УДК 621.396.67.01

*В. В. ДОЛЖИКОВ, канд. физ.-мат. наук*

# О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА АНТЕНН

Задачи синтеза антенн наряду с задачами восстановления относятся к обратным задачам математической физики, для которых большое значение имеет вопрос о чувствительности и устойчивости получаемого решения. Применительно к обратным задачам теории антенн проблема чувствительности и устойчивости, видимо впервые обстоятельно обсуждалась в работе [1]. В ней отмечено, что в задачах синтеза основным является вопрос о чувствительности решения, устойчивость же его при этом имеет второстепенное значение. В задачах восстановления ситуация обратная.

Понятие чувствительности диаграммы направленности (ДН) к флуктуациям амплитудно-фазового распределения (АФР) источников было использовано в [2] для характеристики уровня фона рассеянной мощности в предположении, что флуктуации амплитуды, фазы токов возбуждения и положения элементов решетки, приводящие к его возникновению, статистически взаимно независимы. В качестве коэффициента чувствительности ДН в [2] предложено использовать значение относительной дисперсии ДН по полю, то есть отношение дисперсии ДН по полю к квадрату модуля среднего значения ДН по полю в направлении главного максимума. С точностью до множителя эта величина равна отношению рассеянной за счет флуктуаций мощности к значению ДН по мощности при отсутствии последних в направлении максимального излучения. Для оценки степени влияния фазовых флуктуаций на ДН линейных антенн по сути аналогичная величина была введена также в [3]. При большой величине КЧ появление даже малых флуктуаций АФР (флуктуаций с малой дисперсией) приводит к недопустимо большому отклонению средней ДН по мощности от регулярной. Поскольку значение введенного КЧ определяется характером АФР, то это обусловило довольно широкое использование ограничений на данный параметр в задачах детерминированного синтеза антенн с целью получения решений слабо или в контролируемой степени чувствительных к влиянию флуктуаций АФР. Введение таких ограничений особенно важно при синтезе ДН, не принадлежащих к классу физически реализуемых диаграмм, ибо позволяет регулировать чувствительность получаемого решения к неточности реализации оптимального АФР, то есть позволяет получить детерминированную, оптимальную в некотором смысле диаграмму, мало чувствительную к флуктуациям АФР, неизбежно появляющимся при реализации его. Однако указанный способ введения КЧ с практической точки зрения не является вполне удовлетворительным, так как с его помощью контролируется характер только регулярной части АФР. При этом из поля зрения выпадают статистические свойства флуктуаций, влияние которых на ДН существенно зависит от этих свойств. Вследствие этого требования к чувствительности могут быть либо завышенными, либо заниженными. В первом случае мы получим ДН, слабо чувствительную к воздействию флуктуаций, но изначально слишком далёкую от требуемой. Во втором – более близкую к заданной, но очень чувствительную к появлению флуктуаций АФР. Если при решении задач детерминированного синтеза с этим недостатком можно в какой-то степени примириться, то при статистическом подходе к синтезу пригодность введенного КЧ для характеристики чувствительности получаемого решения становится далеко не очевидной. Это обуславливается тем, что в этом случае уже не может идти речь о чувствительности решения к появлению флуктуаций, ибо они уже есть – учтены при формулировке задачи. Поэтому речь должна идти о чувствительности к «чужим» флуктуациям, то есть о чувствительности решения к отклонению статистических параметров флуктуаций, появляющихся при реализации оптимального АФР, от заданных на этапе постановки задачи – закона распределения, вида коэффициента корреляции, значений радиуса корреляции и дисперсии. В простейшем случае, речь может идти о значениях радиуса корреляции и дисперсии. Следовательно, нужно либо вводить параметр, оценивающий чувствительность, иным способом, либо, по крайней мере, определять условия, при которых правомерно использование КЧ, введенного в [2].

Рассмотрим линейную антенну (линейную систему непрерывно распределенных идентичных и одинаково ориентированных источников) длиной $L$. Амплитудно-фазовое распределение будем характеризовать функцией $i(x)$, которая нормирована к амплитуде и фазе центрального источника.

Поскольку элементарные источники имеют слабую направленность, то диаграмма направленности линейной антенны с точностью до постоянного множителя описывается известным выражением

$$f(u) = \mathbf{A}i = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} i(x)e^{jux}\,dx, \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}$ – линейный интегральный оператор, $x=(2z/L)$ – безразмерная продольная координата, $u=(\pi L/\lambda)\sin = a\sin\theta$ – обобщенный угол, $\theta$ – угол, отсчитываемый от оси антенны, $\lambda$ – длина волны в свободном пространстве.

Будем считать, что ДН и АФР являются элементами гильбертовых пространств $L_f^2(-a,a)$ и $L_i^2(-1,1)$ соответственно, со скалярными произведениями

$$\left(f_1(u),f_2(u)\right)_{L_f^2} = \int_{-a}^{a} g(u)f_1(u)\overline{f_2}(u)du, \qquad \left(i_1(x),\, i_2(x)\right)_{L_i^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} i_1(x)\overline{i_2}(x)dx,$$

где черта означает комплексное сопряжение, g(u) – неотрицательная во всей области интегрирования весовая функция.

При наличии флуктуаций $i(x)$ является случайной функцией, которую при нормировке к амплитуде и фазе центрального источника в отсутствие флуктуаций [3] можно записать как

$$i(x) = i_0(x)e^{B(x)+j\varphi(x)} = i_0(x)q(x) \tag{2}$$

со средним значением

$$\langle i(x)\rangle = i_0(x)p(x), \tag{3}$$

где $p(x)=\left\langle e^{B(x)+j\varphi(x)}\right\rangle$.

Здесь $i_0(x)$ – АФР в отсутствие флуктуаций, B(x) и φ(x) – случайные функции, описывающие флуктуации уровня амплитуды и фазы источников соответственно, $\langle\cdots\rangle$ – знак математического ожидания.

Уклонение случайной ДН от некоторой заданной F(u) определим с помощью математического ожидания (МО) квадрата нормы их разности в $L_f^2$

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \left\langle \left\| F(u) - f(u) \right\|_{L_f^2}^2 \right\rangle, \tag{4}$$

которое после ряда преобразований приводится к следующему виду

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \left\| F - \mathbf{A}\langle i\rangle \right\|_{L_f^2}^2 + \left(\langle i\rangle, \mathbf{S}\langle i\rangle\right)_{L_i^2} = \left\| F - \langle f\rangle \right\|_{L_f^2}^2 + \left(\langle i\rangle, \mathbf{S}\langle i\rangle\right)_{L_i^2} . \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{S}$ линейный интегральный оператор

$$\mathbf{S}i = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} i(x)R(x,x_1)K(x,x_1)dx_1, \tag{6}$$

где $R(x,x_1)=\left\langle \left[q(x)/\,p(x)-1\right]\left[q^*(x_1)/\,p^*(x_1)-1\right]\right\rangle$, $\quad K(x,x_1)=\int_{-a}^{a} g(u)e^{ju(x-x_1)}du.$

Задача синтеза в статистической постановке [4], [5] обычно формулируется следующим образом. Определить регулярное АФР $i_0(x)$, которое при флуктуациях с заданными статистическими параметрами обеспечит минимум МО квадратичного отклонения синтезируемой ДН от заданной. Аналитически эта задача сводится к минимизации функционала $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle$, определенного соотношением (5), по среднему АФР $\langle i\rangle$. Регулярное АФР $i_0(x)$ затем легко определяется с помощью (3):

$$i_0(x) = \langle i(x)\rangle_0 \,/\, p(x) = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}+\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{A}^*F(u)/\,p(x), \tag{7}$$

где $\langle i(x)\rangle_0$ – оптимальное среднее АФР, на котором достигается минимум функционала (5).

При этом минимальное матожидание КО

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min} = \|F\|^2_{L^2_f} - \left( F, \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A} + \mathbf{S}\right)^{-1} \mathbf{A}^* F \right), \tag{8}$$

где $\mathbf{A}^*$ – оператор, сопряженный с оператором $\mathbf{A}$.

В общем случае значения статистических параметров флуктуаций при реализации найденного оптимального АФР будут отличаться от значений, заданных в качестве исходных данных задачи синтеза. Величины, задаваемые при постановке задачи, а также найденные в результате ее решения, будем отмечать индексом “s”. Значения этих величин при реализации – индексом “r”. Тогда среднее значение квадратичного отклонения (КО) диаграммы, получаемой при практическом воспроизведении оптимального АФР, от заданной согласно (4) имеет вид

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \|F\|^2_{L^2_f} + \left( \langle i_r \rangle, \mathbf{H}_r \langle i_r \rangle \right)_{L^2_i} - 2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{A}^* \,[\text{illegible}]\, \rangle\right)_{L^2_i}, \tag{9}$$

где усреднение проводится по флуктуациям АФР, появляющимся при реализации, $i_r = i_0 q_r$.

В качестве регулярного АФР $i_0(x)$ в (9) взята его оптимальная величина, найденная при решении задачи статистического синтеза

$$i_0 = \left( \langle i_s \rangle_0 / p_s \right) = \frac{1}{p_s} \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{A}^* F \tag{10}$$

со средним значением при реализации, равным

$$\langle i_r \rangle = \frac{p_r}{p_s} \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{A}^* F.$$

Оператор $\mathbf{H}$ в (9) и (10) имеет следующий вид

$$\mathbf{H}_{r,s} = \left( \mathbf{A}^*\mathbf{A} + \mathbf{S}_{r,s} \right), \tag{11}$$

где индекс r относится к случаю, когда оператор $\mathbf{S}$ определяется через параметры флуктуаций реализации, а индекс s – когда в оператор $\mathbf{S}$ входят параметры флуктуаций, задаваемые при постановке задачи синтеза.

Пусть флуктуации реализуемого АФР и найденного при синтезе имеют одинаковые закон распределения и вид коэффициента корреляции, а дисперсия $\alpha_r$ и радиус корреляции $c_r$ отличаются от заданных при постановке задачи синтеза $\alpha_s$ и $c_s$:

$$\alpha_r = \alpha_s + \Delta\alpha, \qquad c_r = c_s + \Delta c.$$

Будем полагать, что отклонение $\alpha_r$ и $c_r$ от $\alpha_s$ и $c_s$ малы: $\Delta\alpha \ll 1$ и $\Delta c \ll 1$.. В этом случае, ограничившись членами первого порядка малости по $\Delta\alpha$ и $\Delta c$, имеем

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min} + \Delta\alpha \cdot k_\alpha(\alpha_s, c_s) + \Delta c \cdot k_c(\alpha_s, c_s), \tag{12}$$

где

$$k_\alpha(\alpha_s, c_s) = \left( \langle i_s \rangle_0, \mathbf{Q}_{\alpha s} \langle i_s \rangle_0 \right), \qquad k_c(\alpha_s, c_s) = \left( \langle i_s \rangle_0, \mathbf{Q}_{cs} \langle i_s \rangle_0 \right), \tag{13}$$

и $\mathbf{Q}_{\alpha s} \langle i_s \rangle_0 = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} K(x, x_1) \left. \frac{\partial R}{\partial \alpha_r} \right|_{\substack{\alpha_r = \alpha_s \\ c_r = c_r}} \langle i_s \rangle_0 \, dx$, $\quad \mathbf{Q}_{cs} = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} K(x, x_1) \left. \frac{\partial R}{\partial c_r} \right|_{\substack{\alpha_r = \alpha_s \\ c_r = c_r}} \langle i_s \rangle_0 \, dx.$

Величины $k_\alpha$, $k_c$ определяют значение разности между средним КО реализуемой ДН, получаемым реально, и ожидаемым минимальным значением $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min}$ при отклонении значений дисперсии $\alpha_r$ и радиуса корреляции $c_r$ от задаваемых при постановке задачи синтеза. Они характеризуют чувствительность $\langle \varepsilon^2 \rangle$ к изменению $\alpha$ и $c$ и их естественно рассматривать как коэффициенты чувствительности по дисперсии и радиусу корреляции соответственно.

Коэффициенты $k_\alpha$ и $k_c$ имеют ясный смысл. Это производные по $\alpha$ и $c$ от рассеянной мощности излучения в секторе $[-a,a]$, обусловленной флуктуациями. Из соотношений (10) и (13) следует, что величина коэффициентов чувствительности определяется параметрами флуктуаций АФР – $\alpha_s, c_s$, которые являются исходными данными задачи синтеза и видом требуемой ДН.

Для более детального анализа введенных величин рассмотрим важный с практической точки зрения случай, когда в антенне присутствуют только фазовые флуктуации. Будем полагать, что имеет место нормальный закон распределения, коэффициент корреляции примем в гауссовой форме. Решение удобно представить в спектральном виде. Оптимальное среднее АФР будем искать в виде разложения по системе собственных функций $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ самосопряженного оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$

$$\langle i_s \rangle_0 = \sum_{n=0}^{N} a_n \psi_n(a, ax).$$

Здесь и далее верхний предел суммирования $N$ – целое число, которое при необходимости всегда можно $\to \infty$.

При малых $\alpha$ $(\alpha << 1)$, а также малых или больших радиусах корреляции $c$, как показано в [6], для $\langle i_s \rangle_0$ может быть получено следующее выражение:

$$\langle i_s \rangle_0 = \sum_{n=0}^{N} \frac{(F, \psi_n)_{L_i^2}}{\sqrt{\lambda_n(a)}[\lambda_n(a) + \alpha_s J_{nn}(a, c_s)]} \psi_n(a, ax), \tag{14}$$

где $\lambda_n(a)$ – собственные значения оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, которые есть положительные вещественные числа, перенумерованные так, что $1 \geq \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \lambda_n \geq 0$,

$$J_{nn}(a,c) = (\psi_n(a, ax), \mathbf{S}_0 \psi_n(a, ax'))_{L_i^2},$$

$$\mathbf{S}_0 \psi_n(a, ax') = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} K(x, x') \exp\left\{-\frac{(x - x')^2}{c_2}\right\} \psi_n(a, ax') dx'.$$

Зависимости величины $J_{nn}(a,c)$ от $c$ и $n$ достаточно подробно изучены в [6]. Для антенны с $a = 3\pi$ графики $J_{nn}(a,c)$ показаны на рис. 1.

Подставив (14) в (13), для $k_\alpha$ и $k_c$ получим

$$k_\alpha(\alpha_s, c_s, a) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\left|(F, \psi_n(a,u))_{L_f^2}\right|^2}{[\lambda_n(a) + \alpha_s J_{nn}(a, c_s)]^2} J_{nn}(a, c_s), \tag{15}$$

$$k_c(\alpha_s, c_s, a) = \alpha_s \sum_{n=0}^{N} \frac{\left|(F, \psi_n(a,u))_{L_f^2}\right|^2}{[\lambda_n(a) + \alpha_s J_{nn}(a, c_s)]^2} \frac{\partial}{\partial c} J_{nn}(a, c)\Big|_{c=c_s}. \tag{16}$$

Видно, что коэффициенты чувствительности зависят как от вида заданной ДН, так и от статистических параметров флуктуаций. Кроме того, чувствительность решения задачи синтеза в детерминированной постановке $(\alpha_s = 0)$ будет хуже – коэффициент чувствительности больше, чем при статистической.

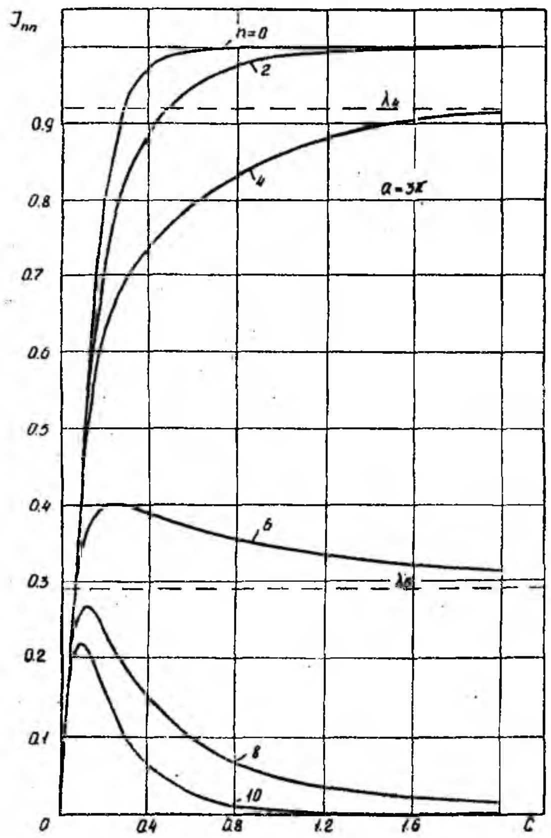


Рис. 1

Действительно, при детерминированном синтезе имеем для $k_\alpha$

$$k_\alpha^0(a) = \sum_{n=0}^{N} \left| \left(F, \psi_n(a,u)\right)_{L_f^2} \right|^2 / \lambda_n(a). \quad (17)$$

Из сравнения (15) и (17) с учетом того, что $\lambda_n(a) \to 0$ с ростом $n$, следует высказанное утверждение.

На основании (15) и (16) при $c \ll 1$ и $c \gg 1$ можно получить верхние оценки для коэффициентов $k_\alpha$ и $k_c$.

В [6] показано, что при $c \ll 1$ имеет место неравенство $J_{nn}(a,c) \le ac / \sqrt{\pi}$. Следовательно, для коэффициентов чувствительности при малых радиусах корреляции справедливы следующие оценки:

$$k_\alpha \le \frac{a}{\sqrt{\pi}} c_s \left\| \langle i_s \rangle_0 \right\|_{L_i^2}^2, \qquad k_c \le \frac{a}{\sqrt{\pi}} \alpha_s \left\| \langle i_s \rangle_0 \right\|_{L_i^2}^2. \quad (18)$$

Из (18) с учетом того, что $\left\| \langle i_s \rangle_0 \right\|^2$ меньше, чем квадрат нормы АФР при детерминированном синтезе следует, что решение задачи в статистической постановке при малых радиусах корреляции менее чувствительно, чем получаемое в результате детерминированного синтеза.

В случае больших радиусов корреляции $(c \gg 1)$ согласно [6]

$$J_{nn}(a,c) = \lambda_n(a)\left[1 + O\left(1/c^2\right)\right], \text{ и } \frac{\partial J_{nn}(a,c)}{\partial c} \sim \lambda_n(a) \frac{1}{c^3}.$$

Тогда для $k_\alpha$ и $k_c$ получим

$$k_\alpha = \frac{1}{(1+\alpha_s)^2} k_\alpha^0(a), \quad k_c \sim \frac{\alpha_s}{(1+\alpha_s)^2} \frac{1}{c_s^3} k_\alpha^0(a) \quad (19)$$

где $k_\alpha^0(a)$ – коэффициент чувствительности решения детерминированной задачи синтеза.
Видно, что при больших радиусах корреляции во-первых, чувствительность по $c$ намного слабее, чем по дисперсии, и, во-вторых, чувствительность по дисперсии при $c \to \infty$ и малых $\alpha_s$ близка к чувствительности решения, получаемого при детерминированном синтезе и, следовательно, выше, чем при малых $c$.

Представляет интерес случай, когда заданная ДН относится к классу физически реализуемых диаграмм. Такую диаграмму всегда можно представить в виде следующего разложения:

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(0)} \psi_n(a,u),$$

где $d_n^{(0)} = \frac{1}{\lambda_n(a)} \left(F, \psi_n(a,u)\right)_{L_f^2}$ и вследствие физической реализуемости ДН удовлетворяют неравенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| d_n^{(0)} \right|^2 < \infty . \tag{20}$$

Отметим, что для физически нереализуемых ДН эти коэффициенты должны удовлетворять условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| d_n^{(0)} \right|^2 \lambda_n(a) < \infty . \tag{21}$$

Коэффициенты чувствительности при этом равны

$$k_\alpha(\alpha_s, c_s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left| d_n^{(0)} \right|^2}{\left[1 + \alpha_s J_{nn}(a, c_s)/\lambda_n(a)\right]^2} J_{nn}(a, c_s),$$

$$k_c(\alpha_s, c_s, a) = \alpha_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left| d_n^{(0)} \right|^2}{\left[1 + \alpha_s J_{nn}(a, c_s)/\lambda_n(a)\right]^2} \frac{\partial}{\partial c} J_{nn}(a, c)\Big|_{c=c_s} .$$

Учитывая, что величина $\dfrac{J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)}{\left[1 + \alpha J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)\right]^2}$ при $J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a) = 1/\alpha$ для малых $c$ имеет максимум, равный $1/4\alpha$, для коэффициента чувствительности по дисперсии имеем

$$k_\alpha \le \frac{1}{4\alpha_s} \sum_{n=0}^{\infty} \left| d_n^{(0)} \right|^2 \lambda_n(a), \qquad k_c \le C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left| d_n^{(0)} \right|^2 \lambda_n(a),$$

где $C_1 = \left[ \dfrac{\partial}{\partial c_s} \dfrac{1}{1 + \alpha_s J_{nn}(a, c_s)/\lambda_n(a)} \right]_{\max} < \infty$.

Из неравенств (20) и (21) сразу следует, что для физически реализуемых ДН коэффициенты чувствительности всегда меньше, чем для нереализуемых диаграмм направленности, поскольку собственные значения $\lambda_n(a)$ всегда $\le 1$ и быстро убывают с ростом индекса $n$.

Таким образом, чувствительность решения задачи статистического синтеза антенн по заданной ДН может быть определена как разность между средним значением квадратичного уклонения воспроизводимой реально ДН от заданной и минимально возможным его значением, которая обусловлена отклонением статистических параметров флуктуаций реализуемого оптимального АФР от значений, заданных в качестве исходных данных задачи. Оценка этой чувствительности может быть проведена с помощью двух коэффициентов – коэффициента чувствительности по дисперсии и коэффициента чувствительности по радиусу корреляции флуктуаций АФР, значения которых могут существенно различаться по величине в зависимости от задаваемых на этапе формулировки задачи значений соответствующих статистических параметров.

**Список литературы:** 1. *Gilbert E.M., Morgan S.P.* Optimum Disign of Directive Antenna Arrays Subject to Random Variable // Bell Sestem Tech. J., 1955. Vol. 34. N 3. P 637 – 663. 2. *Deshamps G.A., Cabayan* H.S. Antenna Synthesis and Solution of Invers Problems by Regularization Methods // IEEE Trans., 1972. Vol. AP – 20. N 3. P. 269 – 274. 3. *Шифрин Я.С.* Вопросы статистической теории антенн. М.: Сов. Радио, 1970. 384 с. 4. *Шифрин Я.С., Должиков В.В.* Статистический синтез линейной непрерывной антенны по заданной диаграмме направленности // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 9. С. 1329-1335. 5. Справочник по антенной технике / Под ред. *Я.Н. Фельда, Е. Г. Зелкина.* М.:ИПРЖР,1997. Т.1. 256 с. 6. *Шифрин Я.С., Должиков В.В., Радченко В.Ю.* Сверхнаправленность в статистической теории антенн. Харьков. 1987. 140 с. Деп. В УкрНИИНТИ, 05.01.88, № 86-Ук. 88.

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 19.10.2001*