УДК 510.62

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

О МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОТНОШЕНИЙ И ОПЕРАЦИЙ

Статья представляет собой продолжение работы [1]. Введем сокращенную запись $(\xi_i)_1^k$ для векторного представления $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ переменного множества X. Переменные ξ_i принимают булевы значения, поэтому $\xi_i^0 \vee \xi_i^1 = 1$ **(1)**.

Здесь и далее имеется в виду, что индекс i пробегает значения от 1 до k. Заметим, что для универсального множества U $\xi_i = 1$ **(2)**, для пустого множества $\varnothing$ $\xi_i = 0$ **(3)** при всех значениях индекса i.

Пусть $(\xi_i)_1^k$, $(\eta_i)_1^k$ — векторные записи множеств X, Y. Отношения равенства $X = Y$ и включения $X \subseteq Y$ этих множеств могут быть записаны соответственно в виде следующих систем уравнений:

$$\xi_i^1 \sim \eta_i^1 = 1 \;\textbf{(4)};\quad \xi_i^1 \supset \eta_i^1 = 1 \;\textbf{(5)}.$$

При $X = Y$ имеет место попарное равенство всех компонентов векторных записей множеств X и Y, которое выражается на языке алгебры конечных предикатов системой равенств: $\xi_i^0 = \eta_i^0$; $\xi_i^1 = \eta_i^1$ **(6)**.

Для приборного определения компонентов η_i векторной записи множества Y по известным компонентам ξ_i векторной записи множества X может быть использована переключательная цепь, изображенная на рис. 1, *а*. Второй каскад этой цепи представляет собой простой жгут, состоящий из $2k$ параллельных проводов.

Отношение $\tilde{X} = Y$ представим в виде $\overline{\xi_i^1} \sim \eta_i^1 = 1$.

Для полноты математического описания этого отношения необходимо также потребовать, чтобы $\eta_i^0 \vee \eta_i^1 = 1$ **(7)**.

Операцию $\tilde{X}$ нахождения дополнения Y множества X запишем системой равенств: $\xi_i^1 = \eta_i^0$, $\xi_i^0 = \eta_i^1$ **(8)**.

Эта операция может быть реализована переключательной цепью, представленной на рис. 1, *б*. Первый и третий каскады преобразования в этой и последующей цепях не указываются.

Пусть дополнительно к принятым обозначениям запись $(\zeta_i)_1^k$ означает векторное представление множества Z. Полагаем, что $\zeta_i^0 \vee \zeta_i^1 = 1$ **(9)**.

Отношения $X \cup Y = Z$, $X \cap Y = Z$, $X \setminus Y = Z$, $X \dot{-} Y = Z$, связывающие множества X, Y, Z, запишем соответственно в виде систем уравнений:

$$\xi_i^1 \vee \eta_i^1 \sim \zeta_i^1 = 1 \quad (10), \qquad \xi_i^1 \eta_i^1 \sim \zeta_i^1 = 1 \quad (11),$$

$$\xi_i^1 \ominus \eta_i^1 \sim \zeta_i^1 = 1 \quad (12), \qquad \xi_i^1 \oplus \eta_i^1 \sim \zeta_i^1 = 1 \quad (13).$$

Здесь знак $\ominus$ обозначает булеву операцию запрета $X \ominus Y = X\overline{Y}$ **(14)**, где X, Y — булевы переменные.

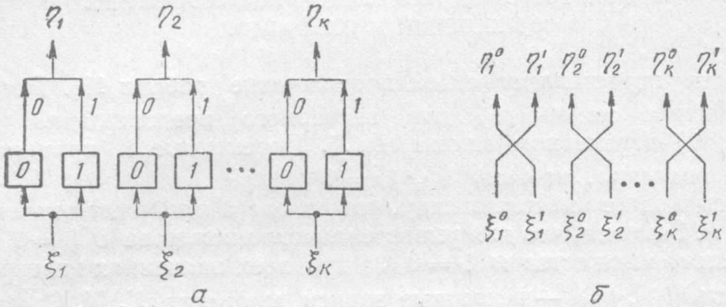


Рис. 1.

Выражая в явном виде переменную ζ из уравнений (10)—(13), получаем зависимости, описывающие операцию $X \cup Y$ нахождения объединения Z множеств X, Y:

$$\xi_i^0 \eta_i^0 = \zeta_i^0; \quad \xi_i^1 \vee \eta_i^1 = \zeta_i^1 \tag{15}$$

операцию $X \cap Y$ нахождения пересечения Z множеств X, Y

$$\xi_i^0 \vee \eta_i^0 = \zeta_i^0; \quad \xi_i^1 \eta_i^1 = \zeta_i^1 \tag{16}$$

операцию $X \setminus Y$ нахождения разности Z множеств X, Y:

$$\xi_i^0 \vee \eta_i^1 = \zeta_i^0; \quad \xi_i^1 \eta_i^0 = \zeta_i^1, \tag{17}$$

операцию $X \dot{-} Y$ нахождения симметрической разности множеств X, Y:

$$\xi_i^0 \sim \eta_i^0 = \zeta_i^0; \quad \xi_i^1 \oplus \eta_i^1 = \zeta_i^1. \tag{18}$$

На рис. 2, 3 показаны переключательные цепи для формирования векторного представления соответственно объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств по векторным представлениям исходных множеств. Для симметрической разности множеств на схеме изображен лишь фрагмент переключательной цепи, соответствующий преобразованию i-х компонентов векторного представления множеств. Важно заметить, что первые три цепи по существу идентичны и отличаются друг от друга лишь способом включения.

Введенные зависимости можно использовать для формализации доказательств высказываний о конечных множествах. Сделать это можно таким образом. Прежде всего нужно записать

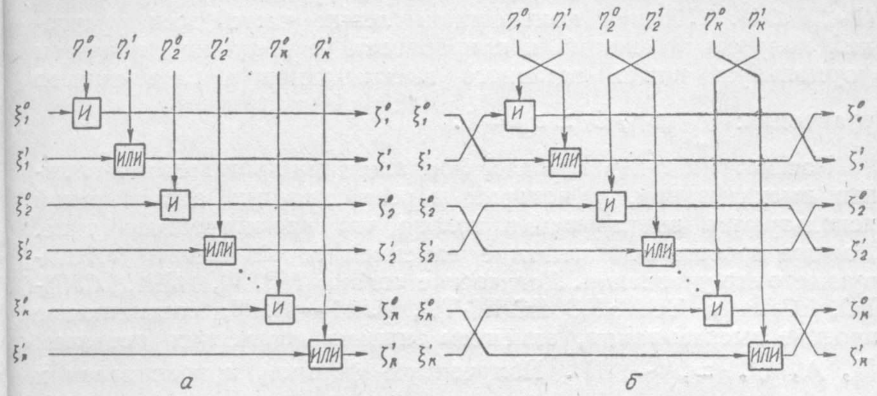


Рис. 2.

доказываемое высказывание в формализованном виде на языке алгебры конечных предикатов. Сначала рассмотрим случай, когда высказывание содержит лишь буквы $X, Y, Z, \ldots, A, B, C, \ldots,$

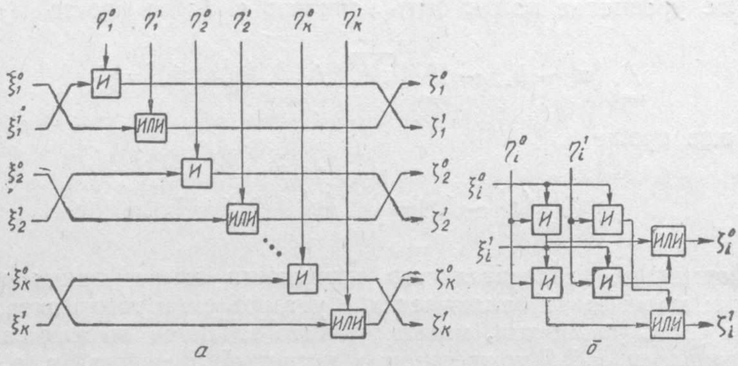


Рис. 3.

обозначающие множества, знаки $\subseteq$, $=$ отношений между множествами и знаки $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\diagdown$, $\div$ операций над множествами. В этом случае переход к формальной записи высказывания осуществляется простой заменой в нем букв $X, Y, Z, \ldots, A, B, C, \ldots$ соответственно узнаваниями $\xi_i^1, \eta_i^1, \zeta_i^1, \ldots, a_i^1, b_i^1, c_i^1, \ldots$ булевых переменных $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \ldots, a_i, b_i, c_i$ знаков $\subseteq$, $=$, $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\diagdown$, $\div$ — знаками логических операций $\supset$, $\sim$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\ominus$, $\oplus$, знаков $\varnothing$ и U — логическими константами 0 и 1. Полученную в результате этой замены формулу приравниваем к единице. В итоге получаем систему k-уравнений, каждое из которых структурой своей левой части в точности повторяет структуру исходного высказывания. Например, высказывание $A \cup B \subseteq C$ запишем в виде системы уравнений $a_i \vee b_i \supset c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Образуя конъюнкцию левых частей всех уравнений полученной системы и приравнивая ее к единице, получаем формальную запись заданного высказывания в виде единого уравнения: $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} (a_i \vee b_i \supset c_i) = 1$.

Рассмотрим теперь процесс формализации произвольных сложных высказываний, у которых в роли простых высказываний используются высказывания только что рассмотренного типа. Каждое простое высказывание заменяем левой частью моделирующего его уравнения. Логические связки НЕ, И, ИЛИ, ЕСЛИ-ТО, ЕСЛИ и ТОЛЬКО ЕСЛИ-ТО, ИЛИ — ИЛИ, соединяющие простые высказывания, заменяем знаками логических операций $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\sim$, $\oplus$. Полученную формулу приравниваем к единице. Например, высказывание «$A = \tilde{B} <=> A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = U$» формально запишем в виде уравнения

$$\bigwedge_{i=1}^{k} (a_i^1 \sim \overline{b_i^1}) \sim \bigwedge_{i=1}^{k} (a_i^1 b_i^1 \sim 0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (a_i^1 \vee b_i^1 \sim 1) = 1.$$

Это же уравнение может быть записано в более простой форме

$$\bigwedge_{i=1}^{k} (a_i^1 \sim b_i^0) \sim \bigwedge_{i=1}^{k} (\overline{a_i^1 b_i^1}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (a_i^1 \vee b_i^1) = 1$$

или еще проще

$$\bigwedge_{i=1}^{k} (a_i^1 \sim b_i^0) \sim \bigwedge_{i=1}^{k} (a_i^1 \oplus b_i^1) = 1.$$

Формальное доказательство истинности высказывания о конечных множествах заключается в установлении того факта, что левая часть уравнения, моделирующего заданное высказывание, представляет собой тождественно истинный предикат, т. е. что она тождественно равна единице. Несколько примеров таких доказательств приведем ниже.

1. Доказать тождество $\widetilde{X \cap Y} = \tilde{X} \cup \tilde{Y}$ (а).

На языке алгебры конечных предикатов равенство (а) запишем в виде системы уравнений $\overline{\xi_i^1 \eta_i^1} \sim (\overline{\xi_i^1} \vee \overline{\eta_i^1}) = 1$ (б).

Производя тождественные преобразования левой части равенств (б) с использованием зависимостей (1), (7), устанавливаем, что она равна единице:

$$\overline{\xi_i^1 \eta_i^1} \sim (\overline{\xi_i^1} \vee \overline{\eta_i^1}) = (\xi_i^0 \vee \eta_i^0) \sim (\xi_i^0 \vee \eta_i^0) = 1.$$

Таким образом, все уравнения системы (б) являются тождествами. Этим доказывается истинность высказывания (а).

2. Доказать, что $X \cap Y \subseteq X$.

Переходя к векторной записи множеств, находим:

$$\xi_i^1\eta_i^1 \supset \xi_i^1 = \overline{\xi_i^1\eta_i^1} \vee \xi_i^1 = \xi_i^0 \vee \eta_i^0 \vee \xi_i^1 = 1.$$

3. Доказать, что $X \setminus Y = X \dot{-} (X \cap Y)$.

Имеем:

$$\xi_i^1\overline{\eta_i^1} \sim (\xi_i^1 \oplus \xi_i^1\eta_i^1) = \xi_i^1\eta_i^0 \sim (\overline{\xi_i^1}\xi_i^1\eta_i^1 \vee \xi_i^1\overline{\xi_i^1\eta_i^1}) =$$
$$= \xi_i^1\eta_i^0 \sim \xi_i^1(\xi_i^0 \vee \eta_i^0) = \xi_i^1\eta_i^0 \sim \xi_i^1\eta_i^0 = 1.$$

4. Доказать, что $X \cup Y \subseteq Z <=> X \subseteq Z$ и $Y \subseteq Z$.

Для доказательства заметим, что

$$\xi_i^1 \vee \eta_i^1 \supset \zeta_i^1 = \overline{\xi_i^1 \vee \eta_i^1} \vee \zeta_i^1 = \xi_i^0\eta_i^0 \vee \zeta_i^1 =$$
$$= (\xi_i^0 \vee \zeta_i^1)(\eta_i^0 \vee \zeta_i^1) = (\xi_i^1 \supset \zeta_i^1)(\eta_i^1 \supset \zeta_i^1).$$

В силу этого левая часть уравнения

$$(\xi_1^1 \vee \eta_1^1 \supset \zeta_1^1)(\xi_2^1 \vee \eta_2^1 \supset \zeta_2^1) \ldots (\xi_k^1 \vee \eta_k^1 \supset \zeta_k^1) \sim$$
$$\sim (\xi_1^1 \supset \zeta_1^1)(\eta_1^1 \supset \zeta_1^1)(\xi_2^1 \supset \zeta_2^1)(\eta_2^1 \supset \zeta_2^1) \ldots (\xi_k^1 \supset \zeta_k^1)(\eta_k^1 \supset \zeta_k^1) = 1,$$

формально описывающего заданное высказывание, обращается в единицу.

Полученные результаты позволяют решать некоторые виды уравнений с неизвестными множествами. Рассмотрим примеры решения таких уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений $A \cap X = B$; $A \cup X = C$, (в), где A, B, C — данные множества.

Решение. На языке алгебры конечных предикатов эту систему запишем

$$(a_i^1\xi_i^1 \sim b_i^1)(a_i^1 \vee \xi_i^1 \sim c_i^1) = 1 \text{ (г)}.$$

Используя равенство (u) из работы [2], получаем уравнение $(b_i^1 \supset a_i^1)(a_i^1 \supset c_i^1) = 1$ для области изменения параметров, в которой существует единственное решение уравнения (г) относительно переменной ξ_i. Таким образом, мы приходим к необходимому и достаточному условию существования единственного решения системы (в): $B \subseteq A \subseteq C$ (д).

Для множеств A, B, C, удовлетворяющих условию (д), решение системы (в) может быть получено различными способами. Отправляясь от равенств (з) работы [2], имеем

$$b_i^1 \vee (a_i^1 \oplus c_i^1) = \xi_i^1; \quad (\overline{a_i^1}\overline{b_i^1} \vee a_i^1b_i^1)\, c_i^1 = \xi_i^1,$$

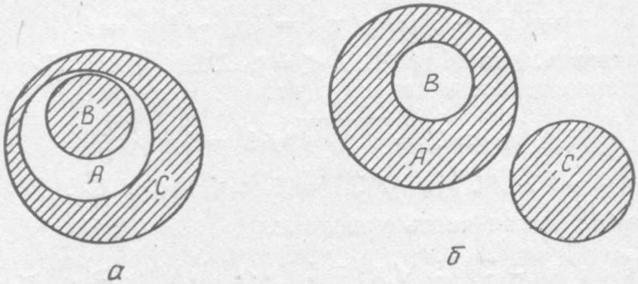
что соответствует следующим выражениям для множества X:

$$X = B \cup (A \dot{-} C) \text{ (е)}; \quad X = (\tilde{A} \cap \tilde{B} \cup A \cap B) \cap C \text{ (ж)}.$$

Отправляясь от равенств (к), (л) работы [2], получаем еще два выражения для множества X:

$$X = (C \setminus A) \cup B \quad (з); \quad X = (\tilde{A} \cup B) \cap C \quad (и).$$

Если бы множества A, B, C были выбраны произвольно, то выражения (е) — (и) задавали бы четыре различных множества. В нашем же случае, в силу действия ограничения (д), все найденные выражения для множества X описывают одно и то же множество, указанное на рис. 4, *а* штриховкой.



Рнс. 4.

Пример 2. Задана система уравнений $A \setminus X = B$; $X \setminus A = C$ (к), где A, B, C — известные, а X — неизвестное множество. При каких A, B, C система имеет единственное решение?

Решение. Систему (к) записываем в виде уравнения теории интеллекта:

$$(a_i^1 \xi_i^0 \sim b_i^1)(\xi_i^1 a_i^0 \sim c_i^1) = 1 \qquad (л).$$

Используя равенство (7) работы [2], находим область изменения параметров a_i, b_i, c_i, в которой существует единственное решение уравнения (л) для ξ_i:

$$(a_i^1 0^0 \sim b_i^1)(0^1 a_i^0 \sim c_i^1) \oplus (a_i^1 1^0 \sim b_i^1)(1^1 a_i^0 \sim c_i^1) = 1.$$

После упрощений имеем $(\overline{b_i^1} \vee a_i^1)\overline{a_i^1 c_i^1} = 1$, откуда $b_i^1 \supset a_i^1 = 1$ и $a_i^1 c_i^1 = 0$. Следовательно, система (к) имеет единственное решение, когда $B \subseteq A$ и $A \cap C = \varnothing$ (м).

Пример 3. Для области изменения параметров A, B, C, найденных в предыдущем примере, найти решение системы (к).

Решение. Принимая в качестве f левую часть равенства (л), выражения (9) работы [2] запишем

$$(a_i^1 \sim b_i^1) c_i^0 \overline{b_i^0 (a_i^0 \sim c_i^1)} = \xi_i^0; \quad \overline{(a_i^1 \sim b_i^1) c_i^0} b_i^0 (a_i^0 \sim c_i^1) = \xi_i^1.$$

После упрощений

$$a_i^0 b_i^0 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^1 c_i^0 = \xi_i^0; \quad a_i^0 b_i^0 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^0 c_i^0 = \xi_i^1. \qquad (н)$$

По полученным равенствам строим формулы, выражающие в явном виде множество X: $X = (A \dot{-} B) \cup C$ (о); $X = (A \dot{-} C) \cap \tilde{B}$ (п). Доопределяя функцию (н) однозначным образом на всей области изменения параметров a_i, b_i, c_i, имеем:

$$a_i^0 b_i^0 c_i^0 \vee a_i^1 b_i^1 c_i^0 \vee a_i^0 b_i^1 c_i^0 = \xi_i^0;$$

$$a_i^0 b_i^0 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^0 c_i^0 \vee a_i^0 b_i^1 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^0 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^1 c_i^1 = \xi_i^1,$$

что после упрощений дает:

$$(a_i^0 \vee b_i^1) c_i^0 = \xi_i^0, \quad a_i^1 b_i^0 c_i^1 = \xi_i^1.$$

От этих равенств переходим еще к одному способу выражения множества X через множества A, B, C: $X = (A \setminus B) \cup C$ (р). Доопределяя функцию (н) произвольным образом, можем записать:

$$a_i^0 b_i^0 c_i^0 \vee a_i^1 b_i^1 c_i^0 \vee a_i^0 b_i^1 c_i^0 \vee a_i^0 b_i^1 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^1 c_i^1 = \xi_i^0,$$

$$a_i^0 b_i^0 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^0 c_i^0 \vee a_i^0 b_i^1 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^0 c_i^1 \vee a_i^1 b_i^1 c_i^1 = \xi_i^1.$$

После упрощений

$$a_i^0 c_i^0 \vee b_i^1 = \xi_i^0; \quad a_i^1 b_i^0 \vee c_i^1 = \xi_i^1.$$

Первое из полученных равенств приводит к новому выражению множества X через множества A, B, C: $X = (A \cup C) \cap \tilde{B}$ (с). При соблюдении условия (н) все четыре зависимости (о) — (с) описывают одно и то же множество, указанное на рис. 4, *б* штриховкой. Каждая из этих зависимостей может быть принята в качестве решения системы (к).

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* О моделировании конечных множеств средствами теории интеллекта.— АСУ и приборы автоматики, 1978, вып. 55, с. 55—62. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* О решении уравнений теории интеллекта.— АСУ и приборы автоматики, 1978, вып. 55, с, 121—130.

Поступила 25 марта 1980 г.

УДК 510.62

М. Ф. БОНДАРЕНКО, канд. техн. наук,
Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА

Разработка формального аппарата теории интеллекта [1] открывает новые перспективы для решения задачи математического моделирования естественного языка. Будем смотреть на язык как на детерминированный, дискретный и конечный объект. Основную задачу мы видим в том, чтобы формализовать понятие текста путем математического описания отношения, выделяющего подмножество всех текстов из некоторого множества всевозможных