УДК 517.927:517.95]:519.6

МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ У ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ З ЛЕГКОПРОНИКНОЮ ШОРСТКІСТЮ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ

Холодов М.О.
e-mail: maksym.kholodov@nure.ua
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Ламтюгова С.М.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

This work is devoted to the mathematical modeling of viscous fluid flow in a rectangular pipe with permeable wall roughness. The study is based on the R-functions structural method, which allows the construction of approximate analytical solutions to boundary value problems in complex domains. A mathematical model describing the velocity distribution of an incompressible viscous fluid in a channel with rough permeable walls is considered. The R-functions method is applied to construct the structure of the solution that automatically satisfies the boundary conditions. Numerical simulations are carried out to analyze the influence of wall permeability on the velocity distribution in the pipe cross-section. The results confirm the efficiency of the proposed approach.

У багатьох галузях техніки та прикладної науки виникають задачі, пов'язані з дослідженням руху в'язких рідин у каналах складної геометрії. Такі задачі мають важливе значення в гідродинаміці, теплоенергетиці, хімічній технології та різних інженерних системах транспортування рідин. Однією з актуальних проблем є дослідження течії рідини у трубах і каналах із шорсткими або частково проникними стінками, оскільки реальні технічні поверхні рідко є ідеально гладкими. Наявність шорсткості або проникних елементів на стінках може істотно впливати на характеристики потоку, зокрема на розподіл швидкостей, гідравлічний опір та інші параметри течії [1].

У роботі розглядається задача математичного моделювання потоку в'язкої нестисливої рідини у трубі прямокутного перерізу з легкопроникною шорсткістю на стінках. Метою роботи є застосування методу R-функцій для знаходження розв'язку крайової задачі та дослідження впливу шорсткості і проникності стінок на характеристики течії. Метод R-функцій є ефективним інструментом розв'язування крайових задач математичної фізики у складних геометричних областях, оскільки дозволяє аналітично враховувати геометрію області та граничні умови [2–4]. У межах цього методу будується структура розв'язку, яка автоматично задовольняє граничні умови задачі.

Математична постановка задачі базується на рівняннях гідродинаміки для в'язкої нестисливої рідини. Для стаціонарного ламінарного потоку в довгій прямокутній трубі задача зводиться до розв'язування

диференціального рівняння еліптичного типу для функції швидкості. У безрозмірних змінних задача має вигляд [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-2+\begin{cases}0, & 0<|y|<1-\bar{h},\quad 0<|z|<\gamma-\bar{h};\\ Au, & 1-\bar{h}\le|y|\le 1,\quad \gamma-\bar{h}\le|z|\le\gamma,\end{cases} \tag{1}$$

$$u=0 \text{ при } y=\pm 1,\ |z|\le\gamma,\ z=\pm\gamma,\ |y|\le 1, \tag{2}$$

де y, z – безрозмірні поперечні координати перерізу труби; $u(y,z)$ – безрозмірна поздовжня швидкість рідини; a, b – піврозміри прямокутного перерізу труби; h– висота шару перешкод на стінках каналу; $\gamma=b/a$ – відношення піврозмірів прямокутного перерізу каналу; $\bar{h}=h/a$ – безрозмірна висота шару легкопроникної шорсткості; $A=-a^2kn/\nu$ – безрозмірний параметр, що характеризує вплив проникної шорсткості; ν – кінематична в'язкість рідини; k – коефіцієнт опору (проникності) шару перешкод; $n=\text{const}$ – концентрація перешкод.

Граничні умови відповідають умовам прилипання рідини до стінок каналу.

Для побудови наближеного розв'язку задачі (1)–(2) використано структурний метод R-функцій [4, 5, 2]. У межах цього методу розв'язок крайової задачі подається у вигляді:

$$u=\omega\Phi, \tag{3}$$

де ω – функція, що описує геометрію області та забезпечує виконання граничних умов:

$$\omega(y,z)=\left(1-y^2\right)\wedge_0\left(\frac{1}{2\gamma}\left(\gamma^2-z^2\right)\right).$$

Невизначену компоненту Φ шукаємо у вигляді розкладу за базисними функціями:

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}c_k\tau_k,$$

$$\tau_k=\sin\left(\frac{n\pi(y+1)}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi(z+\gamma)}{2\gamma}\right),\ k=n+m=2,3,4,....$$

Невідомі коефіцієнти c_k визначаються за методом Гальоркіна.

Обчислювальний експеримент було проведено у прямокутній області, де зона легкопроникної шорсткості розташована між внутрішнім і зовнішнім прямокутниками:

– розміри зовнішнього прямокутника: $a=2$, $b=5$;

– висота елементів шорсткості на стінках $h=h_1=h_2=h_3=h_4=0,4$;

– параметри усередненої дії ЛПШ: $A=0,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200$.

Наближений розв'язок будувався методом Гальоркіна при кількості координатних функцій $N=3,5$. Для двох послідовних наближених розв'язків було оцінено похибки обчислення:

– абсолютне відхилення: $\Delta_k = \max\left|u_{N_{k+1}}(y,z) - u_{N_k}(y,z)\right|$;

– L_2-норма: $\Delta = \left\|u_{N_{k+1}}(y,z) - u_{N_k}(y,z)\right\|_{L_2(\Omega)}$.

У табл. 1 представлено обчислювальні похибки для пар наближених розв'язків, обчислених при різних значеннях N_k.

Таблиця 1 – Похибки обчислень для пар наближених розв'язків

N_k, N_{k+1}	Тип похибки	$A=0$	$A=20$	$A=50$	$A=100$	$A=200$
$N_1=3$ $N_2=5$	Δ_k	$0,78\times10^{-3}$	$0,68\times10^{-3}$	$0,12\times10^{-2}$	$0,2\times10^{-2}$	$0,27\times10^{-2}$
	Δ	0	0	0	0	0

Числові результати демонструють збіжність методу Гальоркіна для розглядуваної задачі та задовільну точність уже при невеликій кількості координатних функцій. Зі збільшенням параметра A, що характеризує щільність шорсткості стінок, спостерігається зменшення максимальних і середніх швидкостей потоку.

Отримані результати також узгоджуються з відомими теоретичними та чисельними даними, наведеними в роботі [5], що підтверджує коректність застосованого підходу.

Результати можуть бути використані для подальших досліджень гідродинамічних процесів у каналах зі складною геометрією поверхні, а також при розробці інженерних систем транспортування рідин, у яких важливу роль відіграють характеристики поверхні стінок.

Список використаних джерел:

1. Кулінченко В. Р. Гідродинаміка. Київ : НМК ВО, 1992. 271 с.

2. Рвачев В. Л. Теория *R*-функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

3. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the *R*-function method. *Journal of Engineering Mathematics*. 2015. № 91(1). P. 59–79. DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x.

4. Podhornyj O. R., Sidorov M.V. Mathematical modeling of fluid flows through the piecewise homogeneous porous medium by *R*-function method. *Mathematical Modeling and Computing*. 2021. №8 (3). 499–508 p. DOI: 10.23939/mmc2021.03.499.

5. Бердник О. М., Гаєв Є. О. Стабілізований потік в'язкої рідини через трубу прямокутного перерізу з легкопроникною шорсткістю на стінках. *Наукові вісті НТУ "КПІ"*. 2010. № 2. 83–88 с.