УДК 621.391.01

В. С. ГОЛИКОВ, канд. техн. наук, *В. В. СУМЦОВ*,
Т. Г. КАЛЕКИНА, канд. техн. наук

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ М-ИЧНЫХ СИСТЕМ МЕЖДУПЕРИОДНОЙ ОБРАБОТКИ

В M-ичных системах междупериодной обработки сигналов на фоне нормальных коррелированных стационарных аддитивных помех и шумов используются циркулянтные, или клеточно-циркулянтные, матрицы обработки. Это позволяет существенно снизить вычислительную сложность соответствующих алгоритмов обнаружения.

Основанием для построения таких систем служит асимптотическое равенство нулевой матрице разности $\Phi^* V \Phi - \Phi^* \bar{V} \Phi \cong 0$ (1). Здесь V, $\bar{V}$ — матрицы обработки оптимальной по критерию Неймана — Пирсона системы обнаружения флюктуирующих сигналов на фоне нормальных коррелированных стационарных аддитивных помех и шумов при стационарном ожидаемом сигнале и M-ичной системы междупериодной обработки; Φ — матрица дискретного преобразования Фурье в базисе функций Виленкина — Крестенсона с параметром M.

Покажем, что методика расчета точных характеристик обнаружения, основанная на вычислении спектров определяющих матриц [1; 2], существенно упрощается для случая M-ичной междупериодной обработки.

Алгоритм оптимальной по критерию Неймана — Пирсона блочной M-ичной междупериодной обработки флюктуирующих сигналов на фоне нормальных коррелированных стационарных аддитивных помех и шумов представляет собой вычисление квадратичной формы над координатами входной реализации ξ в пространстве комплексных функций, заданном на множестве $K_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, на котором определена операция сложения по модулю M, $(p \overset{M}{\oplus} l) = p + l \pmod{M}$, $n = \log m\, N$, n — целое:

$$z_i = \frac{1}{2} \sum_{p,\, l=0}^{N-1} \tilde{V}_{pl} \xi_{p \overset{M}{\oplus} i} \xi^*_{l \overset{M}{\oplus} i}, \tag{2}$$

где $\tilde{V}_{pl}$ — элементы матрицы обработки, в общем случае равной

$$\tilde{V} = [{}^{\Phi}R^{(M)}]^{-1} - [{}^{c}R^{(M)} + {}^{\Phi}R^{(M)}]^{-1}, \tag{3}$$

${}^{c}R^{(M)}$ и ${}^{\Phi}R^{(M)}$ — M-ичные корреляционные матрицы сигнала и фона. Элементы этих матриц связаны с элементами теплицевых корреляционных матриц стационарного дискретного случайного процесса выражением

$$\| R_{pl}^{(M)} \| = \| N^{-1} \sum_{a=0}^{N-1} R_{p \overset{M}{\oplus} a,\ l \overset{M}{\oplus} a} \| = \| N^{-1} \sum_{a=0}^{N-1} R \times$$

$$\times (a \overset{M}{\oplus} (p \overset{M}{\ominus} l) - a) \| = N^{-1} \sum_{a=0}^{N-1} \| R(a \overset{M}{\oplus} (p \overset{M}{\ominus} l) - a) \|, \tag{4}$$

где $R(t)$ — арифметическая корреляционная функция.

Примем в качестве модели полезного сигнала дискретный случайный нормальный процесс с корреляционной матрицей, элементы которой имеют вид

$${}^{c}R_{pl} = \sigma_{c}^{2} \exp\{-|p - l|/T_{c} + j(p - l)\theta\}. \tag{5}$$

Здесь σ_c^2 — дисперсия флюктуаций сигнала; $j = \sqrt{-1}$; θ — междупериодный набег фазы сигнала; T_c — постоянная времени корреляции сигнала.

Аналогичную модель примем и для фона, являющегося аддитивной смесью коррелированной составляющей и белого шума. Корреляционная функция фона

$${}^{\Phi}R_{pl} = \sigma_{п}^{2} \exp\{-|p - l|/T_{п} + j(p - l)\varphi\} + \sigma_{ш}^{2}\delta_{pl}. \tag{5а}$$

Здесь $\sigma_{п}^2$, $\sigma_{ш}^2$ — мощности коррелированной помехи и белого шума; φ — междупериодный набег фазы помехи; $T_{п}$ — постоянная времени корреляции помехи; $\delta_{pp} = 1$, $\delta_{pl} = 0$ при всех $p \neq l$.

Матрица $R^{(M)}$, определяемая выражением (4) как нормированная сумма циркулянтных (клеточно-циркулянтных) матриц с одинаковой структурой,— циркулянтная (клеточно-циркулянтная). Следовательно и матрица $\tilde{V}$ обладает такой, как и ${}^{c}R^{(M)}$ и ${}^{\Phi}R^{(M)}$, структурой. Положительная определенность $\tilde{V}$ следует из (1), так как матрица V положительно определена, имеет положительные собственные значения, асимптотически равные собственным значениям матрицы $\tilde{V}$. После преобразования нормального случайного дискретного процесса положительно определенной квадратичной формой вероятность превышения некоторого нормированного порога $z_* = z/2\sigma^2$ [2] такова:

$$P = \sum_{\gamma=1}^{L} \frac{1}{(\alpha - 1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{d\lambda_{\gamma}^{\alpha-1}} \left[\lambda_{\gamma}^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{z_*}{\lambda_{\gamma}}\right\} \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\gamma}}^{\prime} \left(1 - \frac{\lambda_{\beta}}{\lambda_{\gamma}}\right)^{-\varepsilon} \right], \tag{6}$$

где $L \leqslant N$ — число различных собственных значений λ_{γ} определяющей матрицы Λ, равной произведению матрицы обработки и корреляционной матрицы обрабатываемой последовательности:

$$\Lambda = \begin{cases} \tilde{V}\,[{}^{\Phi}R^{(M)}] \text{ — при отсутствии цели;} \\ \tilde{V}\,[{}^{\Phi}R^{(M)} + q^{2}\,{}^{c}R^{(M)}] \text{ — при наличии цели;} \end{cases} \tag{7}$$

α — кратность собственных значений λ_γ; ε — кратность собственных значений λ_β; $q^2=\sigma_c^2/(\sigma_п^2+\sigma_ш^2)$ — относительный уровень сигнала. В (7) учтено, что при вероятности ложной тревоги $F \ll D$ эффективность обработки в точке равна эффективности обработки на интервале [3], т. е. допустимо усреднение по i. Матрицы в квадратных скобках в (7) получены в результате такого усреднения.

Из соотношений (6), (7) следует, что для построения характеристик обнаружения M-ичной системы междупериодной обработки необходимо найти спектр определяющей матрицы в соответствующем базисе функций Виленкина — Крестенсона (ВКФ) в отсутствие цели и при ее наличии.

Решение этой задачи для обычных систем обработки сопряжено с трудностями, связанными с нахождением спектров матриц V, определяемых как $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}=T\Lambda T^*$, где T — матрица собственных векторов Λ, причем $TT^*=I$; $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ — матрица собственных значений Λ.

Ортогональное преобразование T — преобразование Карунена — Лоэва, определяемое заданными корреляционными матрицами, не может быть вычислено с использованием быстрых алгоритмов. С увеличением N задача нахождения $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ существенно усложняется [4].

Нахождение спектра определяющей матрицы M-ичной системы междупериодной обработки упрощается, так как эта матрица обладает циркулянтной (клеточно-циркулянтной) структурой. Поэтому спектр такой матрицы и ее первый вектор-столбец являются парой конечных Фурье-трансформант в соответствующем базисе ВКФ: $[\lambda_1, \ldots, \lambda_N]=[\Lambda_{11}, \ldots, \Lambda_{1N}]\,\Phi^*$ (8). Для ортогонального преобразования $\Phi^*=\left\|\exp\left\{-j\frac{2\pi}{M}\sum_{i=1}^{n} p_i l_i\right\}\right\|$ существуют быстрые вычислительные алгоритмы.

Эта задача еще более упрощается в случае медленных флюктуаций и $\sigma_п^2 \gg \sigma_ш^2$. Тогда может быть факторизована M-ичная корреляционная матрица $R^{(M)}$. Такая матрица размером $M^n \times M^n$ представляется кронекеровским произведением n-циркулярных $M \times M$-матриц:

$$R^{(M)}=\prod_{i=1}^{n} R_i^{(M)}=\prod_{i=1}^{n}\left\| M^{-1}\sum_{a=0}^{M-1} R\left(M^{n-i}\left(a \overset{M}{\oplus}\left(p_i \overset{M}{\ominus} l_i\right)-a\right)\right)\right\|, \quad (9)$$

где $\prod$ — кронекеровское произведение матриц; $p,\ l=\overline{0,\ N-1}$, $p=\sum_{i=1}^{n} p_i M^{n-i}$, $l=\sum_{i=1}^{n} l_i M^{n-i}$, p_i, l_i — номера строк и столбцов i-й слева $M \times M$-циркулянтной матрицы, $p_i,\ l_i=\overline{0,\ M-1}$.

Согласно теореме о собственных значениях и собственных векторах матрицы, являющейся кронекеровским произведением матриц [5], собственные значения клеточно-циркулянтной матрицы $R^{(M)}$ равны

$$\mu_\gamma=\prod_{i=1}^{n}\mu_{\gamma_i}=\prod_{i=1}^{n} M^{-1}\sum_{p,\,a=0}^{M-1} R\left(M^{n-i}\left(a \overset{M}{\oplus} p-a\right)\right) e^{-j\frac{2\pi}{M} p\gamma_i}. \quad (10)$$

Здесь $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i M^{n-i}$; μ_{γ_i}— γ_i-е собственное значение i-й слева $M \times M$-циркулянтной матрицы. Подставляя (5) и (5а) в (10), после преобразований получаем

$$\mu_\gamma^{c} = \prod_{i=1} \sigma_c^2 \left[1 + 2M^{-1} \sum_{p=1}^{M-1} (M-p) \exp\left\{-\frac{|M^{n-i}p|}{T_{\text{п}}}\right\} \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(M^{n-i}\theta p - \frac{2\pi}{M} p\gamma_i\right)\right], \tag{11}$$

$$\mu_\gamma^{\phi} = \prod_{i=1}^{n} (\sigma_{\text{п}}^2 + \sigma_{\text{ш}}^2) \left[1 + \frac{2\sigma_{\text{п}}^2 M^{-1}}{\sigma_{\text{п}}^2 + \sigma_{\text{ш}}^2} \sum_{p=1}^{M-1} (M-p) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{-\frac{|M^{n-i}p|}{T_{\text{п}}}\right\} \cos\left(M^{n-i}\varphi p - \frac{2\pi}{M} p\gamma_i\right)\right]. \tag{11a}$$

Искомый спектр определяющий матрицы с учетом (3), (7), (8), (11) и (11а) запишется как

$$\operatorname{diag}\{\lambda_\gamma\} = \operatorname{diag}\left\{\frac{q^2\mu_\gamma^{c}}{\mu_\gamma^{\phi} + q^2\mu_\gamma^{c}}\right\} \text{— при отсутствии цели,} \tag{12}$$

$$\operatorname{diag}\{\lambda_\gamma\} = \operatorname{diag}\left\{\frac{q^2\mu_\gamma^{c}}{\mu_\gamma^{\phi}}\right\} \text{— при наличии цели.} \tag{12a}$$

Используя (6), (12), находим характеристики обнаружения. Однако выполнение расчетов на ЭВМ с применением выражения (6) оказывается невозможным.

Приведем это соотношение к виду, удобному для его программной реализации:

α—1-ю частную производную произведения, состоящего из $L+1$-го сомножителя, запишем в виде

$$\frac{d^{\alpha-1}}{d\lambda_\gamma^{\alpha-1}} \left[\prod_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} U_{i_{\alpha-1}}(\lambda_\gamma)\right],$$

где
$$U_1(\lambda_\gamma) = \lambda_\gamma^{\alpha-1};\ U_2(\lambda_\gamma) = \exp\left\{-\frac{z_*}{\lambda_\gamma}\right\};$$

$$U_{\beta+2}(\lambda_\gamma) = \left(1 - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\gamma}\right)^{-\varepsilon}. \tag{13}$$

Последовательно понижая порядок дифференцирования с помощью правила нахождения производной произведения, имеем

$$\frac{d^{\alpha-1}}{d\lambda_\gamma^{\alpha-1}} \left[\prod_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} U_{i_{\alpha-1}}(\lambda_\gamma)\right] = \frac{d^{\alpha-2}}{d\lambda_\gamma^{\alpha-2}} \left[\sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \frac{dU_{i_{\alpha-1}}(\lambda_\gamma)}{d\lambda_\gamma} \times \right.$$

$$\times \prod_{\substack{i_{\alpha-2}=1\\ i_{\alpha-2}\neq i_{\alpha-1}}}^{L+1} U_{i_{\alpha-2}}(\lambda_\gamma)\Bigg] = \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \frac{d^{\alpha-2}}{d\lambda_\gamma^{\alpha-2}}\Bigg[\prod_{i_{\alpha-2}=1}^{L+1} U_{i_{\alpha-1}}^{[\delta_{i_{\alpha-2},\, i_{\alpha-1}}]}(\lambda_\gamma)\Bigg] =$$

$$= \cdots \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \sum_{i_{\alpha-2}=1}^{L+1} \cdots \sum_{i_2=1}^{L+1} \frac{d}{d\lambda_\gamma}\Bigg[\prod_{i_1=1}^{L+1} U_{i_1}^{\left[\sum_{k=2}^{\alpha-1}\delta_{i_{k-1},\, i_k}\right]}(\lambda_\gamma)\Bigg] =$$

$$= \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{L+1} \Bigg[\prod_{i_0=1}^{L+1} U_{i_0}^{\left[\sum_{k=1}^{\alpha-1}\delta_{i_{k-1},\, i_k}\right]}(\lambda_\gamma)\Bigg]. \qquad (14)$$

Здесь

$$\delta_{i_{k-1},\, i_k} = \begin{cases} 1, & i_{k-1} = i_k; \\ 0, & i_{k-1} \neq i_k; \end{cases}$$

$$U_{i_k}^{[x]}(\lambda_\gamma) = \frac{d^x U_{i_k}(\lambda_\gamma)}{d\lambda_\gamma^x}.$$

Следовательно, $\alpha-1$-я производная произведения вычисляется как сумма произведений производных сомножителей.

Подставляя (14) в (6) с учетом (13), записываем расчетную формулу

$$P = \sum_{\gamma=1}^{L} \frac{1}{(\alpha-1)!} \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{L+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{L+1} \Bigg[\prod_{i_0=1}^{L+1} U_{i_0}^{\left[\sum_{k=1}^{\alpha-1}\delta_{i_{k-1},\, i_k}\right]}(\lambda_\gamma)\Bigg], \qquad (15)$$

где при $x \geqslant 1$ значения $U_{i_0}^{[x]}(\lambda_\gamma)$ находятся из выражений

$$U_1^{[x]}(\lambda_\gamma) = \frac{d^x \lambda_\gamma^{\alpha-1}}{d\lambda_\gamma^x} = \lambda_\gamma^{\alpha-x-1} \prod_{t=1}^{x} (\alpha - t);$$

$$U_2^{[x]}(\lambda_\gamma) = \frac{d^x}{d\lambda_\gamma^x}\left[\exp\left\{-\frac{z_*}{\lambda_\gamma}\right\}\right] =$$

$$= (-1)^x x! \exp\left\{-\frac{z_*}{\lambda_\gamma}\right\} \sum_{t=0}^{x-1} \frac{C_{x-1}^t z_*^{x-t}}{(x-t)!\, \lambda_\gamma^{2x-t}};$$

$$U_{\beta+2}^{[x]}(\lambda_\gamma) = \frac{d^x}{d\lambda_\gamma^x}\left[\left(1 - \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\gamma}\right)^{-\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^x x!}{(\lambda_\gamma - \lambda_\beta)^{\varepsilon+x}} \sum_{t=0}^{x-1} \frac{C_{x-1}^t}{(x-t)!} \lambda_\gamma^{\varepsilon-x+t} \prod_{s=0}^{x-t-1} (\varepsilon - s)\, \lambda_\beta.$$

Вероятности ложной тревоги F и правильного обнаружения D определяются выражением (15) ($F = P$ при $\{\lambda_\gamma\} = \{\lambda_\gamma^{\Phi}\}$ и $D = P$ при $\{\lambda_\gamma\} = \{\lambda_\gamma^{\text{сф}}\}$).

Из (1) следует, что эффективность M-ичных систем междупериодной обработки стремится к эффективности оптимальных по критерию Неймана — Пирсона систем обнаружения сигналов при увеличении N.

Расчеты показывают, что в большинстве практически важных случаев эффективности обычных и M-ичных систем обработки оказываются равными с инженерной точностью уже при $N>10$. Таким образом, M-ичные алгоритмы образуют новый класс асимптотически эффективных алгоритмов обработки, которые, вследствие указанных особенностей их матриц обработки, могут быть реализованы на основе быстрых вычислительных процедур. Причем эти алгоритмы обеспечивают высокую помехоустойчивость обработки.

Полученные соотношения (11), (12), (15) показывают, что при M-ичной междупериодной обработке характеристики обнаружения полностью обусловлены спектром циркулянтных (клеточно-циркулянтных) матриц обработки.

Заметим, что построение характеристик обнаружения обычных систем обработки с использованием спектра определяющей матрицы приводит к необходимости выполнения на ЭВМ ряда трудоемких процедур: нахождение собственных векторов и собственных значений матрицы N-го порядка; определение кратности собственных значений; обращение матрицы N-го порядка. Поэтому применение этого метода расчета в интервалах обработки $N>30$ для обычных систем весьма проблематично.

Приведенная же методика точного расчета характеристик обнаружения M-ичных систем междупериодной обработки пригодна для расчетов и при $N>30$, причем в результате использования быстрых алгоритмов вычисления спектров значительно сокращаются объемы вычислений.

Список литературы: 1. *Охрименко А. Е., Тосев И. Т.* Анализ характеристик обнаружения систем междупериодной обработки // Радиотехника и электрон. 1971. № 1. С. 67—75. 2. *Соколов Г. А., Иванов В. А.* К расчету характеристик обнаружения сигналов на фоне коррелированных помех в системах междупериодной обработки // Повышение эффективности и надежности радиоэлектронных систем. 1979. Вып. 9. С. 78—88. 3. *Вопросы* статистической теории радиолокации / Под ред. Г. П. Тартаковского, М., 1963. Т. 1. 424 с. 4. *Ахмед Н., Рао К. Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М., 1980. 248 с. 5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1976. 352 с.

Поступила в редколлегию 09.07.87

УДК 537.86:519.517

В. А. ОМЕЛЬЧЕНКО, д-р физ.-мат. наук, *Ю. Н. ГОЛОБОРОДЬКО*

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕННОЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. *СООБЩЕНИЕ 1*

В классической задаче многоальтернативного обнаружения сигналов по результатам наблюдения необходимо принять решение о наличии сигнала и к какому из заданных сигналов он относится. В ряде прикладных задач возникают ситуации, когда наблюдения