$$Z_n^{(2)}\left(\bar{k}_{rz}^{(2)}r\right)=-\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)\left[I_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)}r\right)K_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)}a_2\right)-\right.$$
$$\left.-(-1)^n I_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)}a_2\right)K_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)}r\right)\right],$$

$$Z_n^{(N)}\left(\bar{k}_{rz}^{(N)}r\right)=-\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)\left[I_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(N)}r\right)K_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(N)}a_N\right)-\right.$$
$$\left.-(-1)^n I_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(N)}a_N\right)K_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(0)}r\right)\right] .$$

Полученное в такой форме дисперсионное уравнение позволяет разработать оптимальный численный алгоритм для расчета резонансных частот рассматриваемого резонатора. Алгоритм и результаты численных расчетов на ЭВМ будут приведены в продолжении данной статьи.

Литература: 1. *Лупандин О.С., Ковпак Н.Е., Баранов Л.Н., Хижняк Н.А.* Исследование электродинамических свойств резонаторов с патрубками. Харьков: ХФТИ. Препринт 70/34. 1970. 15с. 2. *Вайнштейн Л.А., Маненков А.Б.* Коаксиальные резонаторы//Радиотехника и электроника. 1973. Т.18. Вып.9. С.1777-1784. 3. *Вальднер О.А., Шальнов А.В., Диденко А.Н.* Ускоряющие волноводы. М., 1973. 192 с.

Поступила в редколлегию 15.12.99

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Лучанинов А.И.

Руженцев Игорь Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой метрологии и измерительной техники ХТУРЭ. Научные интересы: радиофизика и измерительная техника. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-31.

Хмель Сергей Иванович, соискатель кафедры МИТ ХТУРЭ. Научные интересы: радиофизика и измерительная техника. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 14-08-02.

Чумаченко Виктор Савельевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Харьковского научного физико-технологического центра НАНУ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61145, Харьков, ул. Новгородская, 1, тел. 32-45-67.

УДК 537.877

РАСЧЕТ ИСКАЖЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИИ В РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. I

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Предлагается общая схема решения задачи о расчете искажения огибающей электромагнитного импульса, распространяющегося в регулярном волноводе. При заданных огибающей, несущей частоте входного сигнала и длине волновода с использованием преобразования Фурье выводится общая формула, из которой можно определить искажения огибающей выходного сигнала.

Для волновода без потерь длиной *l*, рассматриваемого как четырехполюсник, передаточная функция имеет вид [1,2]:

$$A(\omega)=\exp\left(-jt_0\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}\right), \qquad (1)$$

где $t_0=l/c$, l — длина волновода; c — скорость света; ω — частота электромагнитного поля; ω_c — критическая частота волновода. Пусть на вход этого волновода подается импульс с несущей частотой ω_0:

$$u_1(t)=g_e(t)\cos\omega_0 t , \qquad (2)$$

здесь $g_e(t)$ — огибающая этого импульса.

Введем в рассмотрение спектр огибающей импульса, вычисляемый по формуле

$$g_e(t)\circ\!-\!\bullet\, u(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g_e(t)e^{-j\omega t}d\omega ; \qquad (3)$$

$$u_1(t)\circ\!-\!\bullet\, F_{\text{вх}}=\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)e^{-j\omega t}dt=$$
$$=\frac{1}{2}u(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}u(\omega+\omega_0) . \qquad (4)$$

Итак, спектр входного сигнала представим в виде:

$$u_1(t)\circ\!-\!\bullet\, F_{\text{вх}}=\frac{1}{2}u(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}u(\omega+\omega_0). \qquad (5)$$

На выходе волновода с учетом $A(\omega)$ и использованием обратного преобразования Фурье получим выходной сигнал

$$u_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_{\text{вх}}(\omega)A(\omega)e^{j\omega t}d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u(\omega+\omega_0)A(\omega)e^{j\omega t}d\omega+ \qquad (6)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u(\omega-\omega_0)A(\omega)e^{j\omega t}d\omega .$$

При замене переменных

$$\omega+\omega_0=\omega' ;\quad \omega=\omega'-\omega_0 ;$$
$$\omega-\omega_0=\omega'' ;\quad \omega=\omega''+\omega_0 ;$$
$$e^{j\omega t}=e^{j(\omega'-\omega_0)t}=e^{j\omega' t}e^{-j\omega_0 t} ;$$
$$e^{j\omega t}=e^{j(\omega''+\omega_0)t}=e^{j\omega'' t}e^{j\omega_0 t}$$

получим

$$u_2(t)=\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u(\omega')A(\omega'-\omega_0)e^{j\omega' t}d\omega' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u\left(\omega''\right)A\left(\omega''+\omega_0\right)e^{j\omega'' t}d\omega''. \qquad (7)$$

Воспользовавшись тригонометрической формой записи комплексных чисел, получим:

$$u_2(t)=\cos\omega_0 t\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u\left(\omega'\right)A\left(\omega'-\omega_0\right)e^{j\omega' t}d\omega'+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u\left(\omega''\right)A\left(\omega''+\omega_0\right)e^{j\omega'' t}d\omega''\right\}+$$

$$+\sin\omega_0 t\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u\left(\omega'\right)A\left(\omega'-\omega_0\right)e^{j\omega' t}d\omega'+\right.$$

$$\left.+j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u\left(\omega''\right)A\left(\omega''+\omega_0\right)e^{j\omega'' t}d\omega''\right\}. \qquad (8)$$

Если переменную интегрирования ω' и ω'' заменим снова на ω, т.е. опустим штрихи, то получим u_2 в виде действительной (Re) и мнимой (Im) частей:

$$u_2(t)=\cos\omega_0 t\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\omega)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\left[A(\omega+\omega_0)+A(\omega-\omega_0)\right]e^{j\omega t}d\omega+ \qquad (9)$$

$$+\sin\omega_0 t\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\omega)\cdot\frac{1}{2}\left[A(\omega+\omega_0)-A(\omega-\omega_0)\right]e^{j\omega t}d\omega.$$

Перепишем u_2 в таком виде:

$$u_2(t)=g_1(t)\cos\omega_0 t+g_2(t)\sin\omega_0 t, \qquad (10)$$

где

$$g_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\omega)\frac{1}{2}\left[A(\omega+\omega_0)+A(\omega-\omega_0)\right]e^{j\omega t}d\omega,$$

$$g_2(t)=j\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\omega)\frac{1}{2}\left[A(\omega+\omega_0)-A(\omega-\omega_0)\right]e^{j\omega t}d\omega.$$

Следовательно,

$$u_2(t)=g(t)=\sqrt{g_1^2(t)+g_2^2(t)}, \qquad (11)$$

где $g(t)=\left|G(t)\right|$, $g(t)$ представлено как модуль комплексной функции $G(t)$: $G(t)=g_1(t)-jg_2(t)$;

$$G(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\omega)e^{-f(\omega)}d\omega, \qquad (12)$$

здесь

$$f(\omega)=-j\left\{\omega t-t_0\sqrt{(\omega+\omega_0)^2-\omega_c^2}\right\}. \qquad (12а)$$

Поскольку функция $f(\omega)$ в точках $\omega_{1,2}=-\omega_0\pm\omega_c$ имеет ветвления, то интеграл (12) не вычисляется в аналитическом виде.

Функцию $f(\omega)$ представим в виде $f(\omega)=R+jI$.

Путь интегрирования изменяется таким образом, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$I(\omega_S)=const,$$

где ω_S – седловая точка.

Введем обозначение

$$\omega+\omega_S=\omega_c\mathrm{ch}z=x+jy;\ z=u+jv. \qquad (13)$$

Седловые точки располагаются там, где $f'(\omega)$ обращается в нуль:

$$f(\omega)=j\left\{t_0\sqrt{(\omega+\omega_0)^2-\omega_c^2}-\omega t\right\}. \qquad (14)$$

Из (14) с учетом (13) имеем

$$f(z)=j\omega_c\left\{t_0\mathrm{sh}z-t\mathrm{ch}z+\frac{\omega_0 t}{\omega_c}\right\}. \qquad (15)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции и приравнивая производную нулю, определяем две седловые точки:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ v_0=0\\ 2.\ v_0=\pm\pi\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\mathrm{th}u_0=\dfrac{t_0}{t};\\ z_0=u_0+jv_0.\end{array} \qquad (16)$$

Из (16) определяется u_0:

$$u_0=\mathrm{Arth}\frac{t_0}{t}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{t_0}{t}}{1-\frac{t_0}{t}}=\frac{1}{2}\ln\frac{t+t_0}{t-t_0};\ \frac{t_0}{t}<1; \qquad (17)$$

$$\mathrm{ch}u_0=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2u_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t_0}{t}\right)^2}}; \qquad (18)$$

$$\omega_{S1,2}=\pm\omega_c\mathrm{ch}z=\pm\omega_c\mathrm{ch}(u_0+jv_0)=$$

$$=\pm\omega_c\left[\mathrm{ch}u_0\cos v_0+j\mathrm{sh}u_0\sin v_0\right];$$

$$\omega_{S1,2}=\pm\omega_c\mathrm{ch}u_0-\omega_0=\pm\omega_c\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t_0}{t}\right)^2}}-\omega_0.$$

Для вывода уравнений путей через седловые точки в $f(z)$ выделим реальную R и мнимую I части:

$$f(z)=j\left[t_0\omega_c\mathrm{sh}z-t\omega_c\mathrm{ch}z+\omega_0 t\right],\ z=u+jv,\ .$$

Учитывая представления

$$\mathrm{sh}z = \mathrm{sh}(u + jv) = \mathrm{sh}u \cos v + j\mathrm{ch}u \sin v,$$

$$\mathrm{ch}z = \mathrm{ch}(u + jv) = \mathrm{ch}u \cos v + j\mathrm{sh}u \sin v,$$

получаем

$$f(z) = -t_0\omega_c \mathrm{ch}u \sin v + t\omega_c \mathrm{sh}u \sin v +$$

$$+ j\left[t_0\omega_c \mathrm{sh}u \cos v - t\omega_c \mathrm{ch}u \cos v + \omega_0 t\right];$$

$$R = -t_0\omega_c \mathrm{ch}u \sin v + t\omega_c \mathrm{sh}u \sin v;$$

$$I = t_0\omega_c \mathrm{sh}u \cos v - t\omega_c \mathrm{ch}u \cos v + \omega_0 t. \qquad (19)$$

Для мнимой части $f(z)$ в седловой точке при учете уравнения (16) имеет место

$$I(z_0) = \omega_0 t \mp \frac{\omega_c t_0}{\mathrm{sh}u_0}. \qquad (20)$$

Пути через седловые точки задаются соотношением:

$$I(z) = I(z_0); \qquad (21)$$

$$I(z) = t_0\omega_c \mathrm{sh}u \cos v - t\omega_c \mathrm{ch}u \cos v + \omega_0 t =$$

$$= \omega_0 t + t_0\omega_c \cos v \left(\mathrm{sh}u - \frac{t}{t_0}\mathrm{ch}u\right) =$$

$$= \omega_0 t + t_0\omega_c \cos v \frac{\mathrm{ch}(u - u_0)}{\mathrm{sh}u_0};$$

$$\omega_0 t - t_0\omega_c \cos v \frac{\mathrm{ch}(u - u_0)}{\mathrm{sh}u_0} = \omega_0 t \mp \omega_c t_0 \frac{1}{\mathrm{sh}u_0};$$

$$-\omega_c t_0 \cos v \frac{\mathrm{ch}(u - u_0)}{\mathrm{sh}u_0} = \omega_c t_0 \frac{\mp 1}{\mathrm{sh}u_0};$$

$$\cos v = \frac{\pm 1}{\mathrm{ch}(u - u_0)}. \qquad (22)$$

Выразим R через переменную u:

$$R = -t_0\omega_c \mathrm{ch}u \sin v + t\omega_c \mathrm{sh}u \sin v =$$

$$= \omega_c t_0 \sin v \frac{\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{sh}u_0}; .$$

Учитывая (22), получаем

$$\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(u - u_0)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(u - u_0) - 1}{\mathrm{ch}^2(u - u_0)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2(u - u_0)}{\mathrm{ch}^2(u - u_0)}} = \pm\frac{\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)};$$

$$R = \omega_c t_0 \sin v \frac{\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{sh}u_0} =$$

$$= \pm\omega_c t_0 \frac{\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)} \frac{\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{sh}u_0} =$$

$$= \pm\frac{\omega_c t_0}{\mathrm{sh}u_0} \frac{\mathrm{sh}^2(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)}.$$

Итак, функция $f(z)$ имеет представление

$$f(z) = R + jI =$$

$$= \pm\frac{\omega_c t_0}{\mathrm{sh}u_0} \frac{\mathrm{sh}^2(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)} + j\left(\omega_0 t - \frac{\omega_c t_0}{\mathrm{sh}u_0}\right).$$

Определим ω:

$$\omega + \omega_0 = \omega_c \mathrm{ch}z;$$

$$\omega + \omega_0 = \omega_c \mathrm{ch}(u + jv) =$$

$$= \omega_c (\mathrm{ch}u \cos v + j\mathrm{sh}u \sin v)$$

$$\omega = \omega_c \mathrm{ch}u \cos v + j\omega_c \mathrm{sh}u \sin v - \omega_0;$$

$$\cos v = \pm\frac{1}{\mathrm{ch}(u - u_0)}; \ \sin v = \pm\frac{\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)};$$

$$\omega = \omega_c \mathrm{ch}u \frac{1}{\mathrm{ch}(u - u_0)} + j\omega_c \mathrm{sh}u \frac{\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)} - \omega_0;$$

$$\omega = \omega_c \frac{\mathrm{ch}u + j\mathrm{sh}u\,\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)} - \omega_0.$$

Найдем $d\omega$:

$$\frac{d\omega}{du} = \omega'; \ d\omega = \omega' du; \ .$$

Итак, на пути интегрирования имеют место равенства:

$$f(z) = R + jI =$$

$$= \frac{\omega_c t_0}{\mathrm{sh}u_0} \frac{\mathrm{sh}^2(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)} + j\left(\omega_0 t - \frac{\omega_c t_0}{\mathrm{sh}u_0}\right); \qquad (23)$$

$$\omega = \omega_c \frac{\mathrm{ch}u + j\mathrm{sh}u\,\mathrm{sh}(u - u_0)}{\mathrm{ch}(u - u_0)} - \omega_0; \qquad (24)$$

$$d\omega = \omega_c \frac{\mathrm{sh}u_0 + j\left[\mathrm{sh}u + \mathrm{ch}u\,\mathrm{sh}(u - u_0)\,\mathrm{ch}(u - u_0)\right]}{\mathrm{ch}^2(u - u_0)} du. \qquad (25)$$

В продолжении этой статьи будут рассмотрены искажения для различных видов огибающей − прямоугольной, косинусоидальной и других.

Литература: 1. *Pregla R.* Numerische Berechnung der Impulsverformung im Hohlleiter. A.E.U. 18. 1964. S.594-600. 2. *Чумаченко Н.А.* Распространение электромагнитных импульсов в Н-образном волноводе // Вестн. ХГУ. 1985. №273. С.49-51.

Поступила в редколлегию 21.10.99

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руженцев И.В.

Чумаченко Светлана Викторовна, инженер кафедры АПВТ ХТУРЭ. Научные интересы: методы решения внутренних и внешних граничных задач со сложными граничными условиями, теория электромагнитных полей во временной области. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.