

УДК 551.510

В. П. МИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук, *Е. В. ОБОЛЪЯНИНОВА*,
А. Д. ТЕВЯШЕВ, д-р техн. наук

**О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

Одним из способов косвенного измерения скорости ветра является вондирование атмосферы с помощью бистатических акустических локаторов. При работе многоканальных систем пространственно-вре-

менной обработки эхо-сигналов в таких локаторах входная информация рассматривается как многомерный случайный процесс. Однако физическая природа рассеивающих целей рассматривается упрощенно. Так, оценка скорости ветра производится на основе линейного эффекта Доплера при пренебрежении волновыми эффектами, объемом рассеивающей цели, неоднородностью среды вдоль канала распространения сигнала и рядом других факторов. Получать состоятельные и эффективные оценки скорости ветра при таком подходе практически невозможно. Необходим более полный учет физических особенностей рассеивающей цели, т. е. разработка достаточно адекватной физико-математической модели процесса рассеяния акустических волн в турбулентной атмосфере.

Теория взаимодействия акустических волн с турбулентной атмосферой строится на основе использования в качестве математической модели линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Гельмгольца) [1—3]. Такая модель не описывает нелинейные эффекты, возникающие при распространении в среде двух или более сравнимых по амплитуде волн, а также не учитывает влияние на спектры рассеянных сигналов сжимаемости среды.

В работе приведена снимающая эти ограничения математическая модель взаимодействия акустических волн с турбулентной атмосферой, методы ее решения проанализированы, рассмотрены свойства полученных решений. Показано, что полученная модель позволяет определять спектры сигналов, рассеянных нелинейной неоднородной средой, с учетом их волновой природы.

Математическая модель взаимодействия акустических волн с турбулентной атмосферой. Как известно [4], процесс распространения звука в среде описывается уравнениями гидродинамики: уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

(диссипацией энергии пренебрегаем) и уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (2)$$

Здесь \vec{V} — скорость, p и ρ — давление и плотность среды; x_1, x_2, x_3 — пространственные координаты. Учитывая адиабатичность процесса, получаем замкнутую систему уравнений для \vec{V} и p :

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d \ln p}{dt} = -\operatorname{div} \vec{V};$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} - \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В общем случае для произвольного p решение этой системы затруднено. Однако для звуковых волн с малыми амплитудами верно соотношение $p_a \ll p_0$ (p_0 и p_a — соответственно равновесное и акустическое давле-

ния). Поэтому представив ρ в виде $\rho = \rho_0 + \rho_a$, можно разложить $\ln \rho$ в ряд по малому параметру ρ_a/ρ_0 . Используем два первых члена в разложении (линейный и первую нелинейную поправку). Таким образом мы будем иметь возможность описывать не только линейные, но и нелинейные по акустическому полю эффекты. Положим $\vec{V} = -\vec{U} + \vec{\xi}$ (\vec{U} — скорость турбулентного движения, $\vec{\xi}$ — акустическая скорость). Тогда для Π и $\vec{\xi}$ получим систему уравнений ($\Pi = \frac{\rho_a}{\gamma \rho_0}$):

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = -\frac{\partial U_i}{\partial t} - \sum_{k=1}^3 (\xi_k + U_k) \frac{\partial (\xi_k + U_k)}{\partial x_k} - c_0^2 \left(1 + \frac{T'}{T_0}\right) (1 - \gamma \Pi) \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, 3; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} (1 - \gamma \Pi) + \sum_{k=1}^3 (\xi_k + U_k) \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} (1 - \gamma \Pi) = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\xi_k + U_k)}{\partial x_k}.$$

Для скалярной задачи о распространении монохроматической волны в атмосфере (зависимость решения от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$, волновой природой звукового поля пренебрегают) можно выразить ξ_i через Π и подставить в уравнение для Π . Кроме того, если пренебречь сжимаемостью среды при турбулентном движении ($\text{div } \vec{U} = 0$), а также членами второго порядка малости по $\vec{\xi}$ и Π , при условии, что \vec{U} и T' не зависят от времени, для величины Π можно получить неоднородное уравнение Гельмгольца [1]. Таким образом, система уравнений (4) снимает ряд ограничений, накладываемых на процессы, описываемые уравнением Гельмгольца. Эта система позволяет также описывать волновые эффекты в векторной задаче. В частности, из системы уравнений (4) видно, что эффект Доплера по-разному проявляется для различных по частоте составляющих спектра волны, зависит от волновых векторов составляющих спектра, а также схемы (геометрии) взаимодействия волн и направления скорости ветра.

Методы решения системы уравнений (4). Величину Π , связанную с акустическим давлением, можно искать по теореме возмущений, т. е. положить $\Pi = \Pi_0 + \Pi_s$ (5), где Π_0 падающая волна, Π_s — рассеянная волна. Будем считать, что $\Pi_s/\Pi_0 \ll 1$, т. е. волна Π_0 приводит к изменению давления и акустической скорости, а волна Π_s , не влияя на Π_0 , чувствует эти изменения. Аналогично $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 + \vec{\xi}_s$. Система уравнений нулевого приближения для волны Π_0 , которая не изменяется в процессе распространения, будет иметь вид для неподвижной среды:

$$\frac{\partial \xi_i^0}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \xi_k^0 \frac{\partial \xi_i^0}{\partial x_k} = -c_0^2 \left(1 + \frac{T'}{T_0}\right) \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \xi_k^0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_k} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \xi_k^0}{\partial x_k}.$$

Тогда система уравнений для Π_s получается вычитанием уравнений (6) из уравнений (4) соответственно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \gamma_i\right) \xi'_i = -N_i - \sigma^2 \frac{\partial \Pi_s}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^3 \xi'_k \gamma_{ik}; \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \Pi_s = - \sum_{k=1}^3 \left[\gamma_k + U_k \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_k}\right) \xi'_k \right] \xi'_i,$$

$$i = 1, 2, 3).$$

здесь

$$\bar{U}_i = c + U_i, \quad \gamma_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \quad \gamma_{ik} = \frac{\partial U_i}{\partial x_k};$$

$$c = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \xi_i^0}, \quad N_i = N(i) + n_i, \quad N(i) = (c + U_i) \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial t};$$

$$n_i = \sum_{k=1, k \neq i}^3 (c + U_k) \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad \sigma^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{T'}{T_0}\right).$$

Система уравнений (7) записана в первом приближении по параметру Π_s/Π_0 , так как в правых частях уравнений для ξ'_i опущены члены вида $\sum_{k=1}^3 \xi'_k \partial \xi'_i / \partial x_k$. В то же время в уравнениях для Π_s не учитываются нелинейные поправки по p_a/p_0 , присутствующие в системе уравнений (4).

Поскольку смещение спектров намного меньше несущей частоты, то задачу можно решать в резонансном приближении методом медленных амплитуд, разлагая решения на медленно изменяющуюся часть и быстроосциллирующую с резонансной частотой ω_0 .

Заметим, что в работах [1; 2; 5], задача для Π_0 решалась в нулевом приближении, а задача для Π_s — в первом приближении на основе уравнений Гельмгольца. Ясно, что для адекватного описания реального спектра такого приближения недостаточно. Приведенная в работе система уравнений описывает процесс распространения волны в сжимаемой турбулентной атмосфере. Кроме того, решая задачу о взаимодействии Π_0 с атмосферой точно (в рамках введенных выше допущений), а по малому параметру Π_s/Π_0 — в первом приближении, мы можем описать эффект нелинейного влияния падающей волны на рассеянную через акустическую скорость.

На примере решения задачи рассеяния акустической волны на температурных и ветровых неоднородностях покажем возможности полученной системы уравнений в плане качественного объяснения некоторых особенностей наблюдаемых спектров эхо-сигналов.

Уширение и расщепление спектра. Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся с частотой ω_0 вдоль оси z в турбулентной среде. Величина

$$\Pi_0 = A e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} + A^* e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (8)$$

удовлетворяет системе уравнений (6) в нулевом приближении и в процессе распространения со скоростью c_0 не изменяется, т. е. согласно терминологии из раздела оптики является нормальной.

В общем случае рассеяние на ветровых и температурных неоднородностях может происходить в произвольном направлении. Мы же будем интересоваться рассеянием в том же направлении, вдоль оси z . Таким образом, решение системы уравнений (7) для рассеянной вперед волны ищем в виде

$$\Pi_z = S e^{-i(\omega t - k z)} + S^* e^{i(\omega t - k z)}; \quad (9)$$

$$\xi_z' = B e^{-i(\omega t - k z)} + B^* e^{i(\omega t - k z)}. \quad (10)$$

Для простоты будем считать, что вектор скорости ветра \vec{U} направлен вдоль оси z , более того, изменения скорости ветра отличны от нуля лишь по оси z ($\gamma_z \equiv \partial U_z / \partial z \neq 0$). Тогда система уравнений (7) примет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (c_0 + U_z) \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_z \right] \xi_z' = -N_z - c_0^2 \left(1 + \frac{T'}{T_0} \right) \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}; \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (c_0 + U_z) \right] \Pi_z = -\gamma_z - (U_z + \xi_z') \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z'}{\partial z}.$$

Подставляя Π_z и ξ_z' в эту систему и переходя к уравнениям для медленно изменяющихся амплитуд, что справедливо в резонансном приближении, получаем связанную систему уравнений

$$S = \frac{k(U_z \cdot A + B)}{\omega - \omega_0 - kU_z}; \quad B = \frac{iW_z(\omega_0, k) + \sigma^2 k S}{\omega - \omega_0 - kU_z + i\gamma_z}. \quad (12)$$

Здесь $W_z(\omega_0, k)$ — одномерный индекс рассеяния Фурье — Стильтеса, кроме того, учтено, что $\omega_0 = kc_0$.

Систему (12) можно решать методом последовательных приближений. Первое уравнение получается, если положить $S = 0$ во втором уравнении. По сути это означает, что мы не учитываем температурные флуктуации. Для S , таким образом, имеем

$$S = \frac{kU_z A}{\omega - \omega_0 - kU_z} + \frac{i k W_z(\omega_0, k)}{(\omega - \omega_0 - kU_z)(\omega - \omega_0 - kU_z + i\gamma_z)}. \quad (13)$$

Выражение (13) представляет собой комплексный коэффициент рассеяния вперед для элементарного объема с некоторыми постоянными значениями скорости и градиента скорости. Если среда неустойчива и в пространстве конечного размера задано распределение вероятностей параметров среды, то для получения амплитуды рассеянного сигнала формулу для S следует усреднить по распределению.

На рисунке представлены спектры падающей волны (рисунок, поз. а) и рассеянной вперед на ветровых неоднородностях. При отсутствии флуктуаций ($\vec{U} (\gamma_z = 0)$) спектр будет монохроматичным, смещенным относительно частоты падающей волны ω_0 на величину kU_z (эффект Доплера), рисунок, поз. б. Наличие флуктуаций скорости

($\gamma_z \neq 0$) приведет к «размытию» спектра, рисунок, поз. в. Из выражения (13) видно также, что с ростом U_z амплитуда рассеяния растет, т. е. сигнал на смещенных частотах пропорционален скорости ветра.

Из системы (12) получим теперь точное выражение для S :

$$S = \frac{kU_z(\omega - \omega_0 - kU_z)A + ik(W_z + \gamma_z U_z A)}{\left(\omega - \omega_0 - kU_z + \sqrt{\sigma^2 k^2 - \gamma_z^2/4 + i\frac{\gamma_z}{2}}\right) \times \left(\omega - \omega_0 - kU_z - \sqrt{\sigma^2 k^2 - \frac{\gamma_z^2}{4} + i\frac{\gamma_z}{2}}\right)} \quad (14)$$

Из выражения (14) видно, что при достаточно больших значениях $\sigma^2 k^2$ (т. е. при $\sigma^2 k^2 \gg \gamma_z^2$) вместо резонансов на частоте $\omega = \omega_0 - kU_z$ формируются два «смещенных» резонанса на частотах

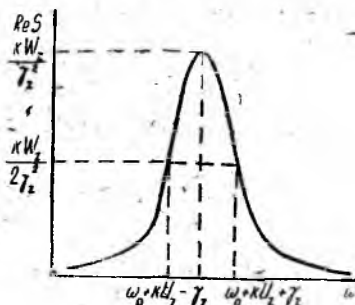
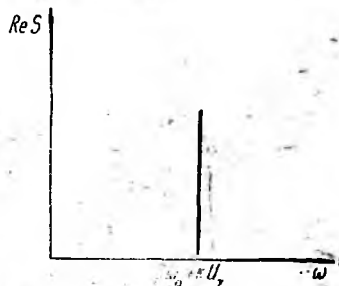
$$\omega = \omega_0 - kU_z \pm \sqrt{\sigma^2 k^2 - \gamma_z^2/4},$$

т. е. происходит расщепление резонансной линии. Таким образом, при рассеянии вперед акустической волны происходит уширение спектра за счет ветровых флуктуаций, а также расщепление резонансов за счет температурных неоднородностей.

Нелинейный интерференционный эффект. Рассмотрим ту же задачу, но теперь рассеянную волну будем считать не слабой, а настолько сильной, чтобы учитывать модуляцию акустической скорости ξ_z в резонансной частотой $\omega_0 - \omega$ за счет взаимодействия волн P_0 и P_s через среду. Для решения этой задачи принципиально необходим учет второго члена разложения по малому параметру ρ_s/ρ_0 . Из системы уравнений (4) для рассматриваемого случая запишем систему первого приближения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_z \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_z\right) \times \times \xi_z = -N_z - \sigma^2(1 - \gamma\Pi) \frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$(1 - \gamma\Pi) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + U_z \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right) = -\gamma_z - \frac{\partial \xi_z}{\partial z} - (1 - \gamma\Pi) \xi_z \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (15)$$



Общий вид решений для Π_0 и Π_s оставим без изменений, а ξ_z представим суммой трех монохроматических волн

$$\xi_z = Ce^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} + De^{-i(\omega t - kz)} + Le^{i(\delta t - \Delta z)} + C^* e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + D^* e^{i(\omega t - kz)} + L^* e^{-i(\delta t - \Delta z)}. \quad (16)$$

Здесь $\delta = \omega_0 - \omega$, $\Delta = k_0 - k$. Получим выражение для нелинейной части $S^{\text{нел}}$ за счет связи волн Π_0 и Π_s через коэффициент L , т. е. через модуляцию акустической скорости с частотой δ биений волн. Для этого подставим Π_0 , Π_s и ξ_z в (15) и приравняем коэффициенты при одинаковых экспонентах (резонансное приближение). В результате получим систему

$$\begin{aligned} (\omega - kU_z) S &= k_0 AL - kN_z S / \gamma_z; \\ (\delta - \Delta \cdot U_z - i\gamma_z) L &= 2A^* S \sigma^3 \cdot \Delta. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда

$$S^{\text{нел}} = \frac{2A^2 \cdot S \cdot \sigma^2 \cdot \Delta \cdot k_0}{(\omega - kU_z + kN_z / \gamma_z) (\delta - \Delta \cdot U_z - i\gamma_z)} \quad (19)$$

Из полученной формулы видно, что при рассеянии вперед в нелинейной турбулентной среде падающая и рассеянная волны интерферируют. В спектре рассеянной волны появляются резонансы на частоте $\delta = \Delta U_z$ с полушириной γ_z . Эффект отличен от нуля, если $k_0 \neq k$.

С другой стороны, полученный результат можно интерпретировать как условие $\omega - \omega_0 = (k - k_0)U_z$, при котором может происходить нелинейная перекачка энергии из одной части спектра в другую.

Получена система нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, позволяющая описывать нелинейные (по полю) и волновые эффекты при распространении акустических волн в турбулентной атмосфере.

Для ее решения предложено использовать: метод разложения по малому параметру Π_s / Π_0 , теорию возмущений, метод медленно изменяющихся амплитуд (резонансное приближение).

В резонансном приближении решена задача о рассеянии вперед плоской монохроматической волны на ветровых и температурных неоднородностях, описаны изменения в спектре такой волны. Показано, что возможна нелинейная перекачка энергии из одной части спектра в другую через изменение акустической скорости.

Список литературы: 1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967. 548 с. 2. Brown E. M. Turbulent spectral broadening of backscattered acoustic pulses // J. Acoust. Soc. Amer., 1974. Vol. 56, N 5. P. 1398—1406. 3. Brown E. H. Acoustic — Doppler — Radar scattering equation and general solution // J. Acoust. Soc. Amer., 1972. Vol. 52, N 5. P. 1391—1396. 4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М., 1988. Т. VI. 733 с. 5. Spizzichino A. Spectral broadening of acoustic and radio waves scattered by atmospheric turbulence in the case of radar and zonal experiments // Ann. Geophys., 1975. Vol. 31, N 4. P. 433—445.

Поступила в редколлегию 20.12.89