УДК 681.51.015

# МЕТОД СРАВНЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*НАТАЛУХА Ю.В.*

Рассмотрена задача описания входных сигналов с помощью гильбертова пространства с использованием элементов абелевых групп. Данный подход позволяет осуществить более точное разбиение пространства входных сигналов на классы эквивалентности.

Проблема идентификации включает определение структуры и параметров динамических объектов. Без знания закономерностей, которым подчиняются управляемые объекты, невозможно управлять ими. Методы идентификации объектов управления, систем контроля, регулирования и управления различных динамических систем, основанные на количественных измерениях, зачастую не приносят желаемого результата, как правило, не отличаются высокой степенью точности.

Классическая постановка задачи идентификации формулируется так: рассматривается объект, содержание которого не известно, на вход этого объекта подается сигнал x любой природы, который всегда регистрируется, а на выходе объекта известен сигнал y. Требуется расшифровать вид математической зависимости $y=F(x)$. Для этого можно воспользоваться различными формами описания изучаемого процесса: дифференциальными, разностными уравнениями, передаточными функциями, градиентными выражениями и др.

Из рис. 1 видно, что для решения задачи идентификации оператора F необходимо точно знать, какие пространства образуют входные и выходные сигналы. Идентификация параметров играет существенную роль в управлении процессами, что в свою очередь часто связано с дифференциальными уравнениями. Поэтому входные и выходные сигналы должны образовывать пространство непрерывно дифференцируемых функций.

В качестве пространства входных сигналов (входного пространства функций) выбрано гильбертово функциональное пространство, скалярное произведение в котором задается с помощью интеграла. А математический аппарат теории предикатов n-мерной линейности удобно использовать в рассматриваемом методе сравнения, так как на выходе получается двухзначная функция.


Рис. 1. Классическая схема идентификации

Известно много методов идентификации систем, но все они основаны на измерении входного и выходного сигналов. Оказывается, для идентификации линейных динамических систем можно применить метод сравнения [1] (рис. 2). Он состоит в том, что обследуются одновременно два идентичных объекта, выходные сигналы которых подаются на нуль-орган (НО) [1,2], где производится их сравнение и формируется двоичный ответ (1 или 0) в зависимости от совпадения или несовпадения выходных сигналов.

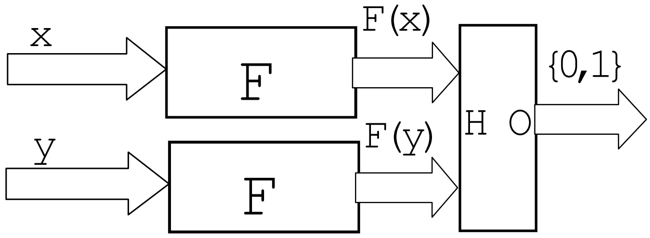


Рис. 2. Схема метода сравнения

Идентификация объекта ведется путем математической обработки входных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ и соответствующего двоичного ответа $z=D[F(x(t)), F(y(t))]$, где D – предикат равенства; F – оператор преобразования, заданный набором функционалов. Этот метод является развитием метода взвешивания масс на чашечных весах (метод компаратора). Он обладает точностью, намного превосходящей точность идентитфикации по методу "черного ящика". В тех же случаях, когда выходные сигналы объекта исследования не доступны непосредственному измерению (например, органы чувств человека), метод сравнения оказывается единственно возможным для идентификации объекта.

В качестве характерного примера подобной ситуации можно указать на управление технологическими процессами в металлургической и химической промышленности, где цветовые оттенки не подлежат количественному измерению.

Однако процесс идентификации, основанный на методе нуль-органе, за исключением простейших ситуаций практически не использовался при решении технических задач. В то же время широкое применение этого подхода позволит расширить функциональные возможности имеющихся средств управления техническими системами, а также разработать принципиально новые подсистемы, обладающие любой требуемой точностью. Прямой перенос в технические задачи известных в психофизике результатов невозможен, и это объясняется спецификой идентификации технических систем, разнообразием возможных входных сигналов.

В настоящей работе используется метод сравнения, позволяющий существенно повысить точность процессов идентификации, что ведет к улучшению контроля и управления для различных объектов и систем.

Метод сравнения позволяет фиксировать значения предиката $\Phi(x,y)$ как функцию двух входных сигналов, а предикат $\Phi(x,y)$ представить в виде

$$\Phi(x,y)=D(\varphi(x),\varphi(y)), \tag{1}$$

где элементы x, y пробегают произвольную абелеву группу G[4, 5], а $\varphi$: – гомоморфизм G на некоторую абелеву группу L, т. е. $\varphi$ – отображение G на L, удовлетворяющее условию

.

Таким образом, имеет место понятие о равенстве и не равенстве двух предикатов, которое дает информацию о разбиении множества входных сигналов на классы эквивалентности относительно неизвестного преобразователя.

Один преобразователь осуществляет более мелкое разбиение, другой – более крупное, что физически определяет точность идентификации.

Физическую интерпретацию изменения точности предикатов n–мерной линейности можно показать на эффекте дальтонизма. Огрубление предикатов ведет к сокращению числа классов эквивалентности входного пространства – слиянию и неразличению цветов, например, синего–зеленого и красного–оранжевого.

Математические модели идентификации реальных систем основываются на методе сравнения и используют конечные наборы линейных функционалов [3]. В этом случае пространство входных сигналов отображается с помощью линейного преобразования φ в n–мерное арифметическое пространство; φ: , где H – вещественное гильбертово пространство, выбранное в качестве входного, что позволяет с высокой степенью адекватности описывать широкий класс динамических процессов.

**Утверждение 1**. Предикат Φ(x, y) определяет на абелевой группе отношение эквивалентности:

$$x \sim y, \text{ если } \Phi(x, y)=1. \qquad (2)$$

Классы эквивалентности $A_i$ (i=0, 1, ..., n) являются полными прообразами элементов $a \in L$ в группе G. В силу основной теоремы о гомоморфизмах групп [4, 5] полные прообразы элементов $a \in L$ при гоморфизме φ: являются смежными классами $x+A_0$ группы G по ядру отображения

$$K_{er}\varphi=A_0, \qquad (3)$$

где $A_0=\{x \in G, \varphi(x)=0\}$.

Элементы x, $y \in G$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же смежном классе группы G по подгруппе $A_0 = K_e\varphi$. Значит, предикат Φ(x, y) вполне определяется заданием подгруппы

$$A_0=\{x \in G, x \sim 0\}=K_{er}\varphi.$$

При формализации процессов идентификации линейных динамических систем доказаны следующие утверждения.

**Утверждение 2**. Равенство

$$\Phi_1(x,y)=\Phi_2(x,y) \ (\quad)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$K_{er}\varphi_1=K_{er}\varphi_2 . \qquad (4)$$

**Утверждение 3**. Предикат $\Phi_2(x,y)$ грубее предиката $\Phi_1(x,y)$ тогда и только тогда, когда .
(5)

Данные утверждения позволяют синтезировать алгоритмы идентификации наиболее рационального вида, в том числе с заданной точностью.

Возьмем G=H – вещественное гильбертово пространство, L – конечномерное евклидово (вещественное) пространство, а φ: – непрерывный линейный оператор из H на L. Тогда $K_{er}\varphi=H_0$ есть замкнутое подпространство пространства H.

Рассмотрим произвольный базис $l_1, l_2, ..., l_n$ в L. Тогда

$$\varphi(x)=f_1(x)l_1+...+f_n(x)l_n, \qquad (6)$$

где $f_1(x), ..., f_n(x)$ – непрерывные линейные (вещественные) функционалы на H (ясно, что они линейно независимы). Введем в рассмотрение координатное пространство

$$L'=(f_1(x), ..., f_n(x)).$$

Назовем предикатом n–мерной линейности (n- предикатом) [6,7] выражение

$$\Phi(x,y)=D(\varphi(x),\varphi(y)). \qquad (7)$$

Здесь φ: по-прежнему непрерывный линейный оператор из H в любое конечномерное линейное пространство над полем вещественных чисел. Этот предикат Φ(x,y) n–мерной линейности на H реализуются следующим образом:

а) задаем произвольно n–линейно независимых непрерывных линейных функционалов $f_1(x), ..., f_n(x)$ на H и вводим линейное n–мерное пространство

$$L'=(f_1(x), ..., f_n(x));$$

б) вводим линейный оператор

$$\varphi: \quad ,$$

где $\varphi(x)=f_1(x), ..., f_n(x)$;

в) полагаем, что

$$\Phi(x,y)=D(\varphi(x),\varphi(y)).$$

**Утверждение 4**. Пусть $\Phi_1(x,y)$ и $\Phi_2(x,y)$ – два предиката n–мерной линейности на , т. е.

$$\Phi_1(x,y)=D(\varphi_1(x),\varphi_1(y)), \varphi_1(x)=(f_1(x), ..., f_n(x)),$$
$$\Phi_2(x,y)=D(\varphi_2(x),\varphi_2(y)), \varphi_2(x)=(\psi_1(x), ..., \psi_n(x)), \qquad (8)$$

где $f_i(x)$, $\psi_i(x)$ – непрерывные линейные функционалы на H. Предикат $\Phi_2(x,y)$ грубее предиката $\Phi_1(x,y)$ тогда и только тогда, когда существует такая вещественная матрица

$$\quad , \qquad (9)$$

что $f_i(x)=a_{i1}\psi_1(x)+...+a_{ir}\psi_r(x)$, (i=1, 2, ..., n).

Данное утверждение используется при построении процедур идентификации с заданной точностью [8] и позволяет учитывать особенности пространства входных сигналов.

Следующая формула является каноническим видом предиката n–мерной линейности [7], дающим возможность унифицировать программно–аппаратную реализацию алгоритмов

$$\Phi(x, y)=D(Px,Py). \qquad (10)$$

Здесь P – оператор проектирования пространства H на его конечномерное пространство L [9]. При этом для любого $x \in H$ имеет место равенство

$$P(x)=f_1(x)l_1+...+f_n(x)l_n, \qquad (11)$$

где $f_1(x), ..., f_n(x)$ – непрерывные линейные функционалы на H.

**Утверждение 5**. Пусть предикат n–мерной линейности Φ(x,y) задается с помощью непрерывных линейных функционалов $f_1(x), ..., f_n(x)$. Функционалы $f_1(x), ..., f_n(x)$ тогда и только тогда реализуются как координаты в базисе $l_1, ..., l_n$ некоторого конечномерного замкнутого подпространства $L_1$ пространства H, когда имеет место свойство биортогональности

(12)

При проектировании P на конечномерное подпространство $L_1$ пространства H базисы в H можно выбирать различными способами. Для перехода от одного базиса к другому используется соотношение

. (13)

Здесь $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ – координаты векторов $Px \in L_1$ в базисе $u_1, \ldots, u_n$: $\varphi(x) = f_1(x), \ldots, f_n(x)$ – координаты вектора $Px \in L_1$ в базисе $l_1, \ldots, l_n$: $A = (a_{ij}) = f_i u_j$ – матрица перехода от одного базиса к другому.

При данном подходе в качестве H практически всегда выбирается подпространство $L_2[0,1]$ – интегрируемых по Лебегу вещественных функций на отрезке [0,1]. В силу известной теоремы Рисса об общем виде линейного функционала на H [3] каждый линейный функционал $f_i(x)$ имеет вид

, (14)

где $x(t)$ пробегает $L_2[0,1]$, а $a_i(t) \in L_2[0,1]$ – фиксированная функция.

Функционалы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ вида

линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы на отрезке [0,1] функции $a_1(t)$, $a_2(t), \ldots, a_n(t)$.

В силу этого выбор n-линейно независимых непрерывных линейных функционалов $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ на $H = L_2[0,1]$ сводится к выбору n-линейно независимых функций $a_1(t), \ldots, a_n(t) \in L_2[0,1]$. Получен удобный критерий линейной независимости функций, связанный с оценкой собственных чисел матрицы Грама.

Показано, что две линейно независимые системы функций определяют один и тот же предикат n-мерной линейности, если существует матрица перехода A*, удовлетворяющая условию

$$\alpha A^* - f = 0. \qquad (15)$$

С целью повышения помехоустойчивости алгоритмов идентификации критерий точности выбора матрицы A* определяется следующим образом:

, (16)

где $\delta > 0$ – наперед заданный порог.

Наборы функций и всегда можно задавать своими конечными аппроксимациями на отрезке [0,1], т. е. зафиксировать наборы точек $t_1, t_2, \ldots, t_p \in [0,1]$ и определить значения функций в этих точках. Тогда при высокой точности аппроксимации возможна замена наборов и на приближенные значения линейно независимых функций и .

**Литература**: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П., Рвачов В. Л., Мурашко А. Г.* Математичні моделі зору. К.: Наук. думка. 1967. 87с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Математическое моделирование некоторых функций человеческого зрения. Х. 1970. 317с. 3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М: Мир, 1979. 587с. 4. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967. 648с. 5. *Н. Бураки.* Общая топология. М.: Наука, 1969. 392с. 6. *Горбатов В.А.* Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 311с. 7. *Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушнаренко Ю. П., Шляхов В. В.* Предикаты n-мерной линейности и их свойства. 1982. 19 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4764-82. 8. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Т.1. 632 с. 9. *D.Hilbert und P. Bernays.* Grundlagen der mathematic//Springer-Verlag. 1968. 557с.

Поступила в редколлегию 21.03.98

**Наталуха Юрий Владимирович**, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: алгебра, диагностика, управление, контроль и надежность в технических системах. Увлечения: растениеводство, автотуризм, баскетбол, теннис. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.