

УДК 621.382

В. В. ОВЧАРЕНКО, канд. техн. наук

**ТЕОРИЯ $p-n$ -ПЕРЕХОДА, ТОЛЩИНА КОТОРОГО
БОЛЬШЕ ДИФФУЗИОННОЙ ДЛИНЫ. СООБЩЕНИЕ 2**

В первом сообщении были выведены новые уравнения непрерывности для полупроводника с током и на их основе получены нелинейные дифференциальные уравнения (ДУ) $p-n$ -перехода [1]. Рассмотрим решения полученной системы ДУ.

Исследование решений в окрестности особой точки. В малой окрестности особой точки поведение решений системы ДУ (30) приближенно описывается линеаризованной системой ДУ $dy_0/dx = Ay_0$ (33), характеристическое уравнение которой $\det(A - \lambda I) = 0$ в развернутом виде следующее: $\lambda^2[E_1\lambda - \lambda^2 + a(1+b)](E_1 + \lambda) - \lambda[E_1\lambda - \lambda^2 + a(1+b)](1+b) + 2E_1(1-a)\lambda^2 = 0$. Обозначим нулевой корень этого уравнения через $\lambda_5 = 0$. Остальные четыре корня определяются уравнением $\Delta(\lambda) = (E_1\lambda)^2 + (1-b)(1-a)E_1\lambda - [\lambda^2 - a(1+b)](\lambda^2 - 1 - b) = 0$ (34), которое разрешается относительно E_1 . Это позволяет исследовать зависимость корней уравнений (34) от E_1 . В самом деле, вследствие чрезвычайной малости параметров $a \sim 10^{-9}$, $b \sim 10^{-12}$ искомые зависимости с высокой степенью точности описываются приближенным уравнением $(E_1\lambda)^2 + E_1\lambda - \lambda^2(\lambda^2 - 1) = 0$. Оно эквивалентно уравнению $\lambda^2(E_1 + \lambda)(E_1\lambda - \lambda^2 + 1) = 0$, распадающемуся на три уравнения:

$$\lambda = 0; E_1 = -\lambda; E_1 = \lambda - 1/\lambda. \quad (35)$$

Кривые (35) (см. рис. 1, пунктирные линии) определяют график точной функции $E_1(\lambda)$ почти во всей плоскости λOE_1 , за исключением малых окрестностей точек пересечения указанных кривых. Эти окрестности имеют размеры порядка $\sqrt{a} \sim 10^{-4}$. Исследуя уравнение (34), нетрудно проверить, что точная функция $E_1\lambda$ не имеет самопересечений и выглядит так, как показано на рис. 1 сплошной линией.

Из рис. 1 следует, что при любом E_1 уравнение (34) имеет четыре вещественных корня: два положительных и два отрицательных (обозначение корней показано на рис. 1). При $E_1 = 0$

$$\lambda_1 = +\sqrt{1+b} \cong +1; \lambda_3 = +\sqrt{a(1+b)} \cong +\sqrt{a};$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{1+b} \cong -1; \lambda_4 = -\sqrt{a(1+b)} \cong -\sqrt{a}.$$

Обозначим через μ_i собственный вектор, отвечающий корню λ_i , $i = \overline{1, 5}$. Тогда общее решение линейной системы ДУ (33) можно представить в виде

$$y_0(x) = \mu_1 M_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \mu_5 M_5,$$

где M_i — произвольные постоянные. Из этой формулы следует, что через особую точку $y_0 = 0$ при $x \rightarrow -\infty$ проходят только те решения, у которых $M_2 = 0$, $M_4 = 0$, $M_5 = 0$, а M_1, M_3 могут быть произвольными. Когда M_1, M_3 пробегают множество вещественных чисел R , фазовые траектории

$$y_0(x) = \mu_1 M_1 e^{\lambda_1 x} + \mu_3 M_3 e^{\lambda_3 x} \quad (36)$$

«замечают» двумерное подпространство в фазовом пространстве R^5 . Это подпространство является касательным пространством в особой

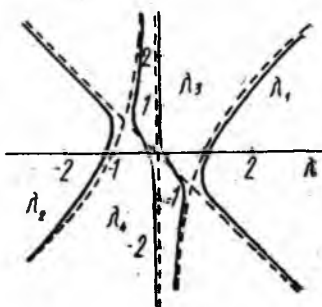


Рис. 1

точке к двумерному интегральному многообразию ИМ системы ДУ (29). Ниже покажем, что параметризацию семейства фазовых траекторий, лежащих на ИМ, можно осуществить с помощью констант M_1, M_3 линейного приближения (36).

Приведем результаты вычисления собственных векторов μ_i , координаты которых удовлетворяют системе линейно зависящих уравнений $(A - \lambda_i I)\mu_i = 0$. Решая эту систему методом исключения неизвестных и нормируя соответствующим образом собственные векторы, получаем

$$\mu_1 = \text{colom}(-1, -\lambda_1^{-1}, -\alpha_1, -\alpha_1 \lambda_1^{-1}, -\alpha \lambda_1^{-2}); \quad (37)$$

$$\mu_3 = \text{colom}(\lambda_3^2, \lambda_3, \alpha_3 \lambda_3^2, \alpha_3 \lambda_3, \alpha_3), \quad (38)$$

где
$$\alpha_i = \frac{(\lambda_i - E_1) \lambda_i - a(1+b)}{1-a}, \quad i = 1, 3. \quad (39)$$

Формальное решение нелинейной системы ДУ с помощью рядов экспонент. Так как решение нелинейной системы ДУ (30) при $x \rightarrow \infty$ должно приближаться к решению (36) линеаризованной системы ДУ (33), естественно искать решение системы (30) в виде ряда экспонент

$$y(x) = \sum_{|k| > 1} y_k M^k e^{(k, \lambda)x}, \quad (40)$$

который при $x \rightarrow -\infty$ сколь угодно близко подходит к (36), если выбрать $y_{10} = \mu_1$; $y_{01} = \mu_3$. В формуле (40) использованы такие обозначения: $k = (k_1, k_3)$. Здесь k_1, k_3 — целые неотрицательные числа; $|k| = k_1 + k_3$; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_3)$; $(k, \lambda) = k_1 \lambda_1 + k_3 \lambda_3$; $M = (M_1, M_3)$; $M^k = M^{k_1} M_3^{k_3}$. Не анализируя сходимость ряда (40), рассмотрим процесс формального вычисления коэффициентов y_k этого ряда и изучим некоторые его свойства с помощью численных экспериментов на ЭВМ.

Запишем билинейное отображение $(Ty, y) : R^5 \times R^5 \rightarrow R^5$ в виде

$$\begin{aligned} (Ty, y) &= \left(T \sum_{|e|=1}^{\infty} y_e M^e e^{(e, \lambda)x}; \sum_{|m|=1}^{\infty} y_m M^m e^{(m, \lambda)x} = \right. \\ &= \left. \sum_{|k|=2e+m-k}^{\infty} \sum_{|m|=k} (Ty_e, y_m) M^{e+m} e^{(e+m, \lambda)x}, \right. \end{aligned} \quad (41)$$

где $|e| > 0$, $|m| > 0$. Подставляя (40), (41) в (30) и сравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем бесконечную последовательность систем алгебраических уравнений

$$[A - (k, \lambda) I] y_k = 0, \quad |k| = 1; \quad (42)$$

$$[A - (k, \lambda) I] y_k = - \sum_{e+m=k} (Ty_e, y_m), \quad |k| \geq 2. \quad (43)$$

В качестве решений систем (42) следует принять $y_{10} = \mu_1$, $y_{01} = \mu_3$. При $|k| \geq 2$ вектор y_k однозначно выражается через векторы $y_{k'}$, где $|k'| = 1, 2, \dots$, $|k| - 1$, так как $\det [A - (k, \lambda) I] \neq 0$ и $|e|$,

$|m| > 0$. Для получения этих выражений запишем (43) в развернутой форме:

$$\begin{aligned} (E_1 - c_k z_{pk} + a(1+b)p_k + (1-a)\rho_k) &= -fk; \quad z_{pk} - c_k p_k = 0; \\ 2E_1 z_{pk} - (E_1 + c_k)z_k + (1+b)\rho_k &= -g_k; \quad z - c_k \rho_k = 0; \quad \rho_k - c_k E_k = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{e+m=k} (T^1 y_e, y_m) = \sum_{e+m=k} [a p_e p_m + p_e \rho_m (1-a) + z_{pe} E_m]; \\ g_k &= \sum_{e+m+k} (T^3 y_e, y_m) = \sum_{e+m+k} [(2z_{pe} - z_e) E_m + (2\rho_e - \rho_e) \rho_m]; \\ c_k &= k_1 \lambda_1 + k_3 \lambda_3. \end{aligned}$$

Исключая из системы (44) неизвестные z_{pk} , z_k , ρ_k , имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \{(E_1 - c_k)c_k + a(1+b)\} p_k + (1-a)c_k E_k &= -f_k; \\ 2E_1 c_k p_k + \{-(E_1 + c_k)c_k + (1+b)\} c_k E_k &= -g_k, \end{aligned}$$

определитель которой $\Delta(c_k) \neq 0$. Решив эту систему, найдем значения

$$p_k = \{[-(E_1 + c_k)c_k + (1+b)]f_k - (1-a)g_k\} / \Delta(c_k); \quad (45)$$

$$E_k = \{[(E_1 - c_k)c_k + a(1+b)]g_k - 2E_1 c_k f_k\} / c_k \Delta(c_k), \quad (46)$$

через которые можно выразить компоненты искомого вектора

$$y_k = \text{colop} (c_k p_k, p_k, c_k^2 E_k, c_k E_k, E_k). \quad (47)$$

Вычислив векторные коэффициенты по формуле (40), получим решение $y(x, M_1, M_3)$, зависящее от двух произвольных параметров M_1, M_3 .

Покажем, что множество всех фазовых траекторий, описываемых формулой (40), составляет двумерное интегральное многообразие ИМ в пятимерном фазовом пространстве R^5 . Для этого построим двумерное интегральное многообразие $\overline{\text{ИМ}}$:

$$y = y(\overline{M}_1, \overline{M}_3) = \sum_{|k|>1} y_k \overline{M}_1^k \overline{M}_3^k. \quad (48)$$

Покажем, что $\overline{\text{ИМ}} = \text{ИМ}$. Зафиксируем x, M, M_3 и построим точку $y(x, M_1, M_3) \subset \text{ИМ}$ по формуле (40). Эта точка содержится в ИМ, поскольку она получается по формуле (48) при

$$\overline{M}_1 = M_1 e^{\lambda_1 x}, \quad \overline{M}_3 = M_3 e^{\lambda_3 x}.$$

Тогда $\overline{\text{ИМ}} \subset \text{ИМ}$. Обратно, фиксируем $\overline{M}_1, \overline{M}_3$ и находим точку $y(\overline{M}_1, \overline{M}_3) \subset \overline{\text{ИМ}}$ по формуле (48). Эта точка также содержится в ИМ, так как ее выводят по формуле (40) при $M_1 = \overline{M}_1, M_3 = \overline{M}_3$ и $x \leq 0$, т. е. $\overline{\text{ИМ}} \subset \text{ИМ}$. Следовательно, $\overline{\text{ИМ}} = \text{ИМ}$.

С помощью формул нулевого приближения (36) — (39) нетрудно проверить, что для положительных токов через p - n -переход,

когда концентрации p , n убывают при $x \rightarrow -\infty$, константы M_1 , M_3 должны быть положительными.

Рассмотрим граничные условия (28). Они содержат два уравнения, с помощью которых можно найти неизвестные константы M_1 , M_3 . При этом необходимо фиксировать различные пары чисел M_1 , M_3 и находить значение $x(M_1, M_3)$, при котором $\rho = -1 + b$ [(см. 28)]. Затем для $x(M_1, M_3)$ следует проверить равенство $z = 2z_p$, пока не найдем значения M_1 , M_3 , для которых выполняются условия (28). Указанный поиск следует организовать на ЭВМ. Однако численные эксперименты показали, что в области сходимости ряда Дирихле (40) не удается достичь даже первого равенства $\rho = -1 + b$, хотя при увеличении x от $-\infty$ наблюдается отчетливое убывание $\rho(x)$ вплоть до границы области сходимости. Поэтому при определенном значении x_1 , лежащем в области сходимости ряда (40), следует прекращать выполнение решения с помощью этого ряда экспонент и продолжать дальнейшее вычисление решения нелинейной системы ДУ (30) с помощью метода Рунге-Кутты, все время проверяя граничные условия (28). Отметим, что момент начала расходимости ряда (40) удобно контролировать по началу изменения инварианта H [(см. (32)], выбирая по этому признаку точку x_1 .

Вычисления. Практическое нахождение описанного решения нелинейной системы ДУ (29) требует большой вычислительной работы на ЭВМ. В численных экспериментах программирование проводилось на ФОРТРАНе с использованием удвоенной точности (порядка 10^{18}) всех вычислений. Последнее связано с тем, что в системе ДУ (29) входят малые параметры $a \sim 10^{-9}$, $b \sim 10^{-12}$, а искомые функции изменяются на 8—10 порядков. Программа состояла из пяти логически законченных частей.

1. Определение корней λ_1 , λ_3 характеристического уравнения (34).

2. Вычисление векторных коэффициентов y_k .

3. Определение решения $y(x, M_1, M_3)$ в области сходимости ряда (40) до точки x_1 .

4. Определение решения $y(x, M_1, M_3)$ вне области сходимости ряда (40) методом Рунге-Кутты.

5. Вычисление разности $z - 2z_p$ в точке $x(M_1, M_3)$, где $\rho = -1 + b$ [(см. (28)]).

Отдельного пояснения требует выполнение пункта 1, так как очевидно, что $y_{10} = M_1$, $y_{01} = M_3$ вычисляются по формулам (37)—(39), а затем остальные y_k находятся по рекуррентным формулам (45)—(47) (в наших численных экспериментах брались такие $k = (k_1, k_3)$, что $|k| = k_1 + k_3 \leq 35 - 40$). Вычисление корней λ_1 , λ_3 производилось с помощью формул Кардано для уравнений четвертой степени [2, с. 239], предварительно проанализировав коэффициенты вспомогательных уравнений. Такой анализ позволил составить следующую схему вычисления чисел λ_1 , λ_3 .

Формулируем приведенное уравнение $\lambda^4 + p_1\lambda^2 + q_1\lambda + r = 0$, где $p_1 = -[E_1 + (1 + a)(1 + b)]$; $q_1 = -E_1(1 - a)(1 - b)$; $r = a(1 + b)$.

Строим вспомогательное уравнение

$$\alpha^3 + p_1\alpha^2 + c\alpha + d = 0, \text{ где } c = -r_1 + p_1^2/4; d = -q_1^2/8.$$

Вычисляем коэффициенты

$$q_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1}{3} \left(\frac{2p_1}{9} - c \right) + d \right]; p_2 = \frac{1}{3} \left(c - \frac{p_1^2}{3} \right)$$

канонической формы вспомогательного уравнения $\tilde{\alpha}^3 + 3p_2\tilde{\alpha} + 2q_2 = 0$.

Определяем

$$\theta = \begin{cases} \arccos \frac{|q_2|}{(\sqrt{-p_2})^3}, & |q_2| < (\sqrt{-p_2})^3; \\ 0, & |q_2| \geq (\sqrt{-p_2})^3. \end{cases}$$

Вычисляем

$$\alpha = \begin{cases} 2\sqrt{-p_2} \cos(60^\circ - \theta/3), & |q_2| > 0; \\ 2\sqrt{-p_2} \cos(\theta/3), & |q_2| \leq 0. \end{cases}$$

Определяем $\alpha_0 = \alpha_0 - p_1/3$.

Находим корни

$$\lambda_1, \lambda_3 = \frac{1}{2} [\sqrt{2\alpha_0} \pm \sqrt{-2p_1 - 2\alpha_0 - q_1/\sqrt{2\alpha_0}}],$$

где знак $+$ относится к λ_1 .

На рис. 2 представлены типичные графики распределений $p(x)$, $E(x)$, $\rho(x)$ в области пространственного заряда (ОПЗ), вычисленные с помощью упомянутой программы. Из рис. 2 следует, что ширину ОПЗ можно оценить в несколько относительных единиц. В примере, описанном в работе [1], единица длины составляла порядка 0,01 мкм, а диффузионная длина порядка 400 мкм. Последняя определяет поведение экспоненциальных функций $p(x)$, $n(x)$ вдали от контакта согласно формулам нулевого приближения (36). Таким образом, диффузионная длина имеет порядок $1/\lambda_3$, а ширина ОПЗ, как показывают численные эксперименты, — порядок $1/\lambda_1$. На расстоянии в несколько десятков относительных единиц от контакта

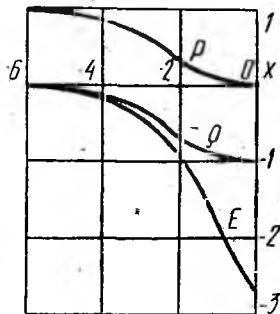


Рис. 2

($1/\lambda_1 \ll |x| \ll 1/\lambda_3$) функция $p(x)$ имеет слабо выраженный максимум.

Превышение над единицей значения $p(x)$ в максимуме равно примерно $n(0) \sim 10^{-6} \div 10^{-10}$.

Графики, показанные на рис. 2, соответствуют умеренным прямым токам. При изменении тока в реальном диапазоне значений

наблюдается изменение величин $n(0) = p(0)$ на несколько порядков, что соответствует изменению уровня инжекции неосновных носителей заряда в таких же пределах.

Отметим один принципиальный момент для неограниченной модели p — n -перехода. В этом случае нельзя определить падение напряжения на всем p — n -переходе, как это делается для конечного p — n -перехода суммированием падений напряжения на ОПЗ и p — n -областях. При неограниченном p — n -переходе последние два слагаемых равны бесконечности. Однако падение напряжения на ОПЗ имеет смысл и вычисляется интегрированием функции $E(x)$ по x в пределах $-\infty \rightarrow 0$. Падение напряжения в этом случае является половиной контактной разности потенциалов φ_k при заданном прямом токе.

Итак, вольт-амперную характеристику неограниченного p — n -перехода можно определить как зависимость контактной разности потенциала от тока, протекающего через p — n -переход. Численные эксперименты показывают, что φ_k медленно убывает при уменьшении тока, как и должно быть; убывание происходит в результате расширения ОПЗ и увеличения в ней отрицательной напряженности поля $E(x)$. Увеличение $|E(x)|$ сопровождается понижением концентраций $p(0) = n(0)$. Все это согласуется с физическими представлениями о работе p — n -перехода. Однако описанный алгоритм вычисления равновесного состояния p — n -перехода имеет недостаточную эффективность в области малых токов. Это вызвано тем, что при малых токах граничные условия $p'(0) = n'(0)$, $z'_p(0) = -z'_n(0)$ проверяются на низком уровне концентраций и их градиентов, при которых возникает естественное препятствие — недостаточная точность вычислений.

Таким образом, требуется дальнейшее совершенствование алгоритма вычислений.

Список литературы: 1. Овчаренко В. В. Теория p — n -перехода, толщина которого больше диффузионной длины. Сообщение 1 // Радиотехника.— 1987.— Вып. 80.— С. 97—105. 2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1968.— 432 с.

Поступила в редколлегию 25.07.85.