

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМБИНАЦИОННЫХ СУММАТОРОВ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО СЛОЖЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ СЛАГАЕМЫХ

В. Л. Белявский, Н. Я. Какурин, Ю. А. Василенко

Харьков

Решение любой математической задачи в электронных цифровых вычислительных машинах сводится к проведению арифметических и логических операций в определенной последовательности. Арифметическое устройство ЭВМ (АУ) представляет собой совокупность элементов, узлов и блоков, предназначенных для выполнения арифметических и логических операций над числами, которые выражены в принятой системе счисления и представлены в виде соответствующих кодов. Одним из основных блоков АУ является сумматор. Это объясняется тем, что операции вычитания, умножения и деления сводятся к операции сложения над определенными кодами чисел. По принципу действия сумматоры могут быть разделены на комбинационные и накапливающие. В данной работе рассматриваются комбинационные сумматоры, работающие в системе счисления, отличной от двоичной.

1. q -местный n -разрядный двоичный сумматор

Как известно [2], функция суммы и переноса трех слагаемых имеет вид

$$S_i = S_{1,3}^3(x_i, y_i, \Pi_{i-1}^i),$$

$$\Pi_i^{i+1} = S_{2,3}^3(x_i, y_i, \Pi_{i-1}^i);$$

S_i — функция суммы;

Π_i^{i+1} — функция переноса;

S_k^n — симметричная функция входных переменных.

Для случая четырех слагаемых таблица истинности функций суммы и переноса имеет вид

x_i	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
y_i	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
z_i	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
v_i	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
S_i	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
Π_i^{i+1}	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
Π_i^{i+2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Записывая значения функций суммы и переноса через симметричные функции, получаем

$$S_1 = S_{1,3}^4(x_1, y_1, z_1, v_1),$$

$$\Pi_1^2 = S_{2,4}^4(x_1, y_1, z_1, v_1),$$

$$\Pi_1^3 = S_4^4(x_1, y_1, z_1, v_1).$$
(*)

Следует отметить, что выражение (*) относится только к 1-му разряду сумматора, 2-й разряд зависит уже от пяти переменных (четыре слагаемых и перенос из первого разряда), 3-й разряд — уже от шести переменных.

q -й разряд сумматора также зависит от шести переменных. Значит, формулы суммы и переноса для q -го разряда имеют вид

$$\begin{aligned} S_q &= S_{1, 3, 5}^6(x_q, y_q, z_q, v_q, \Pi_{q-2}^q, \Pi_{q-1}^q), \\ \Pi_q^{q+1} &= S_{2, 3, 6}^5(x_q, y_q, z_q, v_q, \Pi_{q-2}^q, \Pi_{q-1}^q), \\ \Pi_q^{q+2} &= S_{4, 5, 6}^5(x_q, y_q, z_q, v_q, \Pi_{q-2}^q, \Pi_{q-1}^q). \end{aligned}$$

(**)

По индукции, общее выражение для функций суммы и переносов при сложении слагаемых запишется так:

$$f_{j, \eta}(x_1, \dots, x_{q+t}) = S_{2^{j-1}, 2^{j-1}+1, \dots, 2^{j-1} \pmod{2j}}^{q+t}(x_1, \dots, x_{q+t}),$$

где x_i — i -ое слагаемое ($i = 1, \dots, q$);

x_k — k -й перенос ($k = 1, \dots, t$), $t = [\log_2 q]$;

S_l^m — базовая симметричная функция n переменных ($l \leq m$);

f_j — выходная функция сумматора;

j — номер выхода сумматора ($j = 1, \dots, t$);

η — номер разряда сумматора ($\eta = 1, \dots, n$).

Пример 1: Построить выходные функции n -разрядного семиместного сумматора.

$$\begin{aligned} S_1 &= f_{1, 1} = S_{1 \pmod{2}}^7(x_1, \dots, x_7) = S_{1, 3, 5, 7}^7(x_1, \dots, x_7), \\ \Pi_1^2 &= f_{2, 1} = S_{2, 3 \pmod{7}}^7(x_1, \dots, x_7) = S_{2, 3, 6, 7}^7(x_1, \dots, x_7), \\ \Pi_1^3 &= f_{3, 1} = S_{4, 5, 6, 7 \pmod{8}}^7(x_1, \dots, x_7) = S_{4, 5, 6, 7}^7(x_1, \dots, x_7), \\ S_2 &= f_{1, 2} = S_{1 \pmod{2}}^{7+1}(x_1, \dots, x_8) = S_{1, 3, 5, 7}^8(x_1, \dots, x_8), \\ \Pi_2^3 &= f_{2, 2} = S_{2, 3 \pmod{4}}^{7+1}(x_1, \dots, x_8) = S_{2, 3, 6, 7}^8(x_1, \dots, x_8), \\ \Pi_2^4 &= f_{3, 2} = S_{4, 5, 6, 7 \pmod{8}}^{7+1}(x_1, \dots, x_8) = S_{4, 5, 6, 7}^8(x_1, \dots, x_8), \\ S_3 &= f_{1, 3} = S_{1 \pmod{2}}^{7+2}(x_1, \dots, x_9) = S_{1, 3, 5, 7, 9}^9(x_1, \dots, x_9), \\ \Pi_3^4 &= f_{2, 3} = S_{2, 3 \pmod{4}}^{7+2}(x_1, \dots, x_9) = S_{2, 3, 6, 7}^9(x_1, \dots, x_9), \\ \Pi_3^5 &= f_{3, 3} = S_{4, 5, 6, 7 \pmod{8}}^{7+2}(x_1, \dots, x_9) = S_{4, 5, 6, 7}^9(x_1, \dots, x_9). \end{aligned}$$

Формулы для 3-го разряда сумматора справедливы для любого разряда сумматора. В качестве физического элемента, реализующего схемы сумматора, выбирается пороговый элемент на криотронах. Число криотронов, необходимое для отдельных разрядов сумматора:

$$N_I = 56 + 56 = 112, N_{II} = N_I = 112, N_{III} = 90 + 90 = 180.$$

Общее число криотронов

$$N = [(n - 2) 180 + 224].$$

Аналогичный результат можно получить другим способом. Полусумматор, имеющий два входа и два выхода, реализует формулы:

$$S = S_1^2(x_1, x_2), \Pi = S_2^2(x_1, x_2).$$

Построим матрицу, состоящую из таких элементов. На первую ее строку подаются входные переменные $x_1, \dots, x_q$.

Для наглядности рассмотрим сумматор примера 1 (рис. 1). Выход каждого элемента матрицы легко можно определить итеративно по формулам одного элемента. Число элементов матрицы находится по формуле

$$N_s = m(q-1) - (2^{i-1} - 1) \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad m = \lfloor \log_2 q \rfloor,$$

где N_s — число элементов матрицы;

q — число суммируемых переменных.

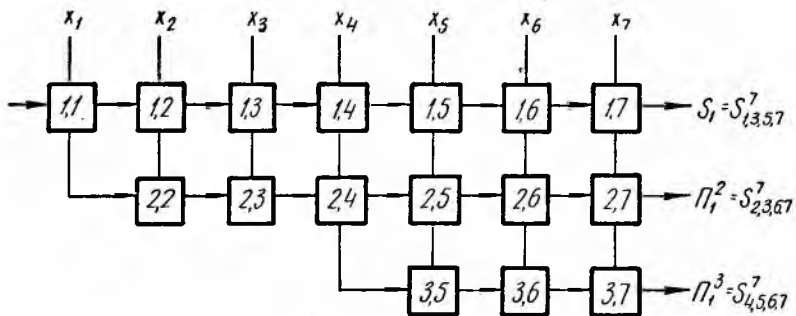


Рис. 1.

Общее число криотронов матрицы

$$N = 6N_s.$$

2. Сумматор в логике с основанием «-2»

Число в системе счисления с отрицательным основанием выражается формулой

$$N = \alpha_0 (-S)^0 + \alpha_1 (-S)^1 + \dots + \alpha_{k-2} (-S)^{k-2} + \alpha_{k-1} (-S)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i (-S)^i,$$

где N — число;

S — основание системы счисления;

α_i — значение i -го разряда числа $\alpha = 0, 1, \dots, (S-1)$;

k — число разрядов для изображения числа в системе счисления.

Ясно, что числа (цифра), стоящие на нечетных местах (i — нечетный индекс), — положительные; числа, стоящие на четных местах, — отрицательные. Поэтому для записи и работы с отрицательными числами не требуется перевода чисел в дополнительный или обратный коды.

Действия в арифметике с основанием « $-S$ » [1] выполняются, как и в обычной арифметике с основанием « S », но учет переносов из разряда в разряд производится двойственным образом, т. е. перенос вычитается (складывается) при сложении (вычитании) от сумм (разностей) слагаемых соответственно.

Процедура перевода чисел из системы счисления с основанием « S » в систему счисления с основанием « $-S$ » описана в [1].

Пример 1. Перевести числа в систему счисления с основанием « -10 ».

$$\begin{aligned} 329_{10} &= 309_{10} - 020_{10} = 489_{-10}, \\ -742_{10} &= 040_{10} - 702_{10} = 1358_{-10}. \end{aligned}$$

Пример 2. Перевести числа в систему счисления с основанием «10».

$$12345_{-10} = 10305 - 02040 = 8265_{10},$$

$$2345_{-10} = -2040 + 305 = -1735_{10}.$$

Пример 3. Сложить два числа в системе счисления «-10».

$$1237_{-10} - 823_{10} \quad 1237_{-10} = -823_{10},$$

$$+ 4859_{-10} + -3241_{10} \quad 4859_{-10} = -3241_{10},$$

$$4076_{-10} - 4064_{10} \quad 4076_{-10} = -4064_{10}.$$

Операция сложения в логике с основанием «-2» производится аналогичным образом. Поэтому таблица истинности для функции суммы двух слагаемых имеет вид

1-й разряд сумматора

x_1	y_1	S_1	Π_1^2
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$S_1 = S_1^2(x_1, y_1),$$

$$\Pi_1^2 = S_2^2(x_1, y_1).$$

Здесь x, y — первые разряды слагаемых;

S — функция суммы;

Π_k^l — перенос из l -го разряда в k -й разряд.

2-й разряд сумматора

x_2	y_2	Π_1^2	S_2	Π_2^3	Π_2^4
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

$$S_2 = S_{1,3}^3(x_2, y_2, \Pi_1^2),$$

$$\Pi_2^3 = \bar{x}_2 \bar{y}_2 \Pi_1^2 \vee x_2 y_2 \bar{\Pi}_1^2,$$

$$\Pi_2^4 = x_2 y_2 \bar{\Pi}_1^2.$$

i -й разряд сумматора

x_i	y_i	Π_{i-2}^i	Π_{i-1}^i	S_i	Π_i^{i+1}	Π_i^{i+2}
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

$$S_i = S_{1,3}^4(x_i, y_i, \Pi_{i-2}^i, \Pi_{i-1}^i),$$

$$N = 20.$$

$$\begin{aligned} \Pi_i^{i+1} = & x_i y_i \Pi_{i-2}^i \bar{\Pi}_{i-1}^i \vee x_i y_i \bar{\Pi}_{i-2}^i \Pi_{i-1}^i \vee x_i \bar{y}_i \Pi_{i-2}^i \Pi_{i-1}^i \vee \\ & \vee \bar{x}_i y_i \Pi_{i-2}^i \Pi_{i-1}^i \vee \bar{x}_i \bar{y}_i \Pi_{i-2}^i \Pi_{i-1}^i \vee \bar{x}_i \bar{y}_i \bar{\Pi}_{i-2}^i \bar{\Pi}_{i-1}^i, \end{aligned}$$

$$\Pi_i^{i+2} = \bar{x}_i y_i \Pi_{i-2}^i \bar{\Pi}_{i-1}^i \vee \bar{x}_i y_i \Pi_{i-2}^i \Pi_{i-1}^i \vee x_i \bar{y}_i \Pi_{i-2}^i \bar{\Pi}_{i-1}^i \vee x_i \bar{y}_i \bar{\Pi}_{i-2}^i \bar{\Pi}_{i-1}^i.$$

Число криотронов

$$N = [(n-2) 124 + 36].$$

3. Сумматор по mod m

Рассмотрим следующие возможные случаи суммирования по mod m :

а) $m = 3$, $q = 2$;

б) m , $q = 2$;

в) m , q .

а) Таблица истинности суммы по mod 3 имеет вид

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Раскладывая выходную функцию по компонентам, получаем

$$f^0(x, y) = x^0 y^0 \vee x^1 y^1 \vee x^2 y^1,$$

$$f^1(x, y) = x^0 y^1 \vee x^1 y^0 \vee x^2 y^2,$$

$$f^2(x, y) = x^2 y^0 \vee x^1 y^1 \vee x^0 y^2,$$

$$x_i^j = \begin{cases} j & x = j \\ 0 & x \neq j. \end{cases}$$

Введем следующие допущения.

Определение 1. m -значная переменная x_i , принимающая значение j ($j = 1, 2, \dots, (m-1)$), имеет вес, равный j .

Тогда очевидно, что функция суммы по компонентам выражается так:

$$f^0(x, y) = S_{0,3}^{2-2}(x, y) = S_{0(\bmod 3)}^{2-2}(x, y),$$

$$f^1(x, y) = S_{1,4}^{2-2}(x, y) = S_{1(\bmod 3)}^{2-2}(x, y),$$

$$f^2(x, y) = S_{2,2}^{2-2}(x, y) = S_{2(\bmod 3)}^{2-2}(x, y),$$

$$f^0(x, y) \sim 0,3,$$

$$f^1(x, y) \sim 1,4,$$

$$f^2(x, y) \sim 2.$$

Здесь S_k^n -функция реализуется суммой весов, равной n .

Криотронный пороговый элемент (КПЭ), реализующий данную функцию, показан на рис. 2.

б) Таблица истинности функции суммы по mod m имеет вид

	0	1	2	...	$m-1$
0	0	1	2	...	$m-1$
1	1	2	3	...	0
2	2	3	...	...	1
$m-1$	$m-1$	0	...	...	$m-2$

Раскладывая выходные функции по компонентам, получаем

$$f^0(x, y) = x^0 y^0 \vee x^1 y^{m-1} \vee, \dots, \vee x^{m-1} y^1,$$

$$f^1(x, y) = x^0 y^1 \vee x^1 y^0 \vee, \dots, \vee x^{m-1} y^2,$$

.....

$$f^{m-1}(x, y) = x^0 y^{m-1} \vee x^1 y^{m-2} \vee, \dots, \vee x^{m-1} y^0.$$

Преобразуя полученную систему функций через симметричные функции, находим

$$f^0(x, y) = S_{0m}^{(m-1)2}(x, y) = S_{0(mod m)}^{(m-1)2}(x, y),$$

$$f^1(x, y) = S_{1, m+1}^{(m-1)2}(x, y) = S_{1(mod m)}^{(m-1)2}(x, y),$$

.....

$$f^{m-2}(x, y) = S_{m-2, 2(m-1)}^{(m-1)2}(x, y) =$$

$$= S_{m-2(mod m)}^{(m-1)2}(x, y),$$

$$f^{m-1}(x, y) = S_{m-1}^{(m-1)2}(x, y) = S_{m-1(mod m)}^{(m-1)2}(x, y).$$

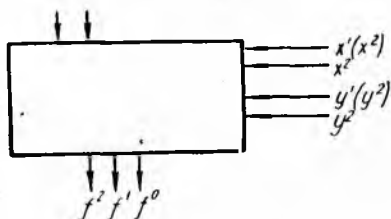


Рис. 2.

КПЭ, реализующий данную функцию, приведен на рис. 3.

в) Таблица истинности при суммировании q m -значных чисел выглядит громоздко, поэтому перейдем непосредственно к аналитической записи компонент выходной функции суммы по $\text{mod } m$.

$$f^0(x_1, \dots, x_q) = S_{0(mod m)}^{(m-1)q}(x_1, \dots, x_q),$$

$$f^1(x_1, \dots, x_q) = S_{1(mod m)}^{(m-1)q}(x_1, \dots, x_q),$$

.....

$$f^{m-1}(x_1, \dots, x_q) = S_{m-1(mod m)}^{(m-1)q}(x_1, \dots, x_q).$$

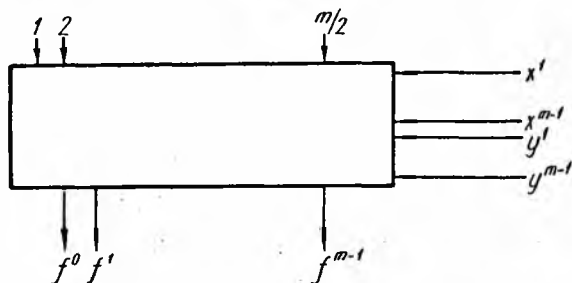


Рис. 3.

Общее число криотронов $N = (m-1)q[(m-1)q + 1]$.

4. Сумматор в СОК (система остаточных классов)

СОК является непозиционной системой счисления, это имеет свои преимущества и недостатки [4]. Основой работы сумматора в СОК является работа сумматора по $\text{mod } m$. Поэтому все формулы предыдущего раздела полностью описывают работу сумматора СОК.

Пример 4. Построить сумматор на четыре разряда, по три слагаемых в каждом $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$.

Общее число криотронов по разрядам:

$$N_1 = 12; N_2 = 42; N_3 = 156; N_4 = 342; N = 552 \text{ криотрона.}$$

5. Сумматор в m -значной логике

Сумматор в m -значной логике содержит два выхода: суммы и переноса. Функция суммы по $\text{mod } m$ описывается формулами п. 3. Что касается функции переноса, то рассмотрим следующие случаи:

1) $q = 2$. Таблица истинности имеет вид

	0	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	$m-1$
0	0	0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	0
1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$m-1$	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1

Функции переноса, записанные в форме симметричных функций

$$f^0 = \Pi(\bar{x}_1, x_2) = S_{0, \dots, m-1}^{(m-1)2}(x_1, x_2),$$

$$f^1 = \Pi_1^2(x_1, x_2) = S_{m, \dots, 2(m-1)}^{(m-1)2}(x_1, x_2).$$

2) Таблица истинности

$$f^0 = S_{0, \dots, m-1}^{(m-1)3}(x_1, x_2, x_3),$$

$$f^1 = S_{m, \dots, 2(m-1)}^{(m-1)3}(x_1, x_2, x_3) = \Pi_2^3(x_1, x_2, x_3),$$

$$f^2 = S_{2m, \dots, 3(m-1)}^{(m-1)3}(x_1, x_2, x_3) = \Pi_2^4(x_1, x_2, x_3).$$

3) Функции переноса

$$f^0 = S_{0, \dots, m-1}^{(m-1)q}(x_1, \dots, x_q),$$

$$f^1 = S_{m, \dots, 2(m-1)}^{(m-1)q}(x_1, \dots, x_q),$$

$$f^{m-1} = S_{m(q-1), \dots, (m-1)q}^{(m-1)q}(x_1, \dots, x_q).$$

Общее число криотронов рассчитывается по формуле

$$N = (m-1)q[(m-1)q + 1].$$

Обычный параллельный сумматор, имеющий n разрядов и два слагаемых, требует всего лишь $N = 12n$ криотронов.

На основании сказанного выше можно сделать следующие выводы:

1. Перечисленные типы сумматоров имеют некоторое преимущество перед обычным n -разрядным параллельным сумматором во времени выполнения операции сложения. Действительно, при работе в логике с отрицательным основанием нет необходимости представлять отрицательные числа в обратном или дополнительном кодах и производить операцию сложения с циклическим переносом (в обратном коде).

2. В СОК не существует переносов, так как СОК — непозиционная система счисления. Сложение нескольких ($q > 2$) чисел в любой логике не нуждается в пояснении.

3. Известно [5], что средняя длина переноса в n -разрядном параллельном сумматоре определяется выражением $L = \log_2 n$. Следовательно,

при суммировании k n -разрядных чисел общее время переноса $L' = (k - 1) \log_2 n$ (при одновременном суммировании двух чисел). При одновременном суммировании q чисел время может быть уменьшено до $\left\lfloor \frac{k-1}{q-1} \right\rfloor$.

В данной работе нет возможности провести количественный анализ соотношений увеличения быстродействия и аппаратных затрат, однако качественное рассмотрение типов сумматоров свидетельствует об их преимуществе перед обычными параллельными сумматорами.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Regt. Negative radix arithmetic. Part 1. Introduction to negative radix number systems «Comput Design», 1967, 6, № 5.
 2. В. М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.
 3. Сб. «Многозначные элементы и структуры». Изд-во «Сов. радио», 1966.
 4. А. Свобода. Арифметические операции в СОК. «Кибернетический сборник», 1964, № 8.
-