и приравнивая производную к нулю, получаем квадратное уравнение $(N-2)r^2 + 2rp\,[1 - (N-1)p] + (Np - 2)p^3 = 0$, неотрицательный корень которого равен $\hat{r} = p^2$, а $G(\hat{r}, p) = (p - p^2)^{-1}(1 + Nq)^2$ (11). Минимизируя функцию (11), находим $G_{\min} = G(\hat{r}, \hat{p}) = 4(1 + Nq)^2$, $\hat{p} = 1/2$, $\hat{r} = 1/4$. Следовательно, *при произвольных отношениях сигнал-шум оптимальным является* семейство $\left\{\frac{1}{2}[1 + \operatorname{wal}_i(t)]\right\}_{i=1}^{N}$, однако радиометр с такой системой модулирующих функций уступает в чувствительности приемнику, в котором используются ансамбли с $d \neq 0$.

Таким образом, целесообразно применять радиометры с ортогональной системой модулирующих функций, которые лишь незначительно уступают в чувствительности приемникам с оптимальным семейством модулирующих функций, но имеют более простую структуру и не встречают принципиальных трудностей при их практической реализации.

Список литературы: 1. *Синтез* многоканального радиометра с частично-заданной структурой. Сообщение 1. Оптимизация модулирующих функций / В. И. Антюфеев, А. С. Султанов, Ю. В. Овсянников и др. // Радиотехника. 1990. Вып. 95. С. 45—52. 2. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. М., 1987. 344 с.

Поступила в редколлегию 12.01.89