СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПРЕБЫВАНИЯ КОНТРОЛИРУЕМОГО ПАРАМЕТРА ВНУТРИ НОРМЫ

А. Д. Болычевцев

Харьков

Один из показателей качественного течения технологического процесса — его среднее время непрерывного пребывания внутри нормы. Необходимо найти численную зависимость этого показателя от величины нормы и априорных вероятностных характеристик контролируемого процесса. Ниже приводится решение задачи для нормального стационарного случая. Полученный результат сопоставляется с допустимой длительностью шага опроса контролируемого объекта при контроле с измерением.

1. Формула для подсчета

На рис. 1 показан характерный кусок реализации контролируемого процесса $X(t)$. Вычисления среднего времени $\bar{\tau}$ непрерывного пребывания реализации внутри нормы можно вести в такой последовательности: а) подсчитать среднее время $\bar{T}$ пребывания процесса $X(t)$ на интервале 0, T в пределах нормы (интервал 0, T — произвольной длительности T); б) определить среднее число участков N непрерывного пребывания процесса $X(t)$ в пределах нормы на интервале 0, T; в) найти отношение результатов а) и б).

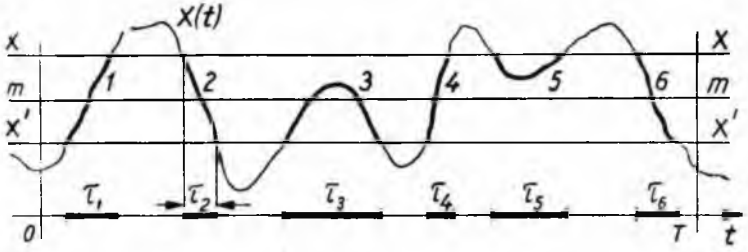


Рис. 1. Участок реализации контролируемого процесса длительности T:

x и x' — верхний и нижний граничные уровни, m — среднее значение процесса; 1, 2, ... и τ_1, τ_2, ... соответственно номера участков и длительностей непрерывного пребывания процесса в норме.

Чтобы не усложнять изложения, ограничимся общим решением для случая стационарных процессов с симметричным законом распределения и математическим ожиданием, расположенным по центру нормы. После этого конкретизируем результат для случая гауссова распределения.

Следуя намеченному плану, определим вначале время $\bar{T}$. Его можно рассматривать как разность между средним временем пребывания процесса выше нижней границы x' и средним временем пребывания процесса выше верхней границы x (на интервале 0, T). С учетом условия симметрии и выражения для среднего времени пребывания стационарного процесса выше заданного уровня [1, 2] это дает

$$\bar{T} = T\left[\int_{x'}^{\infty} f(y)\,dy - \int_{x}^{\infty} f(y)\,dy\right] = 2T\int_{m}^{x} f(y)\,dy, \qquad (1)$$

где $f(y)$ — одномерная плотность вероятности процесса,

m — его математическое ожидание.

Перейдем к определению величины N. Очевидно, эта величина равна сумме среднего числа пересечений верхней границы x снизу вверх и среднего числа пересечений нижней границы x' сверху вниз. Для процессов с симметричным законом распределения и математическим ожиданием, расположенным по центру нормы, обе составляющие этой суммы равны. Следовательно [1, 2],

$$N = 2T\int_{0}^{\infty} v f(x, v)\,dv, \qquad (2)$$

где $f(x, v)$ — совместная плотность распределения процесса и его производной в фиксированный момент времени.

Поделив (1) на (2), получим общее выражение искомого результата

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\int_{0}^{\infty} v f(x, v)\,dv}\int_{m}^{x} f(y)\,dy. \qquad (3)$$

Для нормального (гауссова) случая $f(y, v) = f(y) \cdot f(v)$, при этом

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}},$$
$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\omega\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\omega^2\sigma^2}}; \qquad (4)$$

σ и $\omega\sigma$ — среднеквадратичные отклонения процесса и его скорости соответственно.

Применив замену переменной $\frac{y-m}{\sqrt{2}\,\sigma} = t$, найдем интеграл числителя (3)

$$J_1 = \int_m^x f(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right), \qquad (5)$$

где Φ — символ интеграла вероятности; $\xi = \frac{x-m}{\sigma}$ — приведенная величина верхнего граничного уровня (ее удвоенное значение 2ξ дает приведенную норму контролируемого процесса $X(t)$).

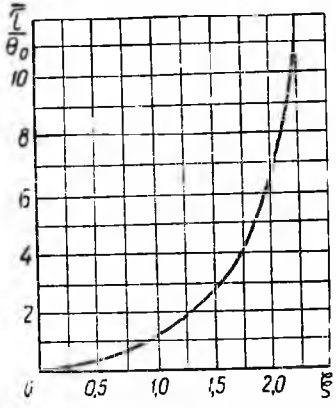


Рис. 2. Зависимость среднего времени $\bar{\tau}$ непрерывного пребывания процесса в пределах нормы от величины приведенного граничного уровня ξ (θ_0 — средняя длительность выбросов за нулевой уровень).

С помощью замены $\frac{v^2}{2\omega^2\sigma^2} = t^2$ вычисление знаменателя (3) сводится к интегрированию показательной функции. В результате

$$J_2 = \int_0^\infty v f(x, v)\,dv = f(x) \int_0^\infty v f(v)\,dv = \frac{\omega}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \qquad (6)$$

Таким образом, среднее время непрерывного пребывания нормального стационарного процесса $X(t)$ внутри нормы определяется зависимостью

$$\bar{\tau} = \frac{\pi}{\omega} e^{\frac{\xi^2}{2}} \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right). \qquad (7)$$

Коэффициент $\frac{\pi}{\omega}$ представляет собой среднюю длительность выбросов за нулевой уровень. Обозначим его через $\theta_0 \left(\theta_0 = \frac{\pi}{\omega}\right)$.

На рис. 2 показан график функции (7) в относительных единицах $\frac{\bar{\tau}}{\theta_0}$. При малых величинах ξ (меньших единицы) среднее время непрерывного пребывания процесса в пределах нормы растет примерно линейно с ростом ширины нормы*. В дальнейшем наблюдается быстрое нарастание времение $\bar{\tau}$. Так, если в точке $\xi = 1$ $\bar{\tau}$ примерно равно $\theta_0 \left(\frac{\bar{\tau}}{\theta_0} = 1{,}15\right)$, то уже при $\xi = 2$ это отношение $\frac{\bar{\tau}}{\theta_0}$ равно 7,4, а при $\xi = 3$ $\frac{\bar{\tau}}{\theta_0} = 90$.

* Начальный участок функции (7) хорошо аппроксимируется зависимостью

$$\bar{\tau} = 0{,}8\,\xi\left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right)\theta_0.$$

Следовательно, в среднем на каждые 100 полных колебаний процесса около его математического ожидания появляется примерно 175 выбросов за пределы нормы при $\xi = 1$, 27 выбросов при $\xi = 2$ и лишь два выброса при $\xi = 3$ и т. д. Отсюда вытекает, что доля допущенного брака быстро убывает с ростом приведенной нормы контролируемого процесса. При достаточно больших ее величинах удовлетворительное течение процесса оказывается возможным в отсутствии контрольных приборов. Ценность контроля тем выше, чем уже приведенная норма.

2. Контроль с измерением. Сопоставление результатов

Допустимый шаг дискретного контроля с измерением находится, согласно зависимости

$$\tau_0 = \frac{\xi - \zeta}{\sqrt{2}\,\omega h_д}, \tag{8}$$

где ζ — результат измерения в момент предыдущей контрольной операции, а $h_д$ определяется из условия

$$1 - \Phi(h_д) = P_д, \tag{9}$$

$P_д$ — допустимая вероятность выброса процесса за пределы нормы на интервале контроля;

$\Phi(h_д)$ — интеграл вероятности.

Максимальный шаг контроля с измерением соответствует значению $\xi = 0$ и, согласно 8,

$$\tau_{0m} = \frac{\xi}{\sqrt{2}\,\omega h_д}. \tag{10}$$

Среднее значение шага контроля с измерением при малых величинах ξ близко к $\frac{\tau_{0m}}{2}$, а вплоть до значений $\xi = 2$ хорошо аппроксимируется зависимостью

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_{0m}}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{12}\right). \tag{11}$$

Сравним средний шаг контроля $\bar{\tau}_0$ со средней длительностью $\bar{\tau}$ непрерывного пребывания контролируемого процесса в пределах нормы при малых ξ. Разложив (7) в степенной ряд и сохранив первый значащий член, получим

$$\bar{\tau} = \sqrt{2\pi}\,\frac{\xi}{\omega}. \tag{12}$$

Аналогично для величины $\bar{\tau}_0$

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}\,h_д} \cdot \frac{\xi}{\omega}, \tag{13}$$

поэтому

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_0} = 4\sqrt{\pi}\,h_д. \tag{14}$$

Величина $h_д$ зависит от допустимой вероятности $P_д$ отклонения процесса от нормы на интервале контроля, однако ее относительные изменения по сравнению с изменениями $P_д$ весьма незначительны. Так, при изменении $P_д$ в пределах от 10^{-3} до 10^{-6} величина $h_д$ остается в интервале 2,3—3,4. Отсюда следует, что в широком интервале изменения достоверности контроля средний шаг контроля с измерением должен быть в 15—25 раз меньше среднего времени непрерывного пребывания

контролируемого процесса внутри нормы. Эту оценку удобно использовать при ориентировочном определении требований к скоростным данным системы контроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1968.
2. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. ч. I. Изд-во «Советское радио», 1969.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ФЛОТАЦИИ

В. И. Салыга

Харьков

Интенсификация основных технологических процессов на обогатительных фабриках, повышение производительности оборудования и сокращение потерь угля в отходах обогащения неразрывно связаны с внедрением средств автоматического контроля и управления. Особое значение придается флотации углей, как наиболее эффективному способу обогащения каменноугольной мелочи.

Работы по автоматизации флотопроцесса в основном посвящены разработке и внедрению локальных систем контроля и регулирования таких параметров, как расход и плотность пульпы и расход реагентов. Однако эти системы не учитывают связей, при помощи которых параметры соединяются между собой через регулируемый объект. Такую автоматизацию можно считать частичной, так как она не исключает взаимного влияния регулируемых величин. Оператор, руководствуясь часто интуитивными оценками, пытается управлять процессом, поддерживая показатели входных параметров в заданном диапазоне, несмотря на систематическое смещение внешних факторов. Этим в какой-то мере можно объяснить значительные дисперсии выходных показателей процесса [1].

Исследования математического описания процесса флотации углей как управляемого объекта и развитие теории оптимальных автоматических систем позволяют впервые поставить задачу синтеза оптимального управления флотопроцессом. Промышленный флотопроцесс представляет собой сложную многомерную систему. Своеобразность постановки задачи оптимального управления обусловлена некоторыми особенностями, характеризующими процесс флотации углей. Главными из них являются многофакторность, наличие на входе и выходе объекта неконтролируемых параметров, случайный характер основных воздействий, нелинейные зависимости между параметрами, значительные запаздывания по основным каналам управления, распределенность параметров и т. д.

Структурная схема системы автоматического управления, состоящей из управляемого объекта (ОУ) и управляющего устройства (УУ), в общем виде представлена на рисунке. Совокупность переменных или обобщенных координат, определяющих состояние системы управления процессом флотации угля, будем классифицировать следующим образом [1, 2].

1. Векторная переменная, определяющая показатели конечных продуктов флотопроцесса $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Совокупность X_i характеризует состояние выхода объекта, т. е. качество выходных продуктов: зольность концентрата ($A^c_к$, %) и хвостов ($A^c_{хв}$, %) на выходе i-й фло-