

УДК 517.927:517.95]:519.6

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ
ТЕПЛА У КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ,
ЩО ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНІ РІДИНОЮ**

Мякота В.В.

e-mail: vladyslav.miakota@nure.ua

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Поляков А.О.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

Mathematical modeling of heat propagation processes in piecewise-homogeneous media partially filled with a liquid is an important problem in applied mathematics, thermal physics, and engineering. The main difficulty of problems of this class lies in the fact that the thermal conductivity coefficients differ in various subdomains, conjugation (interface) conditions arise at the boundaries between media, and convective heat transfer may occur in the liquid region. The paper describes a mathematical model and substantiates the feasibility of using the structural-variational method (the R-functions method) for its numerical analysis.

Процеси теплообміну в середовищах зі складною структурою широко зустрічаються в природі та техніці. Особливий інтерес становлять кусково-однорідні середовища, тобто області, що складаються з декількох підобластей з різними фізичними властивостями (теплопровідністю, теплоємністю тощо). У багатьох практичних випадках частина таких середовищ заповнена рідиною, що істотно впливає на механізми переносу тепла.

Задачі такого типу виникають у енергетиці (теплообмін у теплообмінниках, реакторах, системах охолодження), мікроелектроніці (охолодження електронних компонентів та MEMS-пристроїв), будівництві (теплообмін у пористих матеріалах і конструкціях з повітряними або рідинними порожнинами), геофізиці (теплові процеси у ґрунтах, тріщинах, водонасичених породах), біомедичні застосування (теплові процеси у біологічних тканинах з рідинними включеннями) тощо. Отже, математичне моделювання процесів поширення тепла у кусково-однорідних середовищах, що частково заповнені рідиною, є важливою задачею прикладної математики, теплофізики та інженерії. Основна складність задач цього класу полягає в тому, що коефіцієнти теплопровідності різні у різних підобластях, на межах середовищ виникають умови спряження, а у рідинній області може з'являтися конвективний перенос тепла. Це робить задачу складною як з аналітичної, так і з чисельної точки зору.

Для побудови математичної моделі використаємо відповідні рівняння математичної фізики, а саме: у твердих підобластях температура описується рівнянням теплопровідності, у рідинній області теплоперенос описується

рівнянням конвекції-дифузії, поле швидкостей зазвичай визначається з рівнянь гідродинаміки (наприклад, рівнянь Нав'є – Стокса), а на межі тверде тіло – рідина або між двома твердими областями виконуються умови спряження (неперервність температури та неперервність теплового потоку). Отже, нехай процес теплопровідності розглядається в замкненій області $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_s \cup \bar{\Omega}_l$, де Ω_s – тверда частина, а Ω_l – рідинна частина середовища, $\Omega_s \cap \Omega_l = \emptyset$. Тоді процес описується рівняннями

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla(k_s \nabla T_s) + Q_s \text{ у } \Omega_s, \quad (1)$$

$$\rho_l c_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla T_l) \right) = \nabla(k_l \nabla T_l) + Q_l \text{ у } \Omega_l, \quad (2)$$

де $T(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} T_s(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_s, \\ T_l(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_l, \end{cases}$ – температура, k_s, k_l – теплопровідність, c_s, c_l –

теплоємність, ρ_s, ρ_l – густина твердої та рідинної частин відповідно, $\mathbf{v}$ – вектор швидкості руху рідини, Q_s, Q_l – джерела тепла у твердій та рідинній частинах відповідно.

На межі $\Gamma = \bar{\Omega}_s \cap \bar{\Omega}_l$ задані умови спряження

$$T_s|_{\Gamma} = T_l|_{\Gamma}, \quad k_s \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = k_l \frac{\partial T_l}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma}, \quad \mathbf{n} - \text{нормаль до } \Gamma,$$

на зовнішній межі $\partial\Omega_0$ заданий температурний режим у вигляді крайової умови першого, другого чи третього роду і у $\bar{\Omega}$ задано температуру у початковий момент часу $t = 0$.

Для розв'язування поставленої задачі можна використовувати різні чисельні методи, зокрема метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод скінченних об'ємів, метод граничних елементів тощо. Проте основною проблемою є складна геометрія області та наявність внутрішніх меж. Через це ефективнішим є застосування методу R-функцій, запропонованого академіком Національної академії наук України В.Л. Рвачовим [1].

Отже, моделювання теплопереносу у кусково-однорідних середовищах з рідиною є складною мультифізичною задачею. Класичні методи чисельного аналізу ефективні лише в класичному випадку, а при складній геометрії значні перспективи має використання методу R-функцій, який дозволяє аналітично описувати геометрію області та будувати структури розв'язку, що точно задовольняють всі крайові умови задачі.

Список використаних джерел:

1. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-Functions in boundary value problems in mechanics. Applied Mechanics Reviews. Vol. 48, № 4. Pp. 151-188. DOI: 10.1115/1.3005099.