УДК 519.7

Н.А. ГВОЗДИНСКАЯ

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЯХ НАД ВЕКТОРАМИ СОВЕРШЕННОГО ЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Квадратную логическую матрицу A назовем *ортогональной*, если дизъюнкция элементов каждой ее строки и каждого ее столбца равна единице, а конъюнкция любых двух элементов в каждой ее строке и в каждом ее столбце равна нулю. Например, логическая матрица A над полем двухместных предикатов

$$A=\begin{pmatrix} Q_7 & Q_8 & Q_0 \\ Q_8 & Q_6 & Q_1 \\ Q_0 & Q_1 & Q_{14} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

является ортогональной, а матрица

$$A=\begin{pmatrix} Q_7 & Q_{12} & Q_0 \\ Q_{10} & Q_6 & Q_1 \\ Q_0 & Q_1 & Q_{14} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad -$$

нет, так как, например, $a_{11}\wedge a_{12}=Q_7\wedge Q_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$.

Теорема 1. *Чтобы для квадратных логических матриц A и B над полем логических скаляров $K=\{0,1\}$ или полем конечных предикатов произвольной арности выполнялось равенство $AB=E$, необходимо и достаточно, чтобы A и B представляли собой ортогональные матрицы и подчинялись условию $B=A^T$.*

Доказательство. Присвоим каждому разряду элементов скалярного поля, над которым заданы матрицы A и B, индекс v=1, ..., k^f, где f — арность предикатов, являющихся элементами поля скаляров, а k — количество символов в алфавите, над которым заданы эти предикаты. Таким образом, матрицы A и B распадаются на k^f матриц над булевым множеством K={0, 1}:

$$A^v=\begin{pmatrix} a_{11}^v \mathrm{K}\ a_{1n}^v \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}^v \mathrm{K}\ a_{nn}^v \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B^v=\begin{pmatrix} b_{11}^v \mathrm{K}\ b_{1n}^v \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}^v \mathrm{K}\ b_{nn}^v \end{pmatrix},$$

составленных из v-х разрядов элементов матриц A и B. Следовательно, если утверждение теоремы справедливо для матриц над булевым полем скаляров K={0, 1}, то оно верно и для матриц, элементами которых являются предикаты произвольной арности. В силу этого достаточно доказать теорему для случая скалярного поля K={0, 1}. Пусть размерность матриц A^v и B^v - $n\times n$. Выберем произвольно целое k, $1\le k\le n$. Если k-я строка матрицы A^v нулевая, то и k-я строка матрицы $(AB)^v$ будет нулевой. Поэтому в каждой строке матрицы A^v есть хотя бы одна единица, и этой единице соответствует некоторая единица в матрице B^v (пусть это будет элемент $a^v_{kj}=1$, которому соответствует b^v_{jk}). При $s\ne k$ ($1\le s\le n$) имеем $a^v_{sj}=0$, так как иначе $(AB)^v_{sk}=a^v_{sj}b^v_{jk}=1$, т.е. $(AB)^v\ne E$. Аналогично, в матрице B^v все элементы строки j, за исключением b^v_{jk}, равны нулю. Таким образом, в каждой строке матрицы A^v есть хотя бы одна единица, причем все эти единицы расположены в разных столбцах. Поэтому матрица A^v - ортогональна. Аналогично, ортогональна и матрица B^v. Равенство $(B)^v=(A^v)^T$ теперь очевидно (каждому элементу $a^v_{kj}=1$ соответствует $b^v_{jk}=1$). Теорема доказана.

Теорема 2. *Матрица перехода к новому базису в логическом пространстве является ортогональной.*

Доказательство. Обозначим через $[l]$ и $[l]'$ координатные столбцы произвольного вектора $l\in L$ в базисах a_1, ..., a_n и a'_1, ..., a'_n соответственно. Через B обозначим матрицу обратного перехода от базиса a'_1, ..., a'_n к базису a_1, ..., a_n. Имеют место следующие соотношения:

$$[l]=A[l]', \tag{1}$$

$$[l]'=B[l]. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), имеем $[l]=AB[l]$, т.е. $AB=E$.

Следовательно, $B=A^{-1}$, т.е. матрица A обратима, а значит, согласно теореме 1, ортогональна. Терема доказана.

Конъюнкцией векторов l и g логического пространства L назовем такой вектор этого пространства, координатами которого являются конъюнкции соответствующих координат векторов l и g [5].

Теорема 3. *Конъюнкция любых векторов совершенного логического пространства инвариантна относительно выбора базиса.*

Доказательство. Пусть в базисе $a_1, \ldots, a_n$ векторы l и g имеют координатные столбцы $[l]=(\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ и $[g]=(\eta_1, \ldots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$, а в базисе $a'_1, \ldots, a'_n$ – координатные столбцы $[l]'=(\xi'_1, \ldots, \xi'_n)^{\mathrm{T}}$ и $[g]'=(\eta'_1, \ldots, \eta'_n)^{\mathrm{T}}$ соответственно, а

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $a_1, \ldots, a_n$ к базису $a'_1, \ldots, a'_n$. Очевидно, что

$$A[l\wedge g]'=[l\wedge g], \tag{3}$$

$$[l\wedge g]=[l]\wedge[g], \tag{4}$$

$$[l]\wedge[g]=A[l]'\wedge A[g]'. \tag{5}$$

Так как $[l]=A[l]'$ и $[g]=A[g]'$, то можно записать следующие соотношения:

$$\xi_i=\alpha_{i1}\xi'_1\vee\ldots\vee\alpha_{in}\xi'_n,\ i=1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$\eta_i=\alpha_{i1}\eta'_1\vee\ldots\vee\alpha_{in}\eta'_n,\ i=1, \ldots, n. \tag{7}$$

Учитывая (5), имеем

$$\xi_i\eta_i=(\alpha_{i1}\xi'_1\vee\ldots\vee\alpha_{in}\xi'_n)\wedge(\alpha_{i1}\eta'_1\vee\ldots\vee\alpha_{in}\eta'_n),\ i=1, \ldots, n. \tag{8}$$

Согласно теореме 2, матрица перехода A является ортогональной. Значит, конъюнкция любых двух элементов каждой ее строки равна нулю. Следовательно, равенство (8) приобретает вид

$$\xi_i\eta_i=\alpha_{i1}\xi'_1\eta'_1\vee\ldots\vee\alpha_{in}\xi'_n\eta'_n,\quad i=1, \ldots, n, \tag{9}$$

что в матричной форме запишется как

$$[l\wedge g]=A([l]'\wedge[g]'), \tag{10}$$

откуда, с учетом (3) и (4), следует, что $A[l\wedge g]'=A([l]'\wedge[g]')$, т.е. конъюнкция любых двух векторов совершенного логического пространства инвариантна относительно выбора базиса. Теорема доказана.

Например, для векторов Q_7 и Q_{10} их разложение по базису Q_6, Q_9 будет следующим:

$$Q_7=P_3Q_6\vee P_1Q_9=(1,\ 1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\vee(0,\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$Q_{10}=P_1Q_6\vee P_2Q_9=(0,\ 1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\vee(1,\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, координатными столбцами векторов Q_7 и Q_{10} в базисе Q_6, Q_9 будут столбцы

$$Q_7=\begin{pmatrix}P_3\\ P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,1)\\ (0,1)\end{pmatrix},\quad Q_{10}=\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,1)\\ (1,0)\end{pmatrix},$$

а их конъюнкция будет иметь следующий вид:

$$Q_7\wedge Q_{10}=\begin{pmatrix}P_3\\ P_1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_3\wedge P_1\\ P_1\wedge P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,1)\wedge(0,1)\\ (0,1)\wedge(1,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0,1)\\ (0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1\\ P_0\end{pmatrix}.$$

Значит, конъюнкцией векторов Q_7 и Q_{10} будет вектор

$$Q_7\wedge Q_{10}=P_1Q_6\vee P_0Q_9=(0,\ 1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\vee(0,\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=Q_2.$$

Сверткой $\langle l,\ g\rangle$ двух векторов l и g логического пространства L назовем дизъюнкцию координат конъюнкции этих векторов, т.е. если $[l]=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}$, $[g]=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)^{\mathrm{T}}$, то

$$\langle l,\ g\rangle=\xi_1\eta_1\vee\xi_2\eta_2\vee\ldots\vee\xi_n\eta_n.$$

Сверткой векторов Q_7 и Q_{10} в базисе Q_6, Q_9 будет следующий логический скаляр:

$$\langle Q_7,\ Q_{10}\rangle=(P_3P_1\vee P_1P_2)=(P_1\vee P_0)=((0,\ 1)\vee(0,\ 0))=(0,\ 1)=P_1.$$

Теорема 4. *Свертка любых векторов совершенного логического пространства инвариантна относительно выбора базиса.*

Доказательство. Пусть в базисе $a_1,\ \ldots,\ a_n$ векторы $l,\ g\in L$ имеют координатные столбцы $[l]=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}$, $[g]=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)^{\mathrm{T}}$, а в базисе $a'_1,\ \ldots,\ a'_n$ – $[l]'=(\xi'_1,\ \ldots,\ \xi'_n)^{\mathrm{T}}$, $[g]=(\eta'_1,\ \ldots,\ \eta'_n)$, а матрица

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\ \mathrm{K}\ \alpha_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\ \mathrm{K}\ \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $a_1, \ldots, a_n$ к базису $a'_1, \ldots, a'_n$. Вектор $l \wedge g$ в базисе $a_1, \ldots, a_n$ будет иметь координатное представление $[l \wedge g]=(\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_n\eta_n)^{\mathrm{T}}$, а в базисе $a'_1, \ldots, a'_n$ – $[l \wedge g]'=(\xi'_1\eta'_1, \ldots, \xi'_n\eta'_n)^{\mathrm{T}}$, причем эти координатные представления связаны следующим соотношением [6]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1\eta_1 \\ \mathrm{M} \\ \xi_n\eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\ \mathrm{K}\ \alpha_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\ \mathrm{K}\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1\eta'_1 \\ \mathrm{M} \\ \xi'_n\eta'_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} \xi_1\eta_1 = \alpha_{11}\xi'_1\eta'_1 \vee \ldots \vee \alpha_{1n}\xi'_n\eta'_n \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n\eta_n = \alpha_{n1}\xi'_1\eta'_1 \vee \ldots \vee \alpha_{nn}\xi'_n\eta'_n \ , \end{cases}$$

следовательно,

$$\xi_1\eta_1 \vee \xi_2\eta_2 \vee \ldots \vee \xi_n\eta_n = \xi'_1\eta'_1(\alpha_{11} \vee \alpha_{12} \vee \ldots \vee \alpha_{n1}) \vee \ldots \vee \xi'_n\eta'_n(\alpha_{1n} \vee \alpha_{2n} \vee \ldots \vee \alpha_{nn}),$$

где коэффициент при $\xi'_j\eta'_j$ представляет собой дизъюнкцию элементов j-го столбца матрицы перехода A. Таким образом, матрица перехода A является обратимой, а значит, и ортогональной. Следовательно, дизъюнкция элементов любого ее столбца равна единице, откуда следует, что

$$\xi_1\eta_1 \vee \xi_2\eta_2 \vee \ldots \vee \xi_n\eta_n = \xi'_1\eta'_1 \vee \xi'_2\eta'_2 \vee \ldots \vee \xi'_n\eta'_n,$$

где левая часть равенства представляет собой свертку векторов l и g в базисе $a_1, \ldots, a_n$, а правая – в базисе $a'_1, \ldots, a'_n$. Так как базисы взяты произвольно, то это и доказывает инвариантность свертки векторов совершенного логического пространства относительно выбора базиса. Теорема доказана.

Для свертки векторов логического пространства имеют место следующие свойства, аналогичные свойствам скалярного произведения векторов в линейной алгебре [1, 4]:

$$\langle l, g\rangle = \langle g, l\rangle, \tag{11}$$

$$\langle \alpha l \vee \beta g, h\rangle = \alpha\langle l, h\rangle \vee \beta\langle g, h\rangle, \tag{12}$$

$$\langle 0, 0\rangle = 0, \tag{13}$$

$$\langle l, l\rangle \neq 0, \quad l \neq 0. \tag{14}$$

Векторы $l, g \in E$ назовем *ортогональными*, если их свертка равна нулю. Систему векторов назовем *ортогональной*, если она содержит либо только один вектор, либо входящие в ее состав векторы попарно ортогональны. Из выражения (11) следует свойство симметричности отношения ортогональности: если l ортогонален к g, то g ортогонален к l [2]. Единственным вектором, ортогональным ко всем векторам логического пространства, является нулевой вектор. В нашем примере ортогональными являются векторы Q_3 и Q_{12}, Q_1 и Q_{14}.

Теорема 5. *Система векторов, состоящая из ненулевых взаимно ортогональных векторов $l_1, \ldots, l_k$, является независимой [3].*

Доказательство. Доказывать теорему будем с использованием метода от противного. Для этого предположим, что векторы $l_1, \ldots, l_k$ зависимы. Тогда хотя бы один из них выражается через остальные. Допустим, что это l_1:

$$l_1=\alpha_2 l_2\vee\ldots\vee\alpha_k l_k .$$

Записав свертку этого представления вектора l_1 и самого вектора l_1, в силу предположения о взаимной ортогональности векторов $l_1, \ldots, l_k$ и свойства (12), получим $\langle l_1, l_1\rangle=0$, что может иметь место только в том случае, когда вектор l_1 является нулевым, что противоречит условию теоремы. Следовательно, ни один из векторов системы $l_1, \ldots, l_k$ нельзя выразить через остальные векторы системы, что и свидетельствует о её независимости. Теорема доказана.

Отрицанием вектора $l\in L$, $l=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ назовем вектор $\bar{l}=(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$ [5]. Операцию отрицания логического вектора, как и операцию конъюнкции логических векторов, также можно ввести только в совершенном логическом пространстве.

Теорема 6. *Отрицание любого вектора совершенного логического пространства инвариантно относительно выбора базиса.*

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} \ldots \alpha_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $a_1, \ldots, a_n$ к базису $a'_1, \ldots, a'_n$, а вектор l имеет координатные столбцы $[l]=(\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ и $[l]'=(\xi'_1, \ldots, \xi'_n)^{\mathrm{T}}$ в базисах $a_1, \ldots, a_n$ и $a'_1, \ldots, a'_n$ соответственно. По определению отрицания вектора, $[\bar{l}]=(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)^{\mathrm{T}}$. Кроме того, согласно определению отрицания логических матриц [7], $\overline{[l]}=\left(\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_n\right)^{\mathrm{T}}$, откуда следует, что

$$[\bar{l}]=\overline{[l]}. \qquad (15)$$

Очевидно, что

$$[\bar{l}]=A[\bar{l}]', \tag{16}$$

$$\overline{[l]}=\overline{A[l]'}, \tag{17}$$

откуда, с учетом (15), следует, что

$$A[\bar{l}]'=\overline{A[l]'}. \tag{18}$$

Иными словами, переходя к новому координатному представлению вектора $\bar{l}$ или производя операцию отрицания над вектором l уже в новом базисе, в результате получаем один и тот же вектор, что и доказывает инвариантность отрицания векторов логического пространства относительно выбора базиса. Теорема доказана.

Если вектор принадлежит какому-либо базису проистранства L, то его отрицание можно представить как дизъюнкцию остальных векторов, входящих в тот же базис [8]:

$$\bar{a}_i=a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n. \tag{19}$$

Например, в пространстве двухместных предикатов для базиса Q_6, Q_9

$$\bar{Q}_6=\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=Q_9,$$

а в 4-мерном булевом пространстве [9] для базиса

$$a_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

отрицание, например, вектора a_2 запишется в виде

$$\bar{a}_2=a_1 \vee a_3 \vee a_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\langle l, \bar{l} \rangle=0, \tag{20}$$

следовательно, любой логический вектор всегда ортогонален своему отрицанию. Следствием теоремы 5 и свойства (20) является тот факт, что система ненулевых векторов, составленная из произвольного логического вектора и его отрицания, независима. Например, система векторов Q_7, Q_8 является независимой. Следовательно, системы векторов Q_3, Q_{12} и Q_1, Q_{14} ортогональны.

В силу равенств (19) и (20) можно записать следующее:

$$<a_i,\ \overline{a_i}>=<a_i,\ a_1 \vee a_2 \vee \ \dots\ \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ \dots\ \vee a_n>=0. \qquad (21)$$

Из (21) и (12) вытекает, что

$$<a_i,\ a_1>\vee<a_i,\ a_2>\vee\dots\vee<a_i,\ a_{i-1}>\vee<a_i,\ a_{i+1}>\vee\dots\vee<a_i,\ a_n>=0,$$

что справедливо только в том случае, когда каждый из дизъюнктов этого выражения равен нулю. Следовательно, для любого базиса совершенного логического пространства

$$<a_i,\ a_j>=0,\quad i\neq j. \qquad (22)$$

Это означает, что любой базис совершенного логического пространства представляет собой ортогональную систему.

Теорема 7. *Если вектор g ортогонален к каждому вектору системы $l_1,\ \dots,\ l_k$, то он ортогонален и по отношению к любой их линейной комбинации $\alpha_1 l_1 \vee \dots \vee \alpha_k l_k$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы запишем свертку линейной комбинации векторов $l_1,\ \dots,\ l_k$ и g. В результате получим следующие соотношения:

$$<\alpha_1 l_1 \vee \dots \vee \alpha_k l_k,\ g>=\alpha_1<l_1,\ g>\vee\dots\vee\alpha_k<l_k,\ g>=0,$$

откуда и следует ортогональность вектора g по отношению к любой линейной комбинации векторов $l_1,\ \dots,\ l_k$. Теорема доказана.

Совокупность всех линейных комбинаций векторов $l_1,\ \dots,\ l_k$ образует подпространство $H=H(l_1,\ \dots\ ,\ l_k)$ логического пространства L – логическую оболочку векторов $l_1,\ \dots,\ l_k$. Из теоремы 7 следует, что вектор g ортогонален каждому вектору подпространства H. В этом случае вектор g назовем *ортогональным по отношению к подпространству H*. Например, векторы Q_1, Q_2, Q_4 являются взаимно ортогональными:

$$Q_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(0,\ 0)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\vee(0,\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=P_0Q_6\vee P_1Q_9,$$

$$Q_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=(0,\ 1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\vee(0,\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=P_1Q_6\vee P_0\vee Q_9\ ,$$

$$Q_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=(1,\ 0)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\vee(0,\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=P_2Q_6\vee P_0\vee Q_9\ ;$$

$$<Q_1, Q_2> = (P_0P_1 \vee P_1P_0) = P_0,$$

$$<Q_1, Q_4> = (P_0P_2 \vee P_1P_0) = P_0,$$

$$<Q_2, Q_4> = (P_1P_2 \vee P_0P_0) = P_0.$$

Следовательно, система этих векторов является независимой. Возьмем вектор

$$Q_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1,\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_0Q_6 \vee P_2Q_9.$$

Он ортогонален к каждому из векторов системы Q_1, Q_2, Q_4:

$$<Q_1, Q_8> = (P_0P_0 \vee P_1P_2) = P_0,$$

$$<Q_2, Q_8> = (P_1P_0 \vee P_0P_2) = P_0,$$

$$<Q_4, Q_8> = (P_2P_0 \vee P_0P_2) = P_0.$$

Следовательно, вектор Q_8 ортогонален к подпространству H, составленному из линейных комбинаций вкторов Q_1, Q_2, Q_4. Например:

$$P_1Q_1 \vee P_2Q_2 \vee P_2Q_4 = (0,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee (1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q_5,$$

$$Q_5 = (1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_2Q_6 \vee P_1Q_9\ ,$$

$$<Q_5,\ Q_8> = (P_2P_0 \vee P_1P_2) = P_0\ .$$

В подпространство H можно включить линейные комбинации, содержащие векторы Q_3, Q_5, Q_6 и Q_7, так как они также ортогональны по отношению к вектору Q_8.

Возьмем произвольное множество векторов логического пространства L. Вектор g назовем *ортогональным по отношению к этому множеству векторов*, если он ортогонален к каждому вектору множества. Два множества векторов логического пространства L назовем *ортогональными*, если каждый вектор одного из них ортогонален к каждому вектору второго [1]. Например, два множества векторов $F=\{Q_2,\ Q_3\}$ и $G=\{Q_4,\ Q_{12}\}$ являются ортогональными, так как каждый вектор множества F ортогонален к каждому вектору множества G.

Теорема 8. *Для того чтобы вектор $l \in L$ был ортогонален по отношению к подпространству $D \subset L$, необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален по отношению ко всем векторам какого-либо заданного базиса подпространства D.*

Доказательство. Допустим, что вектор l ортогонален к подпространству D. В этом случае он ортогонален ко всем векторам подпространства, в том числе и к его базисным векторам, что и доказывает необходимость выполнения условия теоремы. Теперь допустим, что вектор l ортогонален ко всем базисным векторам некоторого подпростраанства $D\subset L$, а следовательно, и к любой их линейной комбинации. Но так как каждый вектор подпространства D представляет собой линейную комбинацию его базисных векторов, то, следовательно, вектор l ортогонален ко всем векторам подпространства D. Отсюда вытекает, что вектор l ортогонален к подпространству D, что и доказывает достаточность условия теоремы. Теорема доказана.

Список литературы. 1. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 319 с. 2. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. 400 с. 3. *Шилов Г.Е.* Введение в теорию линейных пространств. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956. 304 с. 4. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с. 5. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Неполные и полные логические пространства // Проблемы бионики, 1991. Вып. 46. С. 10-17. 6. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Послaвский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических пространствах // АСУ и приборы автоматики, 1997. Вып.106. С. 21-30. 7. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Послaвский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических матрицах // Проблемы бионики, 1997. Вып.48. С. 12-22. 8. *Дюкарев М.Ю., Кольцов А.В., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Умножение и отрицание в алгебре идей // АСУ и приборы автоматики, 1992. Вып. 98. С. 10-17. 9. *Поваров Г.Н.* О групповой инвариантности булевых функций // Применение логики в науке и технике. М.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 263-340. 10. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.

Поступила в редколлегию 23.11.98

Гвоздинская Наталья Анатольевна, аспирантка кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: логическая алгебра. Адрес: Украина, 310093, Харьков, ул. Скорохода, 24, кв.79, тел. 72-19-76.

УДК 519.7

Н.А. ГВОЗДИНСКАЯ

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ЛИНЕЙНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Линейный логический оператор **A**: $L\to L$ назовем *оператором умножения вектора на скаляр*, если он каждый вектор $l\in L$ переводит в вектор $\lambda l\in L$, где λ – произвольный элемент из поля логичес-