

УДК 004.272.2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСОРАХ

Мацько В.І.

e-mail: vladyslav.matsko@nure.ua

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Єсілевський В.С.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

This work is focused on investigating the efficiency of parallel computing in modeling complex physical phenomena, such as fluid dynamics described by the Navier-Stokes equations. The main goal is to compare the performance of two implementations: based on a sequential (CPU) architecture, and on a parallel (GPU) one. The comparative analysis demonstrated that the GPU-based solver for incompressible inviscid fluid performs significantly better. These results highlight the advantages of GPUs in handling computationally intensive tasks and simulating fluid dynamics in real-time.

Моделювання складних фізичних процесів, зокрема динаміки рідин, вимагає значних обчислювальних ресурсів. Традиційне розв'язання таких задач на центральному процесорі (CPU) часто є недостатньо ефективним, особливо коли йдеться мова про велику обчислювальну область або вимоги до симуляції в реальному часі. Натомість використання паралельної архітектури графічних процесорів (GPU) дозволяє виконувати тисячі обчислень одночасно (GPGPU), забезпечуючи багатократне збільшення продуктивності.

В основі дослідження лежить математична модель нев'язкої нестисливої рідини, що описується системою рівнянь Нав'є-Стокса. Для розв'язання цієї системи застосовано метод «стійких рідин» (stable fluids), запропонований Й. Стемом, який гарантує стабільність чисельної схеми незалежно від величини кроку інтеграції по часу [1]. Обчислення здійснюються на основі представлення Ейлера, що добре підходить для дискретизації обчислювальної області. Для цього використовується МАС-сітка (marker-and-cell), яка забезпечує високу точність завдяки розміщенню скалярних змінних у центрах комірок, а векторних – на ребрах. Крок моделювання складається з наступних ключових етапів: адвекція (метод псевдо-Лагранжа), застосування зовнішніх сил, дисипація, проєкція (для виконання умови нестисливості за теоремою Гельмгольца) та відновлення вихорів [2].

Для експериментального порівняння розроблено дві версії алгоритму мовою JavaScript, що виконуються у браузерному середовищі. Перша реалізація, що базується на послідовній архітектурі (CPU), використовує

Canvas API. Друга реалізація, розрахована на паралельну архітектуру (GPU), побудована з використанням сучасного WebGPU API. WebGPU забезпечує низькорівневий доступ до графічного процесора та ідеально відповідає концепції масивно-паралельної моделі програмування (MPPM) [3].

Окремої уваги заслуговує адаптація чисельних алгоритмів під архітектуру SIMD, на якій базуються сучасні відеоприскорювачі. Зокрема, етап проєкції, що забезпечує умову нестисливості рідини, реалізовано по-різному залежно від апаратної платформи. Якщо у послідовній CPU-реалізації рівняння Пуассона для тиску обчислюється ітеративним методом Гаусса-Зейделя, то для паралельної GPU-реалізації застосовано метод Якобі. Такий підхід ідеально узгоджується з масивно-паралельною моделлю програмування (MPPM), оскільки дозволяє уникнути стану гонитви (race conditions) і незалежно обчислювати нові значення тиску для кожної комірки регулярної сітки в окремих потоках робочої групи.

Експерименти проводилися на двох різних пристроях зі зміною розміру обчислювальної сітки від 128x128 до 2048x1024. Аналіз результатів підтвердив суттєву перевагу паралельної архітектури: на послідовній архітектурі (CPU) приріст навантаження призводив до стрімкого збільшення тривалості кадру (наприклад, близько 80 мс для сітки 512x512), що робить симуляцію в реальному часі неможливою. Натомість GPU-реалізація продемонструвала високу стабільність – при використанні відеокарти рівня NVIDIA GeForce RTX 4070 SUPER середній час обчислення кадру навіть на сітці 2048x1024 залишався на рівні мікросекунд (≈ 0.007 мс).

Отже, використання методів паралельних обчислень на базі відеоприскорювачів (GPU) є доцільним і високоефективним інструментом для розв'язання рівнянь математичної фізики. Такий підхід значно знижує час розрахунків і є критично важливим для комп'ютерної графіки та наукового моделювання.

Список використаних джерел:

1. Stam J. Real-Time Fluid Dynamics for Games. URL: <https://graphics.cs.cmu.edu/nsp/course/15-464/Spring11/papers/StamFluidforGames.pdf> (date of access: 08.05.2025).
2. Bridson R. Fluid Simulation for Computer Graphics. URL: https://www.cs.ubc.ca/~rbridson/fluidsimulation/fluids_notes.pdf (date of access: 09.05.2025).
3. WebGPU API [Electronic resource] // MDN Web Docs. – URL: https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/WebGPU_API (date of access: 03.06.2025).