УДК 681.51.011

С.А. ВОРОБЬЕВ, канд. техн. наук

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕМОМ ПАМЯТИ В ЗАДАЧЕ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ*

Рассмотрим дискретно-временную динамическую систему, описываемую в форме векторно-разностных уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t); \tag{1}$$

$$z(t) = C(t)x(t) + v(t). \tag{2}$$

Здесь $x(t+1)$ — $(n\times 1)$-вектор состояний; $A(t)$ — $(n\times n)$-передаточная матрица состояний; $z(t)$ — $(r\times 1)$-вектор измерений; $C(t)$ — $(r\times n)$-матрица измерений; $v(t)$ — $(r\times 1)$-вектор шума.

Предполагается, что $v(t)$ — белошумная последовательность с нулевым математическим ожиданием и ковариациями $E\left\{v(t)v^T(s)\right\} = R(t)\delta(t,s)$, где $R(t)$ — положительно определенная матрица.

Проблема адаптивной фильтрации заключается в том, чтобы по ходу процесса определять вектор состояний объекта $x(t)$, основываясь на множестве наблюдений $Z^t = \left\{z(1), z(2), \ldots, z(t)\right\}$. Оптимальным фильтром для описанного класса объектов является фильтр Калмана. Но известно, что потеря качества линейного оптимального фильтра может возникнуть из-за слишком большого веса прошлых наблюдений [1]. Причина этого состоит в том, что каждое измерение содержит гораздо больше нежелательного шума наблюдений, чем информация об управляющем шуме. Следовательно, ситуация, в которой управляющий шум слабо сравним с шумом наблюдений — так, что им можно пренебречь, приводит к потере качества оптимального фильтра и возможной потере устойчивости. Способ борьбы с подобными недостатками заключается в ограничении коэффициента усиления фильтра, чтобы избежать "нечувствительности" к новым наблюдениям. Однако, чем длиннее процесс накопления информации, предшествующей изменениям в объекте, тем сильнее влияние возмущения — как по

* Эта работа выполнена при частичной поддержке Международного фонда Сороса (ISSEP), гранты № PSU061018, PSU071075.

уровню ошибок, так и по длительности переходного процесса [2; 3]. Следовательно, на практике целесообразно учитывать эффект старения информации в зависимости от соответствия оценок наблюдениям. В этом случае необходимо разработать процедуру настройки объема памяти алгоритма фильтрации. Иными словами, надо ввести дополнительно к процедуре фильтрации процедуру управления памятью, которая образует второй уровень алгоритма фильтрации.

Для вывода итеративного фильтра с взвешенным накоплением информации включим в рассмотрение критерий вида

$$J_{t,\alpha}(x(t)) = \sum_{i=1}^{t}(z(i) - C(i)\kappa(i,t)x(t))^T R^{-1}(t)(z(t) - \\ - C(i)\kappa(i,t)x(t))\beta(i,t); \tag{3}$$

где $\beta(i,t) = \prod_{k=1}^{t-1}\alpha^{-1}(k)$ — параметр, определяющий вес текущего наблюдения. Причем $\beta(t,t) = 1$, $\alpha(k) \geq 1$; $k(i,t) = (A(t-1)\ldots A(i+1)A(i))^{-1} = = A^{-1}(i)A^{-1}(i+1)\ldots A^{-1}(t-1)$..

Оценку $\hat{x}(t+1/t+1)$ будем искать в виде

$$\hat{x}(t+1/t+1) = A(t)\hat{x}(t/t) + \Delta x. \tag{4}$$

Для этого найдем выражение для Δx. Разложим (3) в ряд Тейлора с погрешностью до второго члена в точке $A(t)\hat{x}(t/t)$, далее продифференцируем полученное выражение по Δx и приравняем градиент к нулю [4]. В результате запишем следующее выражение для Δx:

$$\Delta x = (0{,}5(A^T(t))^{-1}\nabla_x^2 J_{t,\alpha}(\hat{x}(t/t)A^{-1}(t)\alpha^{-1}(t) + C^T(t+1) \times \\ \times R^{-1}(t+1)C(t+1))^{-1}C^T(t+1)R^{-1}(t+1)(z(t+1) - \\ - C(t+1)A(t)\hat{x}(t/t)). \tag{5}$$

Далее, подставляя (5) в (4) и используя тот факт, что $R(t+1) = R(t)\alpha(t)$, благодаря которому производится регулирование весов соответствующих членов в выражении для $J_{t+1,\alpha}(x(t+1))$, получаем фильтр со взвешенным накоплением информации:

$$\hat{x}(t+1/t+1) = A(t)\hat{x}(t/t) + K(t)(z(t+1) - C(t+1)A(t)\hat{x}(t/t)); \tag{6}$$

$$K(t) = \alpha(t)A(t)P(t)A^T(t)C^T(t+1)(\alpha(t)C(t+1)A(t)P(t)A^T(t) \times \\ \times C^T(t+1) + R(t))^{-1}; \tag{7}$$

$$P(t+1) = \alpha(t)A(t)P(t)A^T(t) - K(t)C(t+1)A(t)P(t)A^T(t); \tag{8}$$

$$\alpha(t) \geq 1. \tag{9}$$

Процедура настройки параметра дисконтирования устаревшей информации $\alpha(t)$, характеризующего длину памяти фильтра, основывается на следующих соображениях. Неточность задания параметров математической модели для систематической составляющей наблюдений приводит к смещению оценок вектора состояний, а следовательно, к смещению $\hat{z}(t)$. Последнее отображается в знаках соответствующих компонент обновляющей последовательности $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t) = z(t) - C(t)A(t-1)\hat{x}(t-1/t-1)$, которые не меняются, если соответствующий параметр принимает не точное значение, и не определены, если параметр задан точно. Алгоритм управления параметром дисконтирования устаревшей информации разрабатывается с использованием того факта, что при наличии неточностей в задании математической модели для систематической составляющей наблюдений меняется условная плотность распределения вероятности $p(x(t)/z_0^t)$. Описанное явление показывает тесную связь между задачами определения глубины памяти алгоритма фильтрации и установления идентичности распределений двух случайных последовательностей, где одна из них — это реальная последовательность наблюдений $z(t)$, а другая — последовательность оценок $\hat{z}(t) = C(t)A(t-1)\hat{x}(t-1/t-1)$.

Для решения задачи идентичности распределений двух случайных последовательностей удобно использовать модификацию непараметрического критерия Манна — Уитни [5]. Критическую область модификации критерия Манна — Уитни можно выразить следующим образом:

$$\{\textstyle\sum_{i=t-s_z+1}^{t} \operatorname{sgn}(z(i) - C(i)A(i-1)\hat{x}(i-1/i-1)) \geq \delta_z\}, \tag{10}$$

где s_z — ширина проверочного окна; δ_z — некоторый $(r \times 1)$-вектор допустимых порогов.

Тогда алгоритм управления параметром сглаживания $\alpha(t)$ будет иметь следующий вид. Процедура начинается с присвоения $\alpha(0)$ значения 1. Далее в процессе фильтрации возможно возникновение следующих ситуаций:

1. Имеет место соотношение

$$\textstyle\sum_{i=t-s_z+1}^{t} \operatorname{sgn}(z(i) - C(i)A(i-1)\hat{x}(i-1/i-1)) \leq \delta_z .$$

Это означает, что ни по одной компоненте вектора наблюдений не происходит увеличения погрешности, а параметры математической модели систематической составляющей наблюдений заданы верно. Кроме того, верно предполагаемое значение апостериорной плотности вероятности $p(x(t)/z_0^t)$. Следовательно, необходимо улучшать фильтрующие свойства алгоритма, для чего надо уменьшить параметр дисконтирования устаревшей информации, что приведет к увеличению глубины памяти, т.е. $\alpha(t+1)=\alpha(t)-\Delta\alpha$, где $\Delta\alpha$ — постоянное число, $\Delta\alpha \geq 0$.

2. Справедливо соотношение

$$\sum_{i=t-s_z+1}^{t} \operatorname{sgn}(z(i) - C(i)A(i-1)\hat{x}(i-1/i-1)) > \delta_z,$$

что свидетельствует об увеличении погрешности по одной или нескольким компонентам вектора наблюдений и о том, что параметры математической модели систематической составляющей наблюдений заданы неверно. Не является верным и предполагаемое значение апостериорной плотности вероятности $p(x(t)/z_0^t)$. Следовательно, необходимо улучшать следящие свойства алгоритма фильтрации, для чего надо увеличить параметр дисконтирования устаревшей информации, что приведет к уменьшению глубины памяти, т.е. $\alpha(t+1)=\alpha(t)+\Delta\alpha$.

Очевидно, что предложенный алгоритм управления параметром $\alpha(t)$ представляет собой процедуру второго уровня двухуровневой схемы решения задачи фильтрации, где управление параметром $\alpha(t)$ производится с учетом информации об ошибках по всем компонентам вектора наблюдений, по которым может быть установлено свое пороговое значение. Моделирование предложенного алгоритма на модельных данных подтвердило его эффективность при решении практических задач. Установлено, что в ряде случаев, использовав процедуру регулирования объема памяти, можно защитить фильтр от расходимости. Однако следует отметить, что выбор значений вектора порогов δ_z связан с некоторым субъективизмом.

Список литературы: 1. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее приложения в связи и управлении: Пер. с англ. М.: Связь, 1976. 496 с. 2. *Михеев А.П., Шильман С.*В. Итеративная фильтрация с регулируемым взвешенным накоплением информации // Динамические системы: управление, адаптация и оптимизация. Горький, 1983. С. 94—106. 3. *Шильман С.В.* Итеративное линейное оценивание с регулируемым объемом предыстории // Автоматика и телемеханика. 1983. № 5. С. 93—98. 4. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 428 с. 5. *Деврой Л., Дьерфи Л.* Непараметрическое оценивание плотности: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 258 с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 11.04.97