УДК 621.385.69

А.В. ГРИЦУНОВ, канд. техн. наук

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Метод комплексных амплитуд является одним из базовых при спектральном моделировании СВЧ-приборов [1]. В его основе лежит выделение комплексной огибающей узкополосного в области частот и постоянных распространения сигнала. Эта комплексная амплитуда, как правило, предполагается непрерывной функцией как времени, так и продольной координаты z. Под продольным понимается направление распространения энергии в замедляющей системе (ЗС). Таким образом, данный подход обычно базируется на непрерывном приближении, что типично для исследования колебательных систем с распределенными параметрами [2]. Это допустимо, если относительное изменение комплексной огибающей на периоде D системы мало.

В качестве уравнений возбуждения при моделировании СВЧ-приборов методом комплексных амплитуд часто используют уравнения Л.А.Вайнштейна [3] или С.П.Кузнецова и Д.И.Трубецкова [4]. Однако они не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к спектральным моделям, поскольку не учитывают нелинейность дисперсионной характеристики, частотные зависимости поперечной структуры поля и волнового сопротивления ЗС. Кроме того, вывод их осуществлен для регулярных волноводов и обобщение на случай периодической структуры, сделанное в работе [3], не представляется достаточно убедительным. Поэтому имеет смысл попытаться вывести уравнение возбуждения периодической ЗС для метода комплексных амплитуд «с противоположной стороны», т.е. путем перехода от дискретного приближения к непрерывному.

В качестве исходных используем: а) уравнение возбуждения однородной резонаторной ЗС для метода мгновенных значений [5]:

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+2\sum_u \delta_{0|u|}\frac{dT_{n+u}}{dt}+\sum_u \omega_{0|u|}^2 T_{n+u}=-\frac{1}{2}\sum_u W^i{}_{0|u|}\int_V \mathrm{E}_{0n+u}\frac{\partial \mathrm{j}_{exc}}{\partial t}dV\ ; \qquad (1)$$

б) зависимости частоты ω, коэффициента затухания δ и погонной единичной энергии электрического поля W_l нормального вида ЗС от фазового сдвига $\Delta\varphi$ на ее периоде, которые нетрудно получить из аналогичного (1) однородного уравнения:

$$\sum_u \omega_{0|u|}^2\cos u\Delta\varphi=\omega^2\ , \quad (2) \qquad \sum_u \delta_{0|u|}\cos u\Delta\varphi=\delta\ , \quad (3) \qquad \sum_u W_{0|u|}\cos u\Delta\varphi=2DW_l\ ; \quad (4)$$

в) выражение для напряженности соленоидального электрического поля в произвольной точке пространства прибора в текущий момент времени:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z)=\sum_n \mathrm{E}_{0n}(x,y,z)T_n(t)\ . \qquad (5)$$

В формулах (1) – (5) $T_n(t)$ – временная функция соленоидального электрического поля n-й ячейки; ω_{0n}^2 – элементы строки матрицы квадратов собственных частот и коэффициентов связи парциальных видов ячеек ЗС (коэффициент ω_{00}^2 расположен на главной диагонали); δ_{0n}, W_{0n} и $\mathrm{W}^i{}_{0n}$ – аналогичные элементы соответственно матрицы коэффициентов затухания, прямой и обращенной матрицы единичных энергий этих видов; $\mathrm{E}_{0n}(x,y,z)$ – единичная структурная функция электрического поля парциального вида n-го резонатора; $\mathrm{j}_{exc}(t,x,y,z)$ – плотность возбуждающего (exciting) тока. Для парциального вида n-й ячейки единичные величины соответствуют $T_n = 1$, $T_{nn} = 0$ $(nn \neq n)$. Для нормального вида ЗС погонная единичная энергия соответствует амплитуде этого вида, равной единице, и представляет собой усредненную на пространственном периоде колебания энергию электрического поля, приходящуюся на единицу длины ЗС. Интегрирование производится по объемам, для которых функции $\mathrm{E}_{0n}(x,y,z)$ отличны от нуля, или по всему пространству прибора. Суммирование в выражениях (1) – (4) осуществляется по $u = -N_{coup}\ \ldots\ +N_{coup}$ резонаторам, связь с которыми учитывается для текущей (n-й) ячейки. Суммирование в формуле (5) производится по ячейкам, структурные функции которых отличны от нуля в данной точке.

Определим комплексную огибающую общего решения $T_n(t)$ уравнения (1) для ячеек замедляющей системы как непрерывную функцию времени и продольной координаты $A(t,z)$, такую что:

$$T_n(t) = \mathrm{Re}\{A(t,nD)e^{-i\beta_b nD}e^{i\omega_b t}\}, \tag{6}$$

где β_b – базовая постоянная распространения волны (точнее, ее нулевой пространственной гармоники). Это постоянная распространения ЗС (вещественная) на базовой частоте ω_b, вычисленная из дисперсионной характеристики (2). Далее индексом b будут отмечаться базовый коэффициент затухания нормального вида ЗС δ_b, базовая постоянная затухания бегущей волны α_b и другие электродинамические параметры холодной системы, а также производные от них, соответствующие выбранной базовой частоте или постоянной распространения.

Комплексную амплитуду волны $A(t,z)$ считаем медленно меняющейся во временной области и в области постоянных распространения, т.е. удовлетворяющей соотношениям:

$$\left|\partial^2 A/\partial t^2\right| << \left|i\omega_b\, \partial A/\partial t\right|, \quad \left|\partial A/\partial t\right| << \left|i\omega_b A\right|, \quad \left|\partial^2 A/\partial z^2\right| << \left|i\beta_b\, \partial A/\partial z\right|, \quad \left|\partial A/\partial z\right| << \left|i\beta_b A\right|.$$

Комплексную амплитуду плотности возбуждающего тока $\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,z)$ выразим зависимостью:

$$\mathrm{j}_{exc}(t,x,y,z) = \mathrm{Re}\{\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,z)e^{-i\beta_b z}e^{i\omega_b t}\}. \tag{7}$$

Определенная таким образом функция $\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,z)$ имеет широкий спектр как в области частот, так и в области постоянных распространения. Но, в отличие от функции j_{exc}, эффективно взаимодействующие с волной спектральные компоненты возбуждающего тока сосредоточены теперь вблизи нулевой частоты и нулевой постоянной распространения, а также постоянных распространения, образующихся в результате ее подмены (см. далее). Поскольку замедляющая система бегущей волны не обладает резонансными свойствами, перед подстановкой в правую часть уравнения возбуждения комплексной огибающей J_{exc} следует убрать из ее временного спектра высшие гармоники. В противном случае применение метода медленно меняющихся амплитуд (ММА) к комплексной амплитуде $A(t,z)$ окажется некорректным.

Перед выводом уравнения возбуждения рассмотрим методику нахождения мгновенного значения напряженности соленоидального электрического поля в произвольной точке пространства прибора, исходя из комплексной амплитуды $A(t,z)$, определенной выражением (6). Подставим последнее в формулу (5). Имеем:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z) = \mathrm{Re}\{e^{i\omega_b t}\sum_n \mathrm{E}_{0n}(x,y,z)A(t,nD)e^{-i\beta_b nD}\}. \tag{8}$$

Соотношение (8) основано на дискретном подходе (т.е. рассмотрении ЗС как цепочки резонаторов). Для перехода к квазинепрерывному приближению введем комплексную единичную структурную функцию электрического поля бегущей волны $\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta)$:

$$\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta) = \sum_n \mathrm{E}_{0n}(x,y,z)e^{i\beta(z-nD)}. \tag{9}$$

Суммирование здесь, как и в (5), производится по ячейкам, парциальные структуры электрического поля которых отличны от нуля в точке (x,y,z). Тогда напряженность электрического поля монохроматической волны с постоянной распространения β_b+B запишется следующим образом:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z) = \mathrm{Re}\{e^{-i\beta_b z}e^{i\omega_b t}\,\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b+\mathrm{B})A(t,0)e^{-i\mathrm{B}z}\},$$

а немонохроматической – как интеграл Фурье:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\{e^{-i\beta_b z}e^{i\omega_b t}\int_{-\pi/D}^{+\pi/D}\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b+\mathrm{B})A^{\beta}(t,\mathrm{B})e^{-i\mathrm{B}z}\,d\mathrm{B}\}. \tag{10}$$

где $A^{\beta}(t,\mathrm{B})$ – пространственная спектральная плотность функции $A(t,z)$ на постоянной распространения В:

$$A(t,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/D}^{+\pi/D}A^{\beta}(t,\mathrm{B})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{B}z}\,d\mathrm{B}\,. \qquad (11)$$

Пределы интегрирования в формулах (10) и (11) устанавливаются с учетом дискретности определения амплитуды A выражением (6) с шагом D.

Несмотря на непрерывность функций, входящих в выражения (10) и (11), последние по-прежнему эквивалентны формуле (8). Для того, чтобы убедиться в этом, воспользуемся периодичностью функции E_{0w} по z с периодом D и разложим ее в ряд Фурье по пространственным гармоникам:

$$\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta)=\sum_{s}\mathrm{E}^{s}{}_{0w}(x,y,\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi s}{D}z}\,, \qquad (12)$$

где $\mathrm{E}^{s}{}_{0w}(x,y,\beta)$ – амплитуда гармоники разлагаемой функции с номером s. В соответствии с известным соотношением между спектральной плотностью одиночного импульса и коэффициентами ряда Фурье периодической последовательности аналогичных импульсов [6] она равна:

$$\mathrm{E}^{s}{}_{0w}(x,y,\beta)=\frac{1}{D}\mathrm{E}^{\beta}{}_{00}(x,y,\beta+2\pi s/D)\,, \qquad (13)$$

где $\mathrm{E}^{\beta}{}_{00}(x,y,\beta+2\pi s/D)$ – пространственная спектральная плотность единичной структурной функции парциального вида нулевой ячейки:

$$\mathrm{E}^{\beta}{}_{00}(x,y,\beta_b+\mathrm{B}+2\pi s/D)=\int\limits_{\Delta z}\mathrm{E}_{00}(x,y,\varsigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\beta_b+\mathrm{B}+\frac{2\pi s}{D}\right)\varsigma}\,d\varsigma\,. \qquad (14)$$

Здесь Δz – расстояние, на котором функцию $\mathbf{E}_{00}$ нельзя считать нулевой. Подставим (12) в (10). После несложных преобразований, заключающихся во внесении интеграла по В под интеграл по ς с последующей заменой его согласно выражению (11) на $A(t,z-\varsigma)$, получаем:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z)=\frac{1}{D}\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_b t}\int\limits_{\Delta z}\mathrm{E}_{00}(x,y,\varsigma)A(t,z-\varsigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_b(z-\varsigma)}\sum_{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi s}{D}(z-\varsigma)}d\varsigma\}\,.$$

Учитывая, что сумма пространственных гармоник одинаковой амплитуды образует периодическую последовательность δ-функций, перепишем данное выражение в виде:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z)=\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_b t}\sum_{n}\int\limits_{\Delta z}\mathrm{E}_{00}(x,y,\varsigma)A(t,z-\varsigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_b(z-\varsigma)}\delta(z-\varsigma-nD)d\varsigma\}\,. \qquad (15)$$

Таким образом, мгновенное значение напряженности соленоидального электрического поля вычисляется как свертка единичной структурной функции парциального вида колебаний нулевой ячейки ЗС с комплексной амплитудой волны, гармонической функцией на базовой постоянной распространения и δ-функциями, следующими с периодом D. Поскольку $\mathbf{E}_{0n}(x,y,z)=\mathbf{E}_{00}(x,y,z-nD)$, нетрудно видеть, что выражения (15) и (8) эквивалентны. Следовательно, строгий учет зависимости структуры поля бегущей волны от постоянной распространения возможен только в рамках дискретного подхода.

Попытаемся учесть эту зависимость приближенно. Для этого запишем функцию $\mathbf{E}_{0w}$ на постоянной распространения β_b+В в виде ряда Тейлора:

$$\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b+\mathrm{B})=\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b)+\frac{\partial\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b)}{\partial\beta}\mathrm{B}+\ldots\,. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (10), с учетом выражения (11) и известных свойств преобразования Фурье [6] получаем:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z) = \mathrm{Re}\left\{\left[\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b)A(t,z) + \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial A(t,z)}{\partial z}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_b z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_b t}\right\}. \quad (17)$$

Производная от единичной структурной функции бегущей волны по β на базовой постоянной распространения вычисляется путем дифференцирования выражения (9):

$$\frac{\partial \mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b)}{\partial\beta} = \mathrm{i}\sum_n \mathrm{E}_{0n}(x,y,z)(z-nD)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_b(z-nD)} \quad (18)$$

Выведем теперь уравнение возбуждения волноведущей сист... для этого подставим выражения (6) и (7) в уравнение возбуждения (1) для мгновенного зна... поля колебания в n-й ячейке однородной замедляющей системы. Имеем:

$$\frac{\partial^2 A(t,nD)}{\partial t^2} + 2i\omega_b\frac{\partial A(t,nD)}{\partial t} - \omega_b^2 A(t,nD) +$$

$$+2\sum_u \delta_{0|u|}\left(\frac{\partial A[t,(n+u)D]}{\partial t} + i\omega_b A[t,(n+u)D]\right)e^{-iu\Delta\varphi_b} + \sum_u \omega_{0|u|}^2 A[t,(n+u)D]e^{-iu\Delta\varphi_b} = \quad (19)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_u W^i{}_{0|u|}\int_V \mathbf{E}_{0n+u}\frac{\partial \mathbf{J}_{exc}}{\partial t}e^{-i\beta_b(z-nD)}dV - \frac{i\omega_b}{2}\sum_u W^i{}_{0|u|}\int_V \mathbf{E}_{0n+u}\mathbf{J}_{exc}\,e^{-i\beta_b(z-nD)}dV,$$

где $\Delta\varphi_b$ – изменение фазы основной пространственной гармоники волны между соседними ячейками ЗС, связанное с базовой постоянной распространения этой волны соотношением $\Delta\varphi_b = D\beta_b$.

Запишем комплексные амплитуды $A(t,z)$ и $\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,z)$ как двойные интегралы Фурье от спектральных плотностей в частотной области и области постоянных распространения $A^{\omega\beta}(\Omega,\mathrm{B})$ и $\mathrm{J}^{\omega\beta}{}_{exc}(\Omega,x,y,\mathrm{B})$ соответственно. Переменные Ω и B являются, вообще говоря, независимыми, поскольку их можно связать дисперсионным соотношением (2) только при отсутствии возбуждающего тока. С учетом вышеприведенного замечания о расчете $\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,z)$ временные спектры обеих функций сосредоточены вблизи нулевой частоты. Пространственный спектр амплитуды $A(t,z)$ также находится в области нулевой постоянной распространения, а пространственный спектр функции J_{exc} имеет произвольный характер. Поскольку уравнение возбуждения (19) связывает с возбуждающим током значения амплитуды в дискретных точках $z_n = nD$, необходимо учитывать явление подмены постоянных распространения [7]. Эффективное взаимодействие с волной имеет место для всех составляющих тока $\mathrm{J}^{\omega\beta}{}_{exc}$, соответствующие аргументы которых близки к $2\pi s/D$, где $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Следовательно, возбуждающий ток целесообразно записать в виде суммы «частичных» комплексных огибающих $\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)$, пространственные спектры которых находятся в интервале от $-\pi/D$ до $+\pi/D$:

$$\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,z) = \sum_s \mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi s}{D}z}. \quad (20)$$

Выразим теперь введенные комплексные амплитуды через их спектральные плотности как:

$$A(t,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi/D}^{+\pi/D} A^{\omega\beta}(\Omega,\mathrm{B})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{B}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\Omega t}\,d\mathrm{B}d\Omega \quad (21)$$

и

$$\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi/D}^{+\pi/D} \mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}(\Omega,x,y,\mathrm{B})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{B}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\Omega t}\,d\mathrm{B}d\Omega, \quad (22)$$

где $\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}$ – пространственно-временной спектр «частичной» комплексной огибающей $\mathrm{J}^s{}_{exc}$ (часть функции $\mathrm{J}^{\omega\beta}{}_{exc}$, соответствующая постоянным распространения $2\pi s/D \pm \pi/D$, смещенная в сторону начала координат на величину $2\pi s/D$). Очевидно, что благодаря такому определению интегрирование в выражениях (21) и (22) достаточно производить лишь в области низких частот $|\Omega| \ll \omega_b$ и малых постоянных распространения $|\mathrm{B}| \ll |\beta_b|$. Данное обстоятельство, в частности, позволяет применить метод ММА для временной координаты, а при необходимости – и для пространственной (см. далее).

Подставим выражения (20), (21) и (22) в уравнение (19). С учетом свойств преобразования Фурье имеем:

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\pi/D}^{+\pi/D}(\omega_b+\Omega)^2 A^{\omega\beta}\, e^{-in\Delta\Phi} e^{i\Omega t}\, d\mathrm{B} d\Omega +\\
+2i\sum_u \delta_{0|u|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\pi/D}^{+\pi/D}(\omega_b+\Omega)A^{\omega\beta}\, e^{-iu(\Delta\varphi_b+\Delta\Phi)}e^{-in\Delta\Phi}e^{i\Omega t}\, d\mathrm{B}d\Omega +\\
+\sum_u \omega_{0|u|}^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\pi/D}^{+\pi/D}A^{\omega\beta}\, e^{-iu(\Delta\varphi_b+\Delta\Phi)}e^{-in\Delta\Phi}e^{i\Omega t}\, d\mathrm{B}d\Omega =\\
=-\frac{i}{2}\sum_u W^i{}_{0|u|}\int\limits_V \mathbf{E}_{0n+u}\left(\sum_s e^{-i\frac{2\pi s}{D}z}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\pi/D}^{+\pi/D}(\omega_b+\Omega)\mathbf{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}\, e^{-i\mathrm{B}z}e^{i\Omega t}\, d\mathrm{B}d\Omega\right)e^{-i\beta_b(z-nD)}\, dV ,
\end{gathered}
$$

где $\Delta\Phi = \mathrm{B}D$.

Поменяем местами в правой части данного уравнения интегралы по B и Ω с интегралом по объему. Внесем все суммы по u под интегралы по B и Ω. Избавляясь затем от интегрирования по этим переменным, получаем:

$$
\begin{gathered}
-(\omega_b+\Omega)^2 A^{\omega\beta} + 2i(\omega_b+\Omega)A^{\omega\beta}\sum_u \delta_{0|u|}\, e^{-iu(\Delta\varphi_b+\Delta\Phi)} + A^{\omega\beta}\sum_u \omega_{0|u|}^2\, e^{-iu(\Delta\varphi_b+\Delta\Phi)} =\\
=-\frac{i(\omega_b+\Omega)}{2}\sum_s\sum_u W^i{}_{0|u|}\int\limits_V \mathbf{E}_{0n+u}\mathbf{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}\, e^{-i(\beta_b+\mathrm{B})(z-nD)}e^{-i\frac{2\pi s}{D}z}\, dV .
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Учтем теперь, что согласно (2) и (3):

$$\sum_u \delta_{0|u|}\cos u(\Delta\varphi_b+\Delta\Phi) = \delta(\beta_b+\mathrm{B}),$$

$$\sum_u \omega_{0|u|}^2\cos u(\Delta\varphi_b+\Delta\Phi) = \omega^2(\beta_b+\mathrm{B}).$$

Расписывая значения δ и ω, соответствующие постоянной распространения «холодной» ЗС $\beta_b+\mathrm{B}$, в виде рядов Тейлора в окрестности β_b, имеем:

$$\delta(\beta_b+\mathrm{B}) = \delta_b + \frac{d\delta_b}{d\beta}\mathrm{B}+\dots ,$$

$$\omega(\beta_b+\mathrm{B}) = \omega_b + \frac{d\omega_b}{d\beta}\mathrm{B}+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_b}{d\beta^2}\mathrm{B}^2+\dots ,$$

откуда, пренебрегая членами порядка B^3 и B^4, получаем:

$$\omega^2(\beta_b+\mathrm{B}) \approx \omega_b^2 + 2\omega_b\frac{d\omega_b}{d\beta}\mathrm{B}+\left(\frac{d\omega_b}{d\beta}\right)^2\mathrm{B}^2+\omega_b\frac{d^2\omega_b}{d\beta^2}\mathrm{B}^2 . \tag{24}$$

Подставим полученные ряды в уравнение (23) и применим метод ММА во временной области, т.е. пренебрежем членами порядка Ω по сравнению с ω_b. Заметим, что для узкополосного сигнала третий элемент в разложении (24) получается близким по величине к Ω^2, поэтому им также следует пренебречь. В результате имеем:

$$\left(\mathrm{i}\Omega+\delta_b+\frac{d\delta_b}{d\beta}\mathrm{B}-\mathrm{i}\frac{d\omega_b}{d\beta}\mathrm{B}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{d^2\omega_b}{d\beta^2}\mathrm{B}^2\right)A^{\omega\beta}= \\ =-\frac{1}{4}\sum_s\sum_u W^i{}_{0|u|}\int_V \mathrm{E}_{0n+u}\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_b+\mathrm{B})(z-nD)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi s}{D}z}\,dV\,. \tag{25}$$

Займемся теперь преобразованиями правой части данного уравнения. Запишем ее следующим образом:

$$-\frac{1}{4}\sum_s\sum_u W^i{}_{0|u|}\int_{S_t}\Big(\int_{\Delta z}\mathrm{E}_{0n+u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_b+\mathrm{B})(z-nD)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi s}{D}z}\,dz\Big)\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}dS\,,$$

где S_t – поперечное сечение пространства взаимодействия; Δz – расстояние, на котором функцию E_{0n+u} нельзя считать нулевой. Поскольку $\mathrm{E}_{0n+u}(x,y,z)=\mathrm{E}_{0u}(x,y,z-nD)$, после подстановки $z'=z-nD$ правая часть перепишется в виде:

$$-\frac{1}{4}\sum_s\sum_u W^i{}_{0|u|}\int_{S_t}\Big(\int_{\Delta z}\mathrm{E}_{0u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\beta_b+\mathrm{B}+\frac{2\pi s}{D}\right)z}\,dz\Big)\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}dS$$

(мы не будем всякий раз после подобного преобразования заострять внимание на смещении интервала интегрирования Δz, предполагая, что он всегда пространственно связан с подынтегральной функцией E_0).

Повторная подстановка $z'=z-uD$ дает:

$$-\frac{1}{4}\sum_u W^i{}_{0|u|}\cos u(\Delta\varphi_b+\Delta\Phi)\cdot\sum_s\int_{S_t}\Big(\int_{\Delta z}\mathrm{E}_{00}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\beta_b+\mathrm{B}+\frac{2\pi s}{D}\right)z}\,dz\Big)\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}dS\,.$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся следующим приближенным равенством, имеющим место в случае, если элементы симметрической матрицы единичных энергий $\|\mathbf{W}_0\|$ быстро убывают при удалении от главной диагонали:

$$\left(\sum_u W_{0|u|}\cos u\Delta\varphi_b\right)^{-1}\approx\sum_u W^i{}_{0|u|}\cos u\Delta\varphi_b\,.$$

Справедливость его можно проверить, например, путем численных расчетов. Тогда с учетом (4) правая часть уравнения возбуждения запишется как:

$$-\frac{1}{8DW_l(\beta_b+\mathrm{B})}\sum_s\int_{S_t}\Big(\int_{\Delta z}\mathrm{E}_{00}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\beta_b+\mathrm{B}+\frac{2\pi s}{D}\right)z}\,dz\Big)\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}dS\,. \tag{26}$$

Разложим погонную единичную энергию, соответствующую постоянной распространения «холодной» ЗС $\beta_b+\mathrm{B}$, в ряд Тейлора в окрестности β_b:

$$W_l(\beta_b+\mathrm{B})=W_{lb}+\frac{dW_{lb}}{d\beta}\mathrm{B}+\ldots\,.$$

В предположении малости B выражение (26) перепишется теперь в виде:

$$-\frac{1}{8D}\left(\frac{1}{W_{lb}}-\frac{1}{{W_{lb}}^2}\frac{dW_{lb}}{d\beta}\mathrm{B}\right)\sum_{s}\int_{S_t}\Big(\int_{\Delta z}\mathrm{E}_{00}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\beta_b+\mathrm{B}+\frac{2\pi s}{D}\right)z}dz\Big)\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}dS\,. \tag{27}$$

Сравнивая интеграл по z в этом выражении с формулами (13) и (14), нетрудно видеть, что с точностью до множителя $1/D$ он является комплексно сопряженной s-й пространственной гармоникой единичной структурной функции $\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta_b+\mathrm{B})$. Следовательно, поменяв местами интегрирование по поперечному сечению и суммирование по пространственным гармоникам, выражение (27) можно записать как:

$$-\left(\frac{1}{8W_{lb}}-\frac{1}{8{W_{lb}}^2}\frac{dW_{lb}}{d\beta}\mathrm{B}\right)\int_{S_t}\Big(\sum_{s}\mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b+\mathrm{B})\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}\Big)dS\,. \tag{28}$$

Ранее было показано, что в рамках квазинепрерывного подхода невозможен строгий учет зависимости структуры поля бегущей волны от постоянной распространения. Поэтому снова воспользуемся разложением функции $\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\beta)$ в ряд Тейлора. Разложим комплексно сопряженное приближение (16) в ряд Фурье по z и подставим в выражение (28). Пренебрежем членом порядка B^2. Тогда уравнение возбуждения бегущей волны в спектральной области (25) окончательно запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{i}\Omega+\delta_b+\frac{d\delta_b}{d\beta}\mathrm{B}-\mathrm{i}\frac{d\omega_b}{d\beta}\mathrm{B}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{d^2\omega_b}{d\beta^2}\mathrm{B}^2\right)A^{\omega\beta}=\\&=-\left(\frac{1}{8W_{lb}}-\frac{1}{8{W_{lb}}^2}\frac{dW_{lb}}{d\beta}\mathrm{B}\right)\int_{S_t}\Big(\sum_{s}\mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}\Big)dS-\\&-\frac{1}{8W_{lb}}\mathrm{B}\int_{S_t}\Big(\sum_{s}\frac{\partial\mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)}{\partial\beta}\mathrm{J}^{s\omega\beta}{}_{exc}\Big)dS\,.\end{aligned} \tag{29}$$

Заметим, что, вернувшись к электродинамическим параметрам холодной замедляющей системы $\omega(\beta_b+\mathrm{B})$ и $\delta(\beta_b+\mathrm{B})$, левую часть данного уравнения можно переписать в виде:

$$\mathrm{i}[(\omega_b+\Omega)-\omega'(\beta_b+\mathrm{B})]A^{\omega\beta}\,,$$

где $\omega'(\beta_b+\mathrm{B})=\omega(\beta_b+\mathrm{B})+\mathrm{i}\delta(\beta_b+\mathrm{B})$ – комплексная круговая частота волны с постоянной распространения $\beta_b+\mathrm{B}$ в холодной ЗС. Теперь нетрудно видеть резонансный характер уравнения (29). Если Ω и B соотносятся между собой так, что

$$\Omega\approx\omega(\beta_b+\mathrm{B})-\omega_b\,, \tag{30}$$

а затухание мало, то при ненулевой правой части спектральная плотность амплитуды $A^{\omega\beta}$ принимает большие значения. Это «резонанс в пространстве», по выражению Л.А.Вайнштейна [3].

Переведем уравнение (29) в пространственно-временную область. Для этого умножим его на $(1/4\pi^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{B}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$ и проинтегрируем по B и Ω. С учетом свойств преобразования Фурье получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\delta_b A+\mathrm{i}\frac{d\delta_b}{d\beta}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{d\omega_b}{d\beta}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{d^2\omega_b}{d\beta^2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=$$

$$=-\frac{1}{8W_{lb}}\int_{S_t}\Big(\sum_s \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)\Big)dS+$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{8W_{lb}{}^2}\frac{dW_{lb}}{d\beta}\int_{S_t}\Big(\sum_s \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)\frac{\partial \mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)}{\partial z}\Big)dS-$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{8W_{lb}}\int_{S_t}\Big(\sum_s \frac{\partial \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial \mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)}{\partial z}\Big)dS$$

Поскольку под интегралами по S_t от продольной координаты зависит только возбуждающий ток, вынесем производную по z за знак интеграла:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\delta_b A+\mathrm{i}\frac{d\delta_b}{d\beta}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{d\omega_b}{d\beta}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{d^2\omega_b}{d\beta^2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=$$

$$=-\frac{1}{8W_{lb}}\int_{S_t}\Big(\sum_s \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)\Big)dS+$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{8W_{lb}{}^2}\frac{dW_{lb}}{d\beta}\frac{\partial}{\partial z}\int_{S_t}\Big(\sum_s \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)\Big)dS- \qquad (31)$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{8W_{lb}}\frac{\partial}{\partial z}\int_{S_t}\Big(\sum_s \frac{\partial \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)}{\partial\beta}\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)\Big)dS\,.$$

Расчет «частичных» комплексных огибающих $\mathrm{J}^s{}_{exc}$ возможен с помощью двух способов. Первый, математически строгий, заключается в гармоническом анализе функции $\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,z)$ в продольном направлении или, что то же самое, двумерном (по координатам t и z) разложении возбуждающего тока $\mathrm{j}_{exc}(t,x,y,z)$ параметрическим методом. Из полученного пространственного спектра функции J_{exc} затем оставляются гармоники, постоянные распространения которых достаточно близки к $2\pi s/D$. Гармоническую интерполяцию целесообразно применять не к самому возбуждающему току, а к интегралам возбуждения в правой части уравнения (31). Однако на практике, особенно в коротких замедляющих системах (как в амплитроне), Фурье-анализ по продольной координате оказывается невозможным даже при использовании метода Прони.

Второй (приближенный) подход основан на вышеупомянутом явлении пространственного резонанса, когда воздействием на комплексную амплитуду волны $A(t,z)$ составляющих пространственного спектра возбуждающего тока J_{exc} с постоянными распространения, существенно отличающимися от $2\pi s/D$, можно пренебречь. Оставшиеся компоненты обеспечивают медленность изменения функций $\mathrm{J}^s{}_{exc}$ в направлении z, что позволяет применить к возбуждающему току метод ММА для данной координаты. При этом имеют место следующие приближенные соотношения:

$$\sum_s \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)\approx\frac{1}{D}\int_{z-D/2}^{z+D/2}\mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\varsigma,\beta_b)\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\varsigma)d\varsigma\,,$$

$$\sum_s \frac{\partial \mathrm{E}^s{}_{0w}{}^*(x,y,\beta_b)}{\partial\beta}\mathrm{J}^s{}_{exc}(t,x,y,z)\approx\frac{1}{D}\int_{z-D/2}^{z+D/2}\frac{\partial \mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\varsigma,\beta_b)}{\partial\beta}\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\varsigma)d\varsigma\,.$$

Тогда окончательно уравнение возбуждения запишется в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\delta_b A+\mathrm{i}\frac{d\delta_b}{d\beta}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{d\omega_b}{d\beta}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{d^2\omega_b}{d\beta^2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=$$
$$=-\frac{1}{8DW_{lb}}\int\limits_{z-D/2}^{z+D/2}\int\limits_{S_t}\mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\zeta,\beta_b)\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\zeta)dSd\zeta+$$
$$+\frac{\mathrm{i}}{8DW_{lb}{}^2}\frac{dW_{lb}}{d\beta}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{z-D/2}^{z+D/2}\int\limits_{S_t}\mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\zeta,\beta_b)\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\zeta)dSd\zeta-\tag{32}$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{8DW_{lb}}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{z-D/2}^{z+D/2}\int\limits_{S_t}\frac{\partial\mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\zeta,\beta_b)}{\partial\beta}\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\zeta)dSd\zeta.$$

Уравнение (32) основано на концепции стоячих волн (Фурье), сохранившейся от дискретного подхода уравнения (1). Об этом свидетельствует использование в качестве его коэффициентов параметров нормальных видов колебаний ЗС (коэффициента затухания δ, погонной единичной энергии W_l и т.д.). Аналогичное уравнение возбуждения, основанное на концепции Даламбера (бегущих волн), применявшейся ранее в работах Л.А.Вайнштейна, С.П.Кузнецова и Д.И.Трубецкова, можно получить из (32) учитывая, что при наличии пространственного резонанса (30) выполняются следующие приближенные равенства:

$$\frac{\partial}{\partial z}\approx-\frac{d\beta_b}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t};\qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\approx\left(\frac{d\beta_b}{d\omega}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Подставляя их в уравнение (32) и умножая его на $d\beta_b/d\omega$, с учетом связи между погонной единичной энергией электрического поля нормального вида ЗС и сопротивлением взаимодействия Z_0 бегущей волны с той же постоянной распространения:

$$W_l(\beta)=\frac{g^2}{4|v_g(\beta)|Z_0(\beta)},$$

имеем:

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\alpha_b A-\mathrm{i}\frac{d\alpha_b}{d\omega}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{d\beta_b}{d\omega}\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{d^2\beta_b}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=$$
$$=-\mathrm{sgn}(v_{gb})\frac{Z_{0b}}{2Dg^2}\int\limits_{z-D/2}^{z+D/2}\int\limits_{S_t}\mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\zeta,\omega_b)\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\zeta)dSd\zeta+$$
$$+\mathrm{sgn}(v_{gb})\frac{\mathrm{i}}{2Dg^2}\frac{dZ_{0b}}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{z-D/2}^{z+D/2}\int\limits_{S_t}\mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\zeta,\omega_b)\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\zeta)dSd\zeta+\tag{33}$$
$$+\mathrm{sgn}(v_{gb})\frac{\mathrm{i}Z_{0b}}{2Dg^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{z-D/2}^{z+D/2}\int\limits_{S_t}\frac{\partial\mathrm{E}_{0w}{}^*(x,y,\zeta,\omega_b)}{\partial\omega}\mathrm{J}_{exc}(t,x,y,\zeta)dSd\zeta.$$

Сопротивление взаимодействия (продольное волновое сопротивление ЗС) [8] определяется из амплитуды эквивалентного напряжения в зазоре g между ламелями $U_m = gE_{zm}$ и переносимой волной мощности P выражением $Z_0 = U_m{}^2/2P$. Здесь E_{zm} – амплитуда продольной составляющей напряженности соленоидального электрического поля в зазоре; $v_g = (d\beta/d\omega)^{-1}$ – групповая скорость волны.

Соленоидальное поле в подходе Даламбера удобнее вычислять не с помощью выражения (17), а по следующей формуле:

$$\mathrm{E}(t,x,y,z)=\mathrm{Re}\{[\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\omega_b)A(t,z)-\mathrm{i}\frac{\partial\mathrm{E}_{0w}(x,y,z,\omega_b)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial A(t,z)}{\partial t}]e^{-\mathrm{i}\beta_b z}e^{\mathrm{i}\omega_b t}\}.\tag{34}$$

При отсутствии пространственного резонанса уравнения (31), (32) и (33) не эквивалентны. Однако с практической точки зрения данный случай малозначим, поскольку амплитуда волны в ЗС тогда зависит главным образом от граничных условий. Поэтому целесообразность выбора той или иной формы уравнения возбуждения определяется только вычислительными соображениями и удобством программной реализации.

Следует обратить внимание на то, что, если в уравнении (33) отбросить члены, учитывающие зависимости α, β, Z_0 и E_{0w} от ω, единственным отличием его от уравнения работы [3] останется наличие интеграла по периоду ЗС в правой части. Это дает, по крайней мере, два преимущества. Во-первых, исчезают пульсации правой части уравнения по координате z, возникающие в нерегулярных волноводах за счет продольной неоднородности единичной структурной функции волны E_{0w}, что позволяет без существенной потери точности увеличить пространственный размер ячейки сети дискретизации при интегрировании выражений (32) и (33). Во-вторых, если потенциальная составляющая электрического поля учитывается отдельно (путем решения уравнения Пуассона), как это делается в современных моделях, в уравнение Л.А.Вайнштейна вместо полного тока j_{exc} необходимо подставлять его «поперечную» составляющую $\mathrm{j}^t_{exc} = \mathrm{j}_{exc} - \varepsilon_0 \mathrm{grad}(\partial\varphi/\partial t)$, где φ – скалярный потенциал [9]. Для выражений (31) – (33) в этом нет необходимости. Действительно, из известного соотношения [3]:

$$\int\limits_V \mathrm{E}_{0n}\,\mathrm{grad}\,\varphi dV = 0\,,$$

использовавшегося при выводе уравнения (1), следует, что интегралом

$$\int\limits_{z-D/2}^{z+D/2} \int\limits_{S_t} \mathrm{E}_{0w}^{*}\,\mathrm{Grad}(\partial\varphi/\partial t)dS_t d\varsigma$$

в правой части уравнений (31) – (33) можно пренебречь. Здесь $\mathrm{Grad}(\partial\varphi/\partial t)$ – комплексная огибающая функции $\mathrm{grad}(\partial\varphi/\partial t)$ на базовой частоте и постоянной распространения, определенная выражением, аналогичным формуле (7).

Таким образом, получены две формы нестационарного уравнения возбуждения периодической замедляющей системы для метода комплексных амплитуд, пригодные для использования в нестационарных и спектральных моделях. Их особенностью является учет нелинейности дисперсионной характеристики, а также зависимостей затухания, волнового сопротивления и поперечной структуры поля ЗС от частоты. Уравнения могут быть применены для исследования прохождения узкополосных радиоимпульсов через нелинейные радиофизические системы.

Автор признателен проф. Н.И.Айзацкому и доц. В.К.Пироженко за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Список литературы: 1. *Грицунов А.В., Чурюмов Г.И.* Спектральное моделирование СВЧ-приборов // Материалы междунар. межвуз. конф. «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ». Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж». 2001. С. 31 – 34. 2. *Основы* теории колебаний / Под ред. В.В. Мигулина. М.: Наука, 1988. 392 с. 3. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 400 с. 4. *Электроника* ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 1975. 195 с. 5. *Грицунов А.В.* Метод мгновенных значений в спектральных моделях СВЧ-приборов // Материалы 7-й Междунар. конф. «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». Харьков: ХТУРЭ. 2001. С. 148 – 149. 6. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с. 7. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982. 428 с. 8. *Грицунов А.В.* Метод комплексных амплитуд в спектральных моделях СВЧ-приборов // Материалы 7-й Междунар. конф. «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». Харьков: ХТУРЭ. 2001. С. 150 – 151. 9. *Кураев А.А., Байбурин В.Б., Ильин Е.М.* Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ-приборов. Минск: Навука і тэхніка, 1990. 392 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники
Поступила в редколлегию 30.10.2001