ДК 510.62

Э. ИЦКОВ, Д. Э. СИТНИКОВ, С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ПРЕДИКАТЫ n-МЕРНОЙ ЛИНЕЙНОСТИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

При моделировании работы органов чувств по методу нуль-
гана [1, с. 66] используются свойства различных бинарных пре-
катов. В настоящей статье описываются свойства так называ-
ых предикатов n-мерной линейности. Пусть дано произволь-
е множество A. Предикатом эквивалентности на множестве A
зовем любую функцию $E\ (x,\ y)$, определенную на декартовом

произведении $A \times A$, принимающую значения из множества и обладающую следующими свойствами: 1) $E(x, x)=1$ для бого $x \in A$ — рефлексивность; 2) если $E(x, y)=1$, то $E(y, x)$ для любых $x, y \in A$ — симметричность; 3) если $E(x, y)=E(y, z)$ $=1$, то $E(x, z)=1$ для любых $x, y, z \in A$ — транзитивность.

Пусть A — вещественное евклидово пространство размерно m $(m<\infty)$. Скалярное произведение векторов x, y из A бу обозначать так: $x \circ y$. Введем норму в пространстве $A \|x\|$ $=\sqrt{x \circ x}$. Линейным функционалом на A назовем любой фу ционал $f: A \rightarrow R$, аддитивный и непрерывный. Предикатом n-м ной линейности $(n<m)$ назовем любой предикат E, заданн на A, который может быть представлен в виде

$$E(x, y)=D(Fx, Fy).$$

Здесь D — предикат равенства; $Fx=(x \circ a_1, x \circ a_2, \ldots, x \circ a$ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ — система линейно независимых векторов из A.

Предикат E назовем аддитивным, если из $E(x, y)=E(u, v)=$ следует $E(x+u, y+v)=1$ для любых x, y, u, v из A. Пре кат E назовем n-мерным, если существует система вектор $\{l_i\}_{i=1}^{n}$ из A такая, что для каждого $x \in A$ найдется единстве ный набор вещественных чисел $(\alpha_1(x) \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$, удовл воряющий условию

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) l_i\right)=1.$$

Если функционалы $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ непрерывны в A предикат E назовем непрерывным.

Теперь сформулируем и докажем теорему об условиях сущ ствования предиката n-мерной линейности.

Теорема 1. Для того чтобы предикат E был предикатом мерной линейности, необходимо и достаточно, чтобы он был ре флексивным, симметричным, транзитивным, аддитивным, n-мер ным и непрерывным.

Доказательство *Необходимость.* Пусть x_1, x_2, y_1, $y_2 \in$ таковы, что $E(x_1, y_1)=E(x_2, y_2)=1$. Это означает, что пр любом $i=1, 2, \ldots, n$, $x_1 \circ a_i=y_1 \circ a_i$, $x_2 \circ a_i=y_2 \circ a_i$. Складывая левые и правые части этих равенств, получаем $(x_1+x_2) \circ$ $\circ a_i=(y_1+y_2) \circ a_i$, что означает $E(x_1+x_2, y_1+y_2)=1$. Аддитивность предиката E доказана.

Докажем n-мерность предиката E. Примем в качестве векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$, фигурирующих в условиях n-мерности, соответственно векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, образующие ортонормированный базис линейной оболочки векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Требование n-мерности предиката E теперь заключается в том, чтоб уравнение

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)=1$$

было однозначно разрешимо относительно набора чисел (α_1, α_2, ..., α_n) при каждом фиксированном $x \in A$. Данное уравнение эквивалентно системе

$$x \circ a_k = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \circ a_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Но

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} e_i,$$

где β_{ki} — координаты вектора a_k в базисе $\{e_i\}_{i=1}^{n}$. Значит,

$$x \circ a_k = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \circ \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} \alpha_i \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

или

$$\begin{aligned} \beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \ldots + \beta_{1n}\alpha_n &= x \circ \alpha_1; \\ \beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2 + \ldots + \beta_{2n}\alpha_n &= x \circ \alpha_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1}\alpha_1 + \beta_{n2}\alpha_2 + \ldots + \beta_n^n\alpha_n &= x \circ \alpha_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Так как строки матрицы системы (3) линейно независимы (в силу линейной независимости векторов $\{a_k\}_{k=1}^{n}$), система имеет при каждом $x \in A$ единственное решение, что доказывает n-мерность предиката E.

В соответствии с (3) числа α_i представляют собой линейные комбинации чисел $x \circ a_1$, $x \circ a_2$, ..., $x \circ a_n$, непрерывно зависящих от x. Значит, функционалы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ непрерывны. Непрерывность предиката E доказана. Рефлексивность, симметричность и транзитивность очевидны. Необходимость доказана.

Достаточность. Переходим к доказательству достаточности, т. е. к установлению того факта, что каждый аддитивный, n-мерный и непрерывный предикат эквивалентности E на A является предикатом n-мерной линейности. Для этого докажем сначала, что функционалы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ линейны.

Для любых x, $y \in A$ в силу n-мерности предиката E имеем

$$E\left(x,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, l_i\right) = 1 \quad (4), \quad E\left(y,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)\, l_i\right) = 1, \qquad (5)$$

$$E\left(x + y,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x + y)\, l_i\right) = 1. \qquad (6)$$

По свойству аддитивности предиката E из (4) и (5) выводим

$$E\left(x + y,\ \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(x) + \alpha_i(y))\, l_i\right) = 1. \qquad (7)$$

В силу n-мерности предиката E множители при векторах l_i в (6) и (7) совпадают, поэтому $\alpha_i(x + y) = \alpha_i(x) + \alpha_i(y)$ $(i = 1,$

2, ..., n). Так как предикат E непрерывен, непрерывны и функционалы $\alpha_i(x)$. Таким образом, функционалы $\alpha_i(x)$ аддитивны и непрерывны, т. е. линейны.

Любой линейный функционал $\alpha(x)$ на A может быть представлен в виде $\alpha(x) = x \circ d$ [2], где d — некоторый вектор из A. Значит, найдутся векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ такие, что

$$\alpha_1(x) = x \circ a_1, \quad \alpha_2(x) = x \circ a_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n(x) = x \circ a_n. \tag{8}$$

Далее докажем, что равенство $E(x, y) = 1$ и система равенств $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равносильны. Предположим, что $E(x, y) = 1$, тогда из (4) и (5), учитывая симметричность и транзитивность предиката E, выводим

$$E\left(y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) l_i\right) = 1.$$

Учитывая равенство (5) и используя свойство единственности значений коэффициентов при всех l_i, находим $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Обратно, если $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) l_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) l_i.$$

Отсюда, а также из (4) и (5), пользуясь симметричностью и транзитивностью предиката E, получаем $E(x, y) = 1$.

Докажем теперь линейную независимость векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. С этой целью установим сначала, что функционалы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ линейно независимы, т. е. что уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i(x) = 0 \tag{9}$$

выполняется для всех x лишь в том случае, когда все числа γ_i равны нулю. Если равенство (9) выполняется для любых $x \in A$, то оно должно быть справедливым и для $x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i$. В силу рефлексивности предиката E имеем

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i\right) = 1.$$

Сравнивая последнее равенство с (4) и учитывая единственность числовых множителей при всех l_i (по n-мерности предиката E), получаем $\alpha_i(x) = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Подставив значения функционалов $\alpha_i(x)$ в (9), приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 = 0,$$

из которого следует, что $\gamma_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, что означает линейную независимость функционалов $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$. Рассмотрим теперь уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \circ x = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \circ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i(x) = 0.$$

В силу линейной независимости функционалов $\alpha_i(x)$ все λ_i равны нулю. Значит, векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы. Теперь, учитывая (8), можно утверждать, что предикат E может быть представлен в виде (1), т. е. является предикатом n-мерной линейности. Теорема доказана.

Ниже доказывается, что среди свойств предиката E, указанных в теореме 1, имеются лишние свойства.

1) Из симметричности, транзитивности и n-мерности предиката вытекает его рефлексивность.

Действительно, из n-мерности предиката E вытекает, что для любого $x \in A$ найдется вектор $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) l_i$ такой, что $E(x, y) = 1$. В силу симметричности $E(y, x) = 1$. В силу транзитивности $E(x, x) = 1$.

2) Из рефлексивности, аддитивности и n-мерности предиката E вытекает его симметричность.

Действительно, из аддитивности и n-мерности предиката E вытекает аддитивность функционалов $\alpha_i(x)$ (см. доказательство теоремы 1). Пусть $E(x, y) = 1$. По свойству рефлексивности имеем: $E(-y, -y) = 1$. В силу аддитивности $E(x-y, 0) = 1$. Из свойства n-мерности следует

$$E\left(x-y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x-y) l_i\right) = 1. \tag{10}$$

Значения $\alpha_1(x-y) = \alpha_2(x-y) = \ldots = \alpha_n(x-y) = 0$ обращают уравнение (10) в тождество. В силу единственности этих значений и аддитивности функционалов α_i имеем

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Из аддитивности функционалов α_i и из равенств (11) вытекает

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y-x) l_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(y) - \alpha_i(x)) l_i = 0.$$

Таким образом, $E(y-x, 0) = 1$. По свойству рефлексивности $E(x, x) = 1$. Наконец, в силу аддитивности $E(y, x) = 1$.

3) Из рефлексивности и аддитивности предиката E вытекает его транзитивность.

Действительно, пусть $E(x, y)=E(y, z)=1$. Тогда в силу аддитивности, $E(x+y, y+z)=1$. В силу рефлексивности $E(-y, -y)=1$. Окончательно, по свойству аддитивности $E(x, z)=1$.

Из теоремы 1 и трех только что доказанных утверждений вытекают два следствия.

Следствие 1. *Для того чтобы бинарный предикат, заданный на пространстве A, был предикатом n-мерной линейности, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами рефлексивности, аддитивности и непрерывности.*

Следствие 2. *Для того чтобы бинарный предикат, заданный на пространстве A, был предикатом n-мерной линейности, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами симметричности, транзитивности, n-мерности и непрерывности.*

Можно ли еще сократить найденные системы характеристических признаков предиката n-мерной линейности? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. *Системы свойств предиката E, фигурирующие в следствиях 1 и 2, несократимы.*

Доказательство. Для доказательства независимости каждого свойства от остальных достаточно привести пример предиката E, для которого это свойство не выполняется, а остальные свойства выполняются.

В дальнейшем будем полагать, что $\{l_k\}_{k=1}^{m}$ — ортонормированный базис пространства A; x_i — координаты вектора x в этом базисе.

Лемма 1. *Из симметричности, рефлексивности, транзитивности и аддитивности предиката E не следует его n-мерность.*

Пусть $E(x, y)=D(x, y)$, где D — предикат равенства. Рефлексивность, симметричность, транзитивность и аддитивность E очевидны. Рассмотрим произвольные векторы пространства A $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и их линейную оболочку. Фиксируем вектор x вне этой линейной оболочки, что всегда возможно, так как размерность A больше n. Тогда для любого $y=\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_i$

$$E(x, y)=D\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i\right)=0.$$

Значит, предикат E не n-мерен. Лемма доказана.

Лемма 2. *Из рефлексивности, симметричности, транзитивности и непрерывности предиката E не вытекает его аддитивность.*

Пусть $E(x, y)=D((\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))), (\alpha_1(y), \alpha_2(y), \ldots, \alpha_n(y)))$, где $\alpha_i(x)=x_i(1+x_{\circ}l_{n+1})$. Функционалы $\alpha_i(x)$ неаддитивны. В этом можно убедиться, положив $x=\sum\limits_{i=1}^{n} l_i$. Тогда $\alpha_i(x+x) \neq$

$\neq \alpha_i(x)+\alpha_i(x)$. Значит, предикат E неаддитивен. Очевидно, этот предикат рефлексивен, симметричен и транзитивен. Кроме того, $\alpha_i(\Sigma\alpha_k(x)l_k) = \alpha_i(x)(1+0) = \alpha_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Значит, $E\left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, l_k\right) = 1$. Из последнего равенства, а также из определения функционалов $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\ldots$, $\alpha_n(x)$ вытекают n-мерность и непрерывность предиката E. Лемма доказана.

Лемма 3. *Из рефлексивности, симметричности, транзитивности, аддитивности и n-мерности предиката E не вытекает его непрерывность.*

Положим $E(x,\ y) = D((\alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ \ldots,\ \alpha_n(x)),\ (\alpha_1(y),\ \alpha_2(y),\ \ldots,\ \alpha_n(y)))$, где $\alpha_i(x) = x_i + f(x_{n+1})$; f — аддитивная, но не непрерывная функция [3]. Построение такой функции можно осуществить, используя базис Хамеля в линейном пространстве вещественных чисел над полем рациональных чисел. Этот процесс приводит к множеству $s = \{r_\alpha\}$ действительных чисел r_α таких, что всякое действительное число x является единственной линейной комбинацией конечного числа элементов из s с рациональными коэффициентами p_α: $x = p_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + \ldots + p_{\alpha_k} r_{\alpha_k}$. Функцию f можно определить так: $f(x) = p_{\alpha_1} + \ldots + p_{\alpha_k}$, поскольку представление числа x в виде линейной комбинации единственно. Аддитивность f следует непосредственно из ее определения, а тот факт, что f не является непрерывной, вытекает из того, что она не обладает свойством Коши. Очевидно, предикат E рефлексивен, симметричен и транзитивен. Он также аддитивен в силу того, что функционалы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\ldots$, $\alpha_n(x)$ аддитивны.

Для любой аддитивной функции f выполняется равенство $f(0) = 0$ $(f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = f(0))$:

$$\alpha_i\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, l_k\right) = \alpha_i(x) + f(0) = \alpha_i(x).$$

Значит, $E\left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, l_k\right) = 1$. Из последнего равенства, а также из определения функционалов $\alpha_i(x)$ следует n-мерность E. Но $\alpha_i(x)$ не непрерывны. Значит, предикат E не непрерывен. Лемма доказана.

Лемма 4. *Из транзитивности, аддитивности, n-мерности и непрерывности предиката E не вытекает его симметричность.*

Положим $E(x,\ y) = D(F(x),\ G(y))$, где $F(x) = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ 0)$, $G(x) = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1})$. Возьмем x и y такие, что $x_i = y_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $x_{n+1} \neq 0$, $y_{n+1} = 0$. Тогда $E(x,\ y) = 1$, $E(y,\ x) = 0$. Значит, предикат E несимметричен. Из того, что $E(x,\ y) = E(y,\ z) = 1$, следует, что $x_i = y_i = z_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $z_{n+1} = 0$. Значит, $E(x,\ z) = 1$, что говорит о транзитивности предиката E. Из того, что $E(x,\ y) = 1$, следует, что $x_i = y_i$ $(i =$

$= 1, 2, \ldots, n)$, $y_{n+1} = 0$. Из того, что $E(u, v) = 1$, следует, что $u_i = v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $v_{n+1} = 0$. Окончательно получаем $E(x + u, y + v) = 1$. Значит, предикат E аддитивен. Пусть $\alpha_i(x) = x_i$. Тогда $E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) l_i\right) = 1$. Из определения функционалов и последнего равенства следуют n-мерность и непрерывность предиката E. Лемма доказана.

Лемма 5. *Из симметричности, аддитивности, n-мерности и непрерывности предиката E не вытекает его транзитивность.*

Положим $E(x, y) = D(p(x), -p(y))$, где $p(x) = (x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)$. Очевидно, этот предикат симметричен, аддитивен, но не транзитивен. Положим $\alpha_i(x) = -x_i$. Тогда $E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) l_i\right) = 1$. Из определения функционалов $\alpha_i(x)$ и последнего равенства вытекают n-мерность и непрерывность предиката E. Лемма доказана.

Доказав эти пять лемм, мы тем самым доказали теорему 2.

Распространим полученные результаты на тот случай, когда пространство А является бесконечномерным вещественным евклидовым пространством. Очевидно, теорема 1 верна и в этом случае, так как ее доказательство нигде не опирается на тот факт, что пространство A конечномерно. Лемма 1 по этой же причине остается верной. Для доказательства справедливости лемм 2—5 (в случае бесконечномерного A) достаточно для каждой леммы рассмотреть предикат $\Pi(x, y) = E(px, py)$, где px, py — ортогональные проекции векторов x, y на m-мерное $(m > n)$ подпространство L пространства A; предикат E задан на L и обладает теми же свойствами, что и предикат E, фигурирующий в доказательствах этих лемм для случая конечномерного A. Итак, полученные результаты верны для пространства А любой размерности, большей n.

Наконец, рассмотрим случай, когда размерность A равна n. Теорема 1 верна и в этом случае. Но количество характеристических свойств значительно сокращается. Покажем, что из рефлексивности и n-мерности предиката E вытекают все остальные свойства. Действительно, в этом случае любые векторы x, y, из A представляют собой линейные комбинации некоторых базисных векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i.$$

Предположим, что $E(x, y) = E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i\right) = 1$. Тогда, учитывая рефлексивность E и единственность числовых множителей при векторах l_i, получаем: $y = x$. Из этого следует, что предикат E является предикатом равенства, а значит, обладает свойствами симметричности, транзитивности, аддитивности и непрерывности.

Из n-мерности не следует рефлексивность E. Для доказательства этого утверждения рассмотрим предикат $E(x, y)=$ $=D(x, -y)$. Очевидно, он является n-мерным и нерефлексивным. Из рефлексивности не следует n-мерности. Для доказательства достаточно положить $E(x, y)$ тождественно равным единице. Предикат E в этом случае рефлексивен и не n-мерен (так как существует бесконечно много наборов α_i таких, что

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i\right) = 1.$$

Список **литературы:** 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Начала теории интеллекта: Проблемы и перспективы.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3324—82.— 210 с. 2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.— 520 с. 3. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе.— М.: Мир, 1967.— 251 с.

Поступила в редколлегию 02.04.84.