

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ РЕЗОНАТОРНЫХ СИСТЕМ С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ СТРУКТУРАМИ

СЛИПЧЕНКО Н.И.

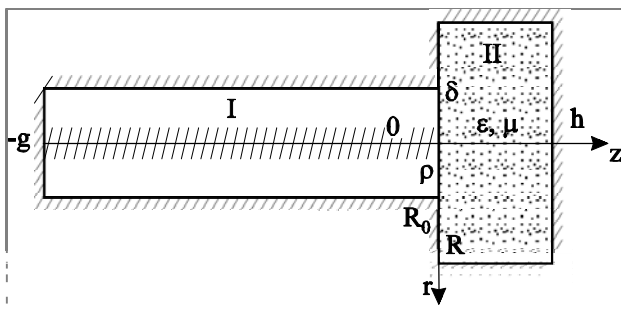
В квазистатическом приближении строится алгоритм решения задачи о резонансных частотах резонатора коаксиального типа, нагруженного полупроводниковой структурой с учетом искривления энергетических зон у её поверхности и нелинейного характера взаимодействия носителей свободного заряда с СВЧ полем.

1. Введение

В работах [1-3] поставлена и решена задача расчета резонансных частот и добротности резонатора коаксиального типа, содержащего изотропный или анизотропный диэлектрик, в целях диагностики его параметров. Однако подобная постановка не позволяет учесть эффект неоднородного распределения равновесной концентрации свободных носителей заряда естественного или искусственного происхождения, что также может быть использовано в диагностических целях. Кроме того, решение практических задач СВЧ диагностики полупроводниковых материалов сопряжено с высокой степенью локализации и, следовательно, концентрации поля, что неизбежно ведет к проявлению нелинейных эффектов в полупроводниковом образце, которые и необходимо учитывать при разработке математической модели.

2. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричную поперечную электродинамическую систему (продольное сечение изображено на рисунке) с колебаниями квази ТЕМ типа, частично заполненную полупроводником, поперечный размер которой значительно меньше длины волны колебаний, а амплитуда колебаний не ограничена приближением малости СВЧ сигнала.



Продольное сечение образца

Исходными для решения задачи о собственных колебаниях являются уравнения Максвелла в квазистатическом приближении и уравнения движения свободных зарядов в полупроводнике n -типа в гидродинамическом приближении:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\vec{v}) &= 0, \\ \Delta\varphi &= 4\pi \frac{e}{\varepsilon} (n - N_g), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu\vec{v} &= \frac{e}{m} \nabla\varphi - v_T^2 \frac{\nabla n}{n_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где n, φ, \vec{v} – неизвестные плотность свободного заряда, потенциал электромагнитного поля и скорость заряда, соответственно; физические характеристики полупроводника: $v_T, \mu, N_g, n_0, \varepsilon, e, m$ – средняя тепловая скорость свободного заряда, средняя частота столкновений заряда с ионами решетки, концентрация доноров, концентрация свободных зарядов, невозмущенных полем, диэлектрическая проницаемость полупроводника, заряд и масса электрона, соответственно.

Из-за предполагаемой нелинейности взаимодействия электромагнитного поля с полупроводником функции n, φ, \vec{v} представляются разложениями в ряды Фурье по гармоникам основной частоты – частоты возбуждения электродинамической системы [4]:

$$\left. \begin{aligned} n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k(k\omega) e^{ik\omega t}, \\ \varphi &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(k\omega) e^{ik\omega t}, \\ \vec{v} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{v}_k(k\omega) e^{ik\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Электромагнитное поле в полой системе, в общем, должно быть представлено суперпозицией полей собственных колебаний, однако вблизи резонансной частоты основного колебания амплитуды высших гармоник пренебрежимо малы. Кроме того, исходя из малости поперечного сечения коаксиального отрезка по сравнению с длиной волны, структуру переменного электрического поля и тока проводимости на резонансной частоте ω в плоскости $z=0$ можно представить аналогично распределению поля ТЕМ волны в короткозамкнутом отрезке в сечении $z = -g$:

$$\vec{E}|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{для } r \in [0, \rho_0], \\ \vec{r}_0 E_0 \frac{1}{r} \sin(\omega t + \psi_0) & \text{для } r \in [\rho_0, R], \end{cases} \quad (3)$$

$$\vec{J}|_{z=0} = \vec{z}_0 E_0 \frac{1}{w_0} \cos(\omega t + \psi_0), \quad (4)$$

где $\psi_0 = k_0 g$, $k_0 = \omega/c$ – волновое сопротивление свободного пространства; E_0 – амплитуда поля; \vec{r}_0, \vec{z}_0 – координатные орты.

В целях формулировки граничных условий для первой гармоники представим $\vec{E}|_{z=0}$ и $\vec{J}|_{z=0}$ в виде:

$$\vec{E}|_{z=0} = \vec{F}e^{i\omega t} + \vec{F}^*e^{-i\omega t}; \quad \vec{J}|_{z=0} = \vec{I}e^{i\omega t} + \vec{I}^*e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

где $\vec{F} = \frac{\vec{r}_0}{r} \frac{E_0}{2i} e^{i\psi_0}$, $\vec{I} = \vec{z}_0 \frac{1}{2} E_0 \frac{1}{w_0} e^{i\psi_0}$ – комплексные амплитуды; «*» – знак комплексного сопряжения.

С учетом этих представлений граничные условия для потенциала основной гармоники имеют вид:

$$-\vec{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{z=0} = \vec{F}, \quad -\vec{r}_0 \frac{\partial \varphi_{-1}}{\partial r} \Big|_{z=0} = \vec{F}^*, \quad (6)$$

а для полного тока, исходя из условия его непрерывности в сечении $z=0$ – следующий:

$$-i\omega \vec{z}_0 \int_0^R \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr = \vec{I}; \quad i\omega \vec{z}_0 \int_0^R \frac{\partial \varphi_{-1}}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr = \vec{I}^*. \quad (7)$$

Для получения уравнений относительно амплитуд гармоник внесем представления (2) в уравнения (1), которые после введения замен:

$$\frac{n_k}{N_g} = N_k, \quad \frac{e}{m} \frac{\varphi_k}{v_T^2} = \Phi_k, \quad 4\pi \frac{e^2}{m\varepsilon} \frac{N_g}{v_T^2} = \chi_e^2$$

имеют вид:

$$i \frac{k\omega}{v_T^2} N_k + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i(k-s)\omega + \mu} \nabla \left(N_s \left(\nabla \Phi_{k-s} - \frac{\nabla N_{k-s}}{N_0} \right) \right),$$

$$\Delta \Phi_k = \chi_e^2 (N_k - \delta_{0k}); \quad \vec{v}_k = \frac{v_T^2}{i\omega + \mu} \left(\nabla \Phi_k - \frac{\nabla N_k}{N_0} \right), \quad (8)$$

$k=0, \pm 1, \dots$

Из равенств (6)–(8) нетрудно установить:

$$\Phi_{-k} = \Phi_k^*, \quad N_{-k} = N_k^*, \quad k=1, 2, \dots \quad (9)$$

С учетом (9) граничные условия (6) и (7) приводят к виду:

$$-Re \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{для } r \in [0, \rho_0), \\ \frac{1}{r} F_0 \sin \psi_0 & \text{для } r \in [\rho_0, R] \end{cases} \quad (10.1)$$

$$Re \int_0^R \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr = F_0 \frac{1}{k_0 \varepsilon} \cos \psi_0, \quad (10.2)$$

где F_0 учитывает переход к безразмерному потенциалу.

Кроме того, должны удовлетворяться граничные условия на идеально проводящих металлических границах:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{z=h} = 0 \quad (11)$$

и отсутствие нормальной составляющей скорости свободных зарядов на границах полупроводника:

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial z} - N_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0, h} = 0 = \left(\frac{\partial N_1}{\partial r} - N_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}. \quad (12)$$

Как следует из (8), получена бесконечная система дифференциальных уравнений с взаимосвязанными амплитудами гармонических составляющих плотности заряда и потенциала. Ограничиваясь учетом того или иного количества гармоник в этой системе, можно получать соответствующие приближения решений поставленной задачи. Оставляя лишь наиболее существенные связи между гармониками и отбрасывая в (8) малые члены высших гармоник, имеем:

$$\Delta N_1 - \nabla \Phi_1 \nabla N_0 + \left(\frac{\omega^2 - i\mu\omega}{v_T^2} - \chi_e^2 N_0 \right) N_1 = 0, \quad (13)$$

$$\Delta \Phi_1 = \chi_e^2 N_1.$$

Заметим, что система уравнений для N_1^* и Φ_1^* отличается от (13) переменной знака ω на противоположный, т.е. переходом к комплексно сопряженному уравнению.

Входящая в (13) функция N_0 , в соответствии с (8), имеет простой аналитический вид:

$$N_0 = e^{\Phi_0}, \quad (14)$$

а функция Φ_0 удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \Phi_0 = \chi_e^2 (N_0 - 1) \quad (15)$$

и граничным условиям:

$$\Phi_0 \Big|_{z=0} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq \rho \\ V_0, & \rho < r \leq R \end{cases}, \quad \Phi_0 \Big|_{z=h} = 0 = \Phi_0 \Big|_{r=R} \quad (16)$$

Условие $\vec{v}_0 \cdot \vec{n}_0 = 0$ в соответствии с (8) и (14) удовлетворяется тождественно.

Таким образом, для решения системы уравнений (13) с граничными условиями (9)–(12) требуется предварительное решение задачи (15)–(16). Полученные, в результате, первые приближения $N_1^{(1)}, \Phi_1^{(1)}$ используются затем для определения второй гармоники: N_2, Φ_2 в первом приближении путем решения дифференциальных уравнений:

$$\Delta N_2 - \nabla \Phi_2 \nabla N_0 + \left[\frac{(2\omega)^2 - i(2\omega)\mu}{v_T^2} - \chi_e^2 N_0 \right] N_2 =$$

$$= \left(1 + \frac{\omega^2 - i\omega\mu}{\omega^2 + \mu^2} \right) \nabla \left[N_1 \left(\nabla \Phi_1 - \frac{\nabla N_1}{N_0} \right) \right]; \quad (17)$$

$$\Delta \Phi_2 = \chi_e^2 N_2$$

с граничными условиями, аналогичными (11) и (12).

В последующем полученные приближенные решения N_2, Φ_2 могут быть использованы в уравнении (8) относительно N_1, Φ_1 для уточнения определенного ранее приближенного значения резонансной частоты ω . Процесс последовательных приближе-

ний, в том числе и для определения амплитуды третьей гармоники, может быть продолжен и далее.

3. Алгоритм решения задачи о распределении постоянного потенциала в полупроводнике

Для решения задачи (15), (16), где существенную роль играет неравномерное распределение равновесной плотности свободного заряда из-за наличия поверхностного потенциала в плоскости $z=0$, ограничимся разложением N_0 (14) в виде $N_0 \approx 1 + \Phi_0 + \frac{1}{2} \Phi_0^2$, поскольку предполагается $N_0 \approx 1$. Уравнение (15) тогда приобретает вид:

$$\Delta \Phi_0 = \chi_e^2 \Phi_0 + \frac{1}{2} \chi_e^2 \Phi_0^2. \quad (18)$$

Рассмотрим сначала «нулевое» приближение для равенства (18):

$$\Delta \Phi_0^{(0)} = \chi_e^2 \Phi_0^{(0)}, \quad (19)$$

решение которого представим в виде:

$$\Phi_0^{(0)}(r, z) = \sum_{m=1}^M J_0 \left(\frac{p_m}{R} r \right) \Psi_m^{(0)}(z), \quad (20)$$

где p_m – нули функции Бесселя $J_0(x)$. При этом функции $\Psi_m^{(0)}(z)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\Psi_m^{(0)''}(z) - \beta_m^2 \Psi_m^{(0)}(z) = 0, \quad \beta_m^2 = \chi_e^2 + \frac{p_m^2}{R^2} \quad (21)$$

и граничным условиям, вытекающим из (16):

$$\left. \begin{aligned} \Psi_m^{(0)}(0) &= \frac{2V_0}{p_m J_1(p_m)} \left[1 - \frac{\rho}{R} \frac{I_1(p_m \frac{\rho}{R})}{I_1(p_m)} \right], \\ \Psi_m^{(0)}(h) &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

При этом

$$\Psi_m^{(0)}(z) = -\Psi_m^{(0)}(0) \frac{\text{sh} \beta_m (z-h)}{\text{sh} \beta_m h}. \quad (22.2)$$

Возвращаясь к первоначальному уравнению (18), его решение по-прежнему ищем в виде (20), подстановка которого в (18) приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно $\Psi_m(z)$:

$$\Psi_m''(z) - \beta_m^2 \Psi_m(z) - \sum_{s=1}^M \sum_{k=1}^M \gamma_{sk}^{(m)} \Psi_s(z) \Psi_k(z) = 0, \quad (23.1)$$

где

$$\gamma_{sk}^{(m)} = \frac{\chi_e^2}{R^2 J_1^2(p_m)} \int_0^R J_0 \left(\frac{p_m}{R} z \right) J_0 \left(\frac{p_s}{R} r \right) J_0 \left(\frac{p_k}{R} r \right) r dr, \quad (23.2)$$

$$m = 1, 2, \dots, M.$$

Краевые условия для $\Psi_m(0), \Psi_m(h)$ будут прежними, а именно (22.1), (22.2).

Для решения краевой задачи (22.1), (22.2), (23.1), (23.2) используем метод прогонки, что равносиль-

но линейризации уравнения (23) [5]. Для этого запишем представление:

$$\Psi_m(z) = \Psi_m^{(0)}(z) + \theta_m(z). \quad (24)$$

Тогда $\theta_m(z)$ должна определяться из линейной системы уравнений при отбрасывании квадратичного члена:

$$\theta_m'' = \beta_m^2 \theta_m + \sum_{s=1}^M \sigma_{ms} \theta_s + f_m(z), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (25)$$

$$\text{Здесь } \sigma_{ms} = 2 \sum_{k=1}^M \gamma_{sk}^{(m)} \Psi_k^{(0)}(z),$$

$$f_m(z) = \beta_m^2 \Psi_m^{(0)} - \Psi_m^{(0)''}(z) + \sum_{s=1}^M \sum_{k=1}^M \gamma_{sk}^{(m)} \Psi_s^{(0)}(z) \Psi_k^{(0)}(z).$$

При этом, в силу равенства (22.1), (22.2)

$$\theta_m(0) = 0, \quad \theta_m(h) = 0, \quad \beta_m^2 \Psi_m^{(0)}(z) - \Psi_m^{(0)''}(z) = 0.$$

Введя замену $x_m = \theta_m, x_{M+m} = \theta_m'$ и представляя возникшую задачу в стандартной форме, приходим к линейной неоднородной системе $2M$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x'_m = x_{M+m}, \\ x'_{M+m} = \beta_m^2 x_m + \sum_{s=1}^M \sigma_{ms} x_m + f_m, \\ x_m(0) = x_m(h) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{cases} \quad (26)$$

Представим общее решение уравнения (26) $X(z) = (x_1(z), x_2(z), \dots, x_{2M}(z))$ в виде:

$$X(z) = X_0(z) + c_1 g_1(z) + c_2 g_2(z) + \dots + c_{2M} g_{2M}(z), \quad (27)$$

где $X_0(z)$ – вектор-функция с компонентами $x_{0,n}(z), n = 1, 2, \dots, 2M$, являющаяся частным решением неоднородной системы уравнений (26) при нулевых начальных условиях $x_{0,k}(0) = 0$, а $g_k(z)$ – вектор-функция с компонентами $g_{k,n}(z), k = 1, 2, \dots, 2M$, образующими фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений. Для определения константы c_m воспользуемся краевыми условиями (26) применительно к (27), откуда следует для $k = 1, 2, \dots, 2M$:

$$\left. \begin{aligned} c_m &= 0 \quad \text{при} \quad x_m(0) = 0; \\ \sum_{s=M+1}^{2M} g_{m,s}(h) c_s + x_{0,m}(h) &= 0 \quad \text{при} \quad x_m(h) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, определяем константы $c_{M+1}, c_{M+2}, \dots, c_{2M}$ и, следовательно, находим функции $\theta_m(z)$. На этом заканчивается первый шаг итерационного процесса. Обозначив полученное решение через $\theta_m^{(1)}(z)$ и положив $\Psi_m^{(1)}(z) = \Psi_m^{(0)}(z) + \theta_m^{(1)}(z)$ в качестве начального приближения, можно перейти ко второму шагу, исходя из (24)-(25), заменив $\Psi_m^{(0)}(z)$ на $\Psi_m^{(1)}(z)$ и т.д. Определенные с той или иной точностью функции $N_0(r, z), \Phi_0(r, z)$ в дальнейшем используются для поиска решений N_1 и Φ_1 .

4. Алгоритм решения задачи о резонаторе

Сформулированная в (9)-(13) задача позволяет в результате ее решения определить в первом приближении резонансные частоты квазистатических типов колебаний и соответствующие им распределения плотности заряда и потенциала. Сосредоточим внимание на методе ее решения. Представим первое уравнение (13) в виде:

$$\Delta N_1 - A \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - B \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - CN_1 = 0, \quad (29)$$

где $A = \frac{\partial N_0}{\partial r}$, $B = \frac{\partial N_0}{\partial z}$, $C = \chi_e^2 N_0 - \frac{\omega^2 - i\omega\mu}{v_T^2}$ — известные функции координат.

Решение задачи будем искать в виде:

$$\Phi_1(r, z) = \sum_{m=1}^M J_0(\lambda_m r) \Phi_{1,m}(z) \quad (30)$$

$$\text{и } N_1(r, z) = \sum_{m=1}^M J_0(\lambda_m r) \Phi_{2,m}(z) + J_0(lr) \Phi_0(z), \quad (31)$$

здесь $\lambda_m = (p_m/R)$, p_m — корни функции Бесселя нулевого порядка; l — произвольное целое число, не равное p_m/l (например $l = 1/R$).

Такой выбор искомого решения обеспечивает выполнение граничного условия (11) на цилиндрической поверхности $r = R$ и возможность удовлетворить граничным условиям (12). Подстановка представлений (30) и (31) в (13) позволяет получить уравнение для коэффициентов Фурье-разложений по системе функций $\{J_0(\lambda_m r)\}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,m}'' - \lambda_m^2 \Phi_{1,m} - \chi_e^2 \Phi_{2,m} - b_m \Phi_0 &= 0, \quad m=1,2,\dots,M, \\ \Phi_{2,m}'' - \lambda_m^2 \Phi_{2,m} - c_m \Phi_0 - \\ - \sum_{k=1}^M (\alpha_{mk} \Phi_{1,k} + \rho_{mk} \Phi_{1,k}' + q_{mk} \Phi_{2,k}) + b_m (\Phi_0'' - l^2 \Phi_0) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_m &= \frac{2\chi_e^2 p_m}{p_m^2 - (lR)^2} \frac{J_0(lR)}{J_1(p_m)}; \\ \alpha_{mk} &= -(\lambda_m / N_{0,m}^2) \int_0^R A(r, z) J_0(\lambda_m r) J_1(\lambda_k r) r dr; \\ \rho_{mk} &= (1 / N_{0,m}^2) \int_0^R B(r, z) J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_k r) r dr; \\ q_{mk} &= (1 / N_{0,m}^2) \int_0^R C(r, z) J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_k r) r dr; \\ c_{mk} &= (1 / N_{0,m}^2) \int_0^R C(r, z) J_0(\lambda_m r) J_0(lr) r dr. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя (30) и (31) во второе равенство (12) и учитывая, что $N_0(R, z) = 1$, получаем:

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_k (\Phi_{1,k} - \Phi_{2,k}), \quad (33)$$

где $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k J_1(p_k) / J_1(lR)$. Подставив $\Phi_0(z)$ в первое равенство (32), получим связь между $N_0(R, z) = 1$:

$$\Phi_{1,m}'' - \lambda_m^2 \Phi_{1,m} - \chi_e^2 \Phi_{2,m} - b_m \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_k (\Phi_{1,k} - \Phi_{2,k}) = 0. \quad (34)$$

Далее, с помощью (33) и (34), исключив из второго равенства в (32) Φ_0'' , Φ_0 и $\Phi_{1,m}''$, получим:

$$\sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_k \Phi_{2,k}'' - \frac{1}{b_m} \Phi_{2,m}'' = R_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (35)$$

где

$$R_m = -\frac{\lambda_m^2}{b_m} \Phi_{2,m} + \sum_{k=1}^M (\tilde{\alpha}_{mk} \Phi_{1,k} + \tilde{\rho}_{mk} \Phi_{1,k}' + \tilde{q}_{mk} \Phi_{2,k});$$

$$\tilde{\alpha}_{mk} = \lambda_m (\lambda_m^2 + \tilde{A}) - \tilde{\mu}_m \tilde{\lambda}_k - \frac{\alpha_{mk}}{b_m}; \quad \tilde{A} = \sum_{s=1}^M \tilde{\lambda}_s b_s;$$

$$\tilde{\mu}_m = l^2 + \frac{c_m}{b_m}; \quad \tilde{\rho}_{mk} = -\frac{\rho_{mk}}{b_m}; \quad \tilde{q}_{mk} = \tilde{b}_k + \tilde{\mu}_m \tilde{\lambda}_k - \frac{q_{mk}}{b_m};$$

$$\tilde{b}_k = \tilde{\lambda}_k (\chi_e^2 - \tilde{A}).$$

Алгебраическая система уравнений (35) может быть разрешена относительно $\Phi_{2,k}''$ в виде:

$$\Phi_{2,m}'' = b_m \left(\frac{\sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_k b_k R_k}{\sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_k b_k - 1} - R_m \right), \quad (36)$$

что дает возможность вместо второго равенства в (32) получить систему дифференциальных уравнений второго порядка в канонической форме:

$$\Phi_{2,m}'' - \lambda_m^2 \Phi_{2,m} + \sum_{k=1}^M (a_{mk} \Phi_{1,k} + b_{mk} \Phi_{1,k}' + c_{mk} \Phi_{2,k}) = 0, \quad (37)$$

где

$$a_{mk} = b_m \left(\tilde{\alpha}_{mk} + \frac{\tilde{a}_k^0}{1 - \tilde{A}} \right), \quad \tilde{a}_k^0 = \sum_{n=1}^M \tilde{\lambda}_n b_n \tilde{\alpha}_{kn};$$

$$b_{mk} = b_m \left(\tilde{\rho}_{mk} + \frac{\tilde{b}_k^0}{1 - \tilde{A}} \right), \quad \tilde{b}_k^0 = \sum_{n=1}^M \tilde{\lambda}_n b_n \tilde{\rho}_{kn};$$

$$c_{mk} = b_m \left(\tilde{q}_{mk} + \frac{\tilde{c}_k^0}{1 - \tilde{A}} \right), \quad \tilde{c}_k^0 = \sum_{n=1}^M \tilde{\lambda}_n b_n \tilde{q}_{nk} - \lambda_k^2 \tilde{\lambda}_k.$$

Далее предстоит решить систему $2M$ линейных дифференциальных уравнений (35) и (37) относительно неизвестных функций $\Phi_{1,m}$, $\Phi_{2,m}$, $m = 1, 2, \dots, M$. Краевые условия для функций $\Phi_{1,m}$ следуют из (9) и второго условия (11):

$$\Phi_{1,\tau}(0) = d_m F_0 \sin \psi_0; \quad \Phi_{1,\tau}(h) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (38)$$

где d_m находятся из системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^M \frac{p_m J_1(p_m)}{l_n^2 - p_m^2} d_m = \frac{1}{l_n^2} [J_0(l_n \frac{\rho_0}{R}) / J_0(l_n) - 1], \quad n=1, 2, \dots, M, \quad (39)$$

а l_n – корни функций Бесселя 1-го порядка. Реализация первого условия (12) для $z=0$ с учетом

$$N_0(r, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq \rho, \\ e^{V_0}, & \rho < r \leq R, \end{cases}$$

даёт:

$$\sum_{m=1}^M J_0(\lambda_m r) \varphi'_{2,m}(0) - N_0(r, 0) \sum_{m=1}^M J_0(\lambda_m r) \varphi'_{1,m}(0) + J_0(lr) \varphi'_0(0) = 0. \quad (40)$$

Находя из (33) $\varphi'_0(0)$ и подставляя его в (40) для коэффициентов Фурье-разложений по системе функций $\{J_0(\lambda_m r)\}$, получаем систему уравнений:

$$\varphi'_{2,m}(0) + \sum_{k=1}^M [(A_m \tilde{\lambda}_k - D_{mk}) \varphi'_{1,k}(0) - A_m \tilde{\lambda}_k \varphi'_{2,k}(0)] = 0, \quad (41)$$

где

$$A_m = b_m / \chi_e^2, \\ D_{mk} = \frac{2\rho(1 - e^{V_0}) \lambda_k J_0(\lambda_m \rho) J_1(\lambda_k \rho) - \lambda_m J_0(\lambda_k \rho) J_1(\lambda_m \rho)}{R^2 J_1^2(p_k) \lambda_k^2 - \lambda_m^2}$$

причем при $m=k$ для D_{mk} имеет место равенство

$$D_{mm} = e^{V_0} + \frac{1 - e^{V_0}}{J_1^2(p_m)} \frac{\rho^2}{R^2} [J_1^2(\lambda_m \rho) + J_0^2(\lambda_m \rho)].$$

Аналогично из того же условия (12) для $z=h$ с учетом равенства $N_0(r, h) = 1$ следует:

$$\varphi'_{2,m}(h) + \sum_{k=1}^M [(A_m \tilde{\lambda}_k - \delta_{km}) \varphi'_{1,k}(h) - A_m \tilde{\lambda}_k \varphi'_{2,k}(h)] = 0. \quad (42)$$

Таким образом, сформулированы $4M$ краевые условия (38), (41), (42), достаточные для однозначного нахождения искоемых функций $\varphi_{1,m}(z)$, $\varphi_{2,m}(z)$ на отрезке $z \in [0, h]$. Введя обозначения $\varphi_{1,m} = y_m$, $\varphi'_{1,T} = y_{M+T}$, $\varphi_{2,T} = y_{2M+T}$, $\varphi'_{2,T} = y_{3M+T}$, ($T=1, \dots, M$), представим (34), (37) в стандартной форме однородной системы $4M$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y'_m - y_{M+m} = 0; \\ y'_{M+m} - \lambda_m^2 y_m - \chi_e^2 y_{2M+m} - b_m \sum_{k=1}^M \tilde{\lambda}_k (y_k - y_{2M+k}) = 0; \\ y'_{2M+m} - y_{3M+m} = 0; \\ y'_{3M+m} - \lambda_m^2 y_{2M+m} + \sum_{k=1}^M (a_{mk} y_k + b_{mk} y_{M+k} + c_{mk} y_{2M+k}) = 0 \end{cases} \quad (43)$$

и соответствующие краевые условия (38), (41), (42):

$$\begin{cases} y_m(0) = f_m, \quad y_m(h) = 0, \quad m=1, 2, \dots, M, \\ y_{3M+m}(0) + \sum_{k=1}^M [(A_m \tilde{\lambda}_k - D_{mk}) y_{M+k}(0) - A_m \tilde{\lambda}_k y_{3M+k}(0)] = 0; \\ y_{3M+m}(h) + \sum_{k=1}^M [(A_m \tilde{\lambda}_k - \delta_{km}) y_{M+k}(h) - A_m \tilde{\lambda}_k y_{3M+k}(h)] = 0, \end{cases} \quad (44)$$

где $f_m = d_m F_0 \sin \psi_0$, δ_{km} – символ Кронекера.

Представляя общее решение $Y(z) = (y_1, y_2, \dots, y_{4M})$ линейной комбинацией фундаментальной системы решений (43):

$$Y(z) = c_1 g_1(z) + c_2 g_2(z) + \dots + c_{4M} g_{4M}(z), \quad (45)$$

где $g_k(z)$ – вектор-функция с компонентами $g_{k,m}(z)$, причем $g_{k,m}(0) = \delta_{k,m}$, получаем соотношения для определения констант c_k :

$$\begin{cases} c_m = f_m, \quad m=1, 2, \dots, M, \\ \sum_{k=1}^{4M} g_{k,m}(h) c_k = 0, \\ c_{3M+m} + \sum_{k=1}^M [(A_m \tilde{\lambda}_k - D_{mk}) c_{M+k} - A_m \tilde{\lambda}_k c_{3M+k}] = 0, \\ \sum_{k=1}^{4M} c_k \{g_{k,3M+m}(h) + \sum_{n=1}^M [(A_m \tilde{\lambda}_n - \delta_{mn}) g_{k, M+n}(h) - A_m \tilde{\lambda}_n g_{k, 3M+n}(h)]\} = 0. \end{cases} \quad (46)$$

Очевидно, что константы c_k , удовлетворяющие СЛАУ (46), имеют общий множитель $F_0 \sin \psi_0$, т.е. содержат наряду с произвольной постоянной F_0 и неопределенную величину ω . В дальнейшем, для определенности, вместо c_k будем писать $c_k F_0 \sin \psi_0$, например:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = F_0 \sin \psi_0 \sum_{m=1}^M c_{M+m} J_0(\lambda_m r).$$

Для определения ω реализуем условие замкнутости полного тока (10), в результате чего возникает характеристическое уравнение:

$$\frac{\text{ctg}(k_0 g)}{k_0 \varepsilon} - R^2 \sum_{m=1}^M c_{M+m} \frac{J_1(p_m)}{p_m} = 0, \quad (47)$$

в котором неизвестное ω присутствует как явно, входя в k_0 , так и неявно через посредство коэффициентов $c_{M+m}(\omega)$, поскольку исходное уравнение (29) для Φ_1 содержит функцию $C(\omega)$. Заметим также, что входящий в формулы алгоритма (45) поверхностный потенциал полупроводника V_0 через посредство величины D также, очевидно, оказывает влияние на частотный спектр и потери резонатора.

В заключение отметим, что подстановка определенных с точностью до произвольной амплитуды F_0 функций Φ_1 и N_1 в уравнения (17) дает возможность подобным образом определить амплитуду 2-й гармоники поля F_{02} , проникшего за пределы полупроводника ($z < 0$), и амплитуду этой же гармоники F_2 в полупроводнике ($z < 0$) во взаимосвязи с квадратом амплитуды F_0^2 первой резонансной гармоники. Необходимые для этого соотношения возникают из условий, аналогичных (9), (10):

$$-\operatorname{Re} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{для } r \in [0, \rho_0), \\ \frac{F_0}{r} F_{02} \sin 2\psi_0 & \text{для } r \in [\rho_0, R]; \end{cases} \quad (48)$$

$$\operatorname{Re} \int_0^R \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{z=0} r dr = F_{02} \frac{1}{2k_0 \varepsilon} \cos 2\psi_0.$$

Реализация приведенных соотношений в процедуре решения задачи для Φ_2 и N_2 , аналогичной изложенной, приведет к установлению математической взаимосвязи между величиной F_{02} и F_0^2 , описывающей результат нелинейного воздействия СВЧ сигнала с амплитудой F_0 и резонансной частотой ω на полупроводник. Очевидно, что подобное рассуждение можно распространить и на более высокие гармоники исходного СВЧ сигнала. Полученные решения для высоких гармоник могут быть также использованы для дальнейшего уточнения собственных резонансных частот системы на основании (8), полученных при решении (13).

5. Заключение

В данной работе в квазистатическом приближении изложен алгоритм решения задачи о резонансных частотах резонатора коаксиального типа, нагруженного полупроводниковой структурой с учетом искривления энергетических зон у её поверхности и нелинейного характера взаимодействия носителей свободного заряда с СВЧ полем. Этот алгоритм дает возможность проводить анализ нелинейного воздействия СВЧ сигнала на полупроводник с учетом неравномерного распределения равновесной плотности свободного заряда путем получения собственных резонансных частот системы.

Литература: 1. Гордиенко Ю.Е. Вычисление комплексных резонансных частот СВЧ резонаторных датчиков апертурного типа // Радиоэлектроника и информатика. 2001. №2. С. 4-7. 2. Слипченко Н.И., Костычев Ю.Г., Золотарёв В.А. Оценка эффективности метода Трефтца при анализе электродинамических систем для СВЧ диагностики полупроводников и диэлектриков // Радиоэлектроника и информатика. 2001. №1. С. 20-24. 3. Лисюк Ю.В. Поглощение СВЧ мощности в ОПЗ высокоомных полупроводников // Изв. вузов. Физика. 1981. №11. С. 18-22. 4. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973. 5. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.

Поступила в редколлегию 12.03.2005

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Гордиенко Ю.Е.

Слипченко Николай Иванович, канд. техн. наук, профессор, проректор по научной работе ХНУРЭ. Научные интересы: твердотельная электроника, микроволновая микроскопия, радиофизика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-10-20.

УДК 517.9

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С ДИСПЕРСНОЙ СРЕДОЙ

ВЛАСЕНКО Л.А.

Описывается математическая модель эволюции электромагнитного поля в волноводе, заполненном слоистой средой с пространственной дисперсией. В результате разделения переменных в начально-краевой задаче для уравнений Максвелла возникает уравнение в частных производных не типа Коши-Ковалевской. Получена теорема существования и единственности решения соответствующей смешанной задачи. Приводится численный метод нахождения решения.

1. Введение

Цель работы: исследование эволюции электромагнитного поля в волноводе с дисперсной средой. В рассматриваемом случае поле удовлетворяет хорошо известным уравнениям Максвелла, а классические материальные уравнения нарушаются из-за наличия дисперсии. Описание электромагнитного

поля сводится к нахождению его компонент, которые появляются в результате применения метода разделения переменных. Трудности вызывает нахождение компоненты, которая удовлетворяет уравнению в частных производных, не разрешенному относительно старшей производной по времени (уравнению не типа Коши-Ковалевской). В статье установлены условия однозначной разрешимости соответствующей смешанной задачи.

Задачи исследования: представить смешанную задачу в виде абстрактной задачи Коши; указать условия однозначной разрешимости абстрактной задачи; применить абстрактные результаты к начально-краевой задаче не типа Коши-Ковалевской; описать численный метод нахождения решения соответствующей смешанной задачи. В работах [1,2] также исследуется электромагнитное поле в волноводе с дисперсной средой и одна из компонент поля описывается уравнением не типа Коши-Ковалевской. В работе [1] это уравнение является невырожденным (оператор при старшей производной по времени обратим). В [2], как и в данной статье, уравнение не типа Коши-Ковалевской является вырожденным. В этой статье, в отличие от работы [2], абстрактное уравнение, отвечающее соответствующей смешанной задаче, изучается в вещественном пространстве, поэтому применяются дру-