Проблемы бионики
1998. Вып. 49. С. 46—53

ХТУРЭ

УДК 519.7

О.Г. ЛЕБЕДЕВ, В.А. ПОХОДЕНКО, С.Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ВЕКТОРАМИ*

Многие сигналы естественно представлять в виде векторов, т.е. наборов отдельных компонентов (признаков) [1]. Число компонентов вектора называется его размерностью. В роли компонентов вектора обычно выступают вещественные числа [2]. Множество сигналов, каждый из которых представлен в виде вектора размерности n, называется пространством размерности n. Например, световые излучения обычно представляют в виде спектров, т.е. конечных или бесконечных наборов вещественных чисел. Говорят о двумерности поля зрения человека, имея в виду, что каждая его точка может быть охарактеризована парой вещественных чисел - ее координатами. Говорят также о трехмерном пространстве цветовых ощущений человека, о многомерном пространстве векторов, характеризующих место работы человека (зарплата, продолжительность отпуска, расстояние от места жительства до места работы и т.п.). Действия над векторами чаще всего описываются линейными операциями. Пространство, на котором определены линейные операции, называется *линейным* [3]. Примерами линейных операций могут служить сложение световых излучений, усиление или ослабление интенсивности светового излучения, преобразование светового излучения в цвет его ощущения, оценка человеком места работы и т.п. В этой статье ставится задача отыскания таких полных перечней свойств, с помощью которых можно было бы осуществлять компараторную идентификацию объектов, подпадающих под понятие линейного пространства и под понятие линейной операции над векторами линейных пространств. Разработку сформулированной проблемы начнем с идентификации сигналов, описываемых в виде векторов некоторого пространства.

Пусть A - множество каких-нибудь сигналов. Предположим, что на A определены два предиката эквивалентности $E_1(x, y)$ и $E_2(x, y)$, удовлетворяющие условию:

$$\forall x, y \in A\ (E_1(x, y) \wedge E_2(x, y) \supset x = y). \qquad (1$$

С помощью условия (1) в дальнейшем будет введено понятие двумерного пространства сигналов. Чтобы пояснить, как это делается, мы предварительно решим задачу о введении поля зрения человека. Рассмотрим испы-

* Статья публикуется в авторской редакции.

туемого, голова которого неподвижна в пространстве и находится в вертикальном положении. Один глаз испытуемого смотрит прямо перед собой, его взгляд направлен на неподвижную точку фиксации, второй глаз закрыт. Испытуемому по очереди предъявляют различные точки ξ окружающего физического пространства и предлагают ответить на вопрос, видит он их или нет. В роли предъявляемой точки может использоваться, например, точечный источник света, перемещаемый в пространстве. Пусть M - множество всех точек пространства, $N(\xi)$ - предикат на M, реализуемый испытуемым в данном опыте. Предикат N делит все пространство M на две части: если $N(\xi)=1$, то точка ξ находится в зоне видимости $N\subseteq M$ испытуемого; если же $N(\xi)=0$, то - за ее пределами, т.е. в области $M\backslash N$. Область N имеет вид конуса неправильной формы (приблизительно кругового) с вершиной в оптическом центре глаза.

Из множества N произвольно выбираем две точки ξ и η и предъявляем их испытуемому. Последний должен установить, находятся ли они в точности одна за другой или нет. Своими ответами испытуемый реализует некоторый предикат $Q(\xi, \eta)$ на $N\times N$. Если $Q(\xi, \eta)=1$, то субъективные образы x и y точек ξ и η совмещаются друг с другом в поле зрения испытуемого; если же $Q(\xi, \eta)=0$, то не совмещаются. Опыт показывает, что предикат Q рефлексивен, симметричен и транзитивен (с той точностью, в пределах которой значения предиката Q можно считать однозначными). Действительно, пусть точкам ξ, η и ζ физического пространства N соответствуют их образы x, y, z - точки поля зрения испытуемого. Тогда при совпадении точек ξ и η совпадут и их субъективные образы x и y в поле зрения; если образы x и y двух точек в паре (ξ, η) совпадают, то они совпадут и для пары точек (η, ξ); если образы x, y и y, z точек в парах (ξ, η) и (η, ζ) совпадают, то образы x и z совпадут и для пары точек (ξ, η). Следовательно, предикат $Q(\xi, \eta)$ есть эквивалентность. Он разбивает всю видимую часть N физического пространства M на слои, каждый из которых представляет собой бесконечный луч, исходящий из оптического центра глаза. Каждый такой луч определяет одну точку поля зрения. Множество всех точек поля зрения обозначаем символом A.

Будем предъявлять испытуемому пары (x, y) точек x и y поля зрения, предлагая ему установить, видятся ли они на одной вертикали или нет. В другой серии экспериментов испытуемому предлагается установить, видятся ли точки x и y на одной горизонтали или нет. Важно подчеркнуть, что от испытуемого требуется определить не взаимное положение двух точек физического пространства, а лишь субъективно воспринимаемое взаимное положение образов этих точек. Если испытуемому кажется, что предъявленные ему две точки поля зрения находятся на одной вертикали, то отсюда еще не следует, что соответствующие им точки физического пространства тоже лежат на одной вертикали. Своими ответами испытуемый реализует два предиката $E_1(x, y)$ и $E_2(x, y)$. Если $E_1(x, y)=1$, то точки x и y поля зрения кажутся испытуемому находящимися на одной вертикали, если же $E_1(x, y)=0$, то они кажутся не находящимися на ней. Если $E_2(x, y)=1$, то точки x и y поля зрения воспринимаются лежащими на одной горизонтали, если же $E_2(x, y)=0$, то они лежат на разных горизонталях. Опыты показывают, что предикаты E_1 и E_2 суть эквивалентности. Они формируют два разбиения поля зрения: одно - в виде семейства горизонтальных линий и другое - в виде семейства вертикальных линий. Ясно, что любые вертикальная и горизонтальная линии могут пересекаться не более чем в одной точке поля зрения. Случай, когда вертикаль и горизонталь не пересекаются, возможен: это происходит тогда, когда точка их пересечения попадает в область слепого пятна или же выходит за границы поля зрения. Таким образом, предикаты E_1 и E_2 удовлетворяют условию (1), которое в данной интерпретации гласит: если точки x и y поля зрения A лежат одновременно на одной вертикальной линии и на одной горизонтальной , то они совпадают друг с другом, т.е. $x=y$. Образуем множество B_1 всех вертикальных и множество B_2 всех горизонтальных линий в поле зрения A. Теперь каждую точку x поля зрения A можно представить в виде пары соответствующих ей координат (u_1, u_2), где $u_1 \in B_1$ - вертикаль, проходящая через точку x, и $u_2 \in B_2$ - горизонталь, проходящая через ту же точку. Таким образом, множество точек поля зрения A мы превратили за счет введения двух эквивалентностей E_1 и E_2 в двумерное пространство T, являющееся подмножеством декартова произведения $B_1 \times B_2$ множеств B_1 и B_2.

В общем случае двумерное пространство T для множества A вводится предикатами E_1 и E_2, удовлетворяющими условию (1) следующим образом. Формируем разбиения B_1 и B_2 и характеристические функции $f_1{:}A \to B_1$ и $f_2{:}A \to B_2$, соответствующие эквивалентностям E_1 и E_2. Классы $u_1=f_1(x)$ и $u_2=f_2(x)$ разбиений B_1 и B_2 принимаем в качестве абсциссы и ординаты точки x. Пара (u_1, u_2) однозначно определяет точку x. Совокупность всех пар (u_1, u_2), соответствующих точкам x множества A, принимаем в роли двумерного пространства T для множества A. Пространство T является подмножеством декартова произведения $B_1 \times B_2$ множеств B_1 и B_2. Множества B_1 и B_2 принимаем в роли координатных осей пространства T. В том случае, когда пространство T совпадает с $B_1 \times B_2$, оно называется *полным*. Для полноты пространства T необходимо и достаточно, чтобы эквивалентности E_1 и E_2, его вводящие, дополнительно удовлетворяли условию:

$$\forall x_1, x_2 \in A\ \exists y \in A(E_1(x_1, y) \wedge E_2(x_2, y)). \qquad (2)$$

Если T - полное пространство, то существует сюръекция $g{:}B_1 \times B_2 \rightarrow A$, взаимно однозначно переводящая векторы (u_1, u_2) пространства T в соответствующие им точки x множества A. Обратный перевод точки x множества A в компоненты u_1 и u_2 ее вектора (u_1, u_2) осуществляется функциями f_1: $A \rightarrow B_1$ и f_2: $A \rightarrow B_2$. Изложенный выше способ введения двумерного пространства легко обобщается на случай пространства произвольной размерности n. Неполное пространство T для множества A вводится эквивалентностями $E_1, E_2, \ldots, E_n$ на A, удовлетворяющими условию:

$$\forall x, y \in A\ (E_1(x, y) \wedge E_2(x, y) \wedge \ldots \wedge E_n(x, y) \supset x = y). \qquad (3)$$

Для полноты пространства T необходимо и достаточно, чтобы эквивалентности $E_1, E_2, \ldots, E_n$, его вводящие, дополнительно удовлетворяли условию:

$$\forall x_1, x_2 \ldots x_n \in A \exists y \in A(E_1(x, y) \wedge E_2(x, y) \wedge \ldots \wedge E_n(x, y)). \qquad (4)$$

Пространство T для множества A вводится предикатами $E_1, E_2, \ldots, E_n$, удовлетворяющими условию (3), следующим образом. Формируем разбиения $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и характеристические функции $f_1{:}A \rightarrow B_1$, $f_2{:}A \rightarrow B_2, \ldots, f_n{:}A \rightarrow B_n$, соответствующие эквивалентностям $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Классы $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x), \ldots, u_n = f_n(x)$ разбиений $E_1, E_2, \ldots, E_n$ принимаем в качестве координат точки x. Набор $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ однозначно определяет точку x. Совокупность всех наборов $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, соответствующих точкам x множества A, принимаем в роли n-мерного пространства для множества A. Пространство T является подмножеством декартова произведения $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Множества $B_1, B_2, \ldots, B_n$ принимаем в роли координатных осей пространства T. Только в том случае, когда пространство T полно, оно совпадает с декартовым произведением $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$. Любое n-мерное пространство T для множества A полностью характеризуется множествами $B_1, B_2, \ldots, B_n$, сюръекциями $f_1{:}A \rightarrow B_1$, $f_2{:}A \rightarrow B_2, \ldots, f_n{:}A \rightarrow B_n$ и однозначным отображением g, действующим из $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ в A. Для полного пространства T отображение g превращается в сюръекцию g: $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \rightarrow A$. Сюръекции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ однозначно определяют эквивалентности $E_1, E_2, \ldots, E_n$, а наличие однозначного отображения g обеспечивает выполнение условия (3). Наличие же сюръекции g обеспечивает выполнение условия (4).

Пусть A - множество и $T = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ - его полное пространство. Предположим, что $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = R$ - множество вещественных чисел с заданными на нем операциями сложения и умножения. Множество R называется *числовым полем*, а его элементы - *скалярами*. Множество $T=R^n$ называется *n-мерным арифметическим пространством* [4], если на нем введены операции $x+y$ сложения векторов x, $y \in R^n$ и операция αx умножения вещественного числа $a \in R$ на вектор $x \in R^n$, определяемые следующим образом: если $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $y=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, то

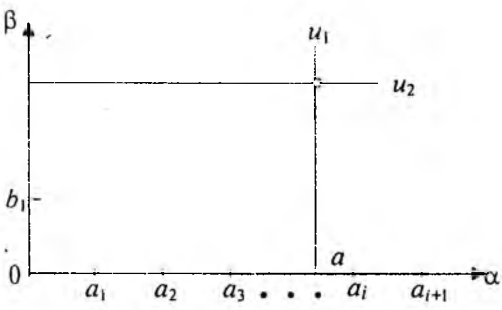
$$x+y=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n); \tag{5}$$

если $x=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то

$$ax=(a\alpha_1, a\alpha_2, \ldots, a\alpha_n). \tag{6}$$

Из этих определений следует, что для любых α, β, $\gamma \in R$ и x, y, $z \in R^n$ $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$, $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$, $0+\alpha=\alpha$, $\alpha+(-\alpha)=0$, $\alpha 1=\alpha$, $\alpha(1/\alpha)=1$, $x+y=y+x$, $(x+y)+z=x+(y+z)$, $x+0=x$, $x+(-x)=0$, $1x=x$, $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$. Здесь $0=(0,0, \ldots,0)$, $-x=$ $=(-1)x$.

Пользуясь приведенными определениями, покажем, что поле зрения человека можно с определенным приближением идентифицировать как двумерное арифметическое пространство. С этой целью сначала установим, что совокупности B_1 и B_2 всех вертикальных и горизонтальных линий поля зрения A можно отождествить с множествами вещественных чисел. Проведем горизонталь α и вертикаль β через точку фиксации 0 поля зрения (см. рисунок), называя эти линии *координатными осями поля зрения* - осью абсцисс и осью ординат. Поставим во взаимно однозначное соответствие каждой вертикали u_1 точку a ее пересечения с осью абсцисс α и каждой горизонтали u_2 - точку b ее пересечения с осью ординат β. Вместо вертикалей и горизонталей поля зрения теперь будем рассматривать соответствующие им точки на осях абсцисс и ординат. Выберем на оси абсцисс какую-нибудь точку a_1, близкую к точке фиксации 0, но не совпадающую с ней. Затем правее точки a_1 находим на оси α точку a_2, такую



чтобы расстояния между точками 0, a_1 и a_1, a_2 совпали друг с другом. После этого справа от точки a_2 отыскиваем точку a_3, исходя из условия равенства расстояний между точками 0, a_1 и a_2, a_3, и т.д.

Операцию отыскания точки a_{i+1} по точке a_i отождествляем с функцией счета $a_{i+1}=a_i+1$, точку a_1 отождествляем с единицей натурального ряда, а бесконечный ряд точек a_1, a_2,... на оси абсцисс отождествляем со всем натуральным рядом. Все четыре аксиомы натурального ряда, приведенные в работе [5], выполняются. Приближенность такого способа идентификации поля зрения обнаруживается в том, что после выполнения некоторого конечного числа шагов мы доходим до границы поля зрения и ряд точек обрывается. Аналогичным образом на оси α выявляются точки, соответствующие рациональным и вещественным числам, а также выявляются операции над этими точками, которые может производить испытуемый, соответствующие сложению и умножению чисел. Кроме того, выявляется способность испытуемого упорядочивать точки поля зрения на оси абсцисс, которую идентифицируем как отношение порядка на множестве вещественных чисел. Неточность такого способа идентификации состоит в том, что точки, достаточно близкие друг к другу, глазом не различаются ввиду его ограниченной разрешающей способности, кроме того, операции сложения и умножения точек поля зрения на оси α оказываются не всюду определенными, а частичными всякий раз, когда сумма или произведение представляет собой точку, выходящую за пределы поля зрения или попадающую в область слепого пятна. В остальном все аксиомы теории вещественных чисел, перечисленные в работе [6], выполняются. Аналогично, точки оси ординат поля зрения также идентифицируем как вещественные числа. При введении точки b_1, соответствующей единице натурального ряда на оси β, следует учесть, что расстояния между точками 0, a_1 и 0, b_1 должны совпадать. Сложение произвольных точек поля зрения и умножения их на число формализуется с помошью определений (5) и (6). Оказывается, что испытуемый обладает способностью производить такие операции. Возможность производить эти действия в конечном счетѐ основывается на способности испытуемого устанавливать порядок на множестве расстояний между точками поля зрения.

Рассмотрим еще одну необходимую для дальнейшего изложения содержательную интерпретацию арифметического пространства. Речь идет о представлении световых излучений векторами n-мерного арифметического пространства. Как известно, любое световое излучение можно разложить призмой в спектр, т.е. на простые составляющие. Субъективно спектр светового излучения воспринимается как линейно упорядоченнное в поле зрения множество зрительных ощущений разной цветности. Полученный отрезок разбиваем на n участков a_1, a_2, ..., a_n, выбирая число n и размеры участков с таким расчетом, чтобы цветность на каждом участке не менялась. Мощность светового излучения измеряем *болометром*, представляющим собой термометр специальной конструкции. Опыт показывает, что имеет место взаимно однозначное соответствие между показаниями болометра и яркостью зрительного ощущения соответствующей линии в спектре. Этот факт дает возможность идентифицировать совокупность B_i всех яркостей

i-й линии спектра как множество вещественных чисел. Пусть A - множество всех световых излучений. Каждое из множеств B_i ($i=\overline{1,n}$) абстрактно вводится с помощью эквивалентности E_i, определяемой следующим образом: если яркости зрительных ощущений i-й линии спектров двух световых излучений совпадают, то $E_i(x, y)=1$, если же не совпадают, то $E_i(x, y)=0$.

Опыт показывает, что испытуемый способен практически воспроизводить своим поведением каждый из предикатов E_i с довольно высокой точностью. Кроме того, оказывается, что предикаты E_i подчиняются условиям (3) и (4). Следовательно, эквивалентностями E_i можно ввести полное пространство $T=B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ размерности n, соответствующее множеству A. Сложение, умножение и порядок на множествах B_i определяем как соответствующие операции над мощностями соответствующих спектральных линий, рассматривая эти мощности просто как вещественные числа. Сложение световых излучений определяем равенством (5) как покоординатное сложение их спектральных линий. Умножение вещественного числа на световое излучение определяем равенством (6). Физически сложение излучений осуществляется простым совмещением их в пространстве. Умножение числа на световое излучение достигается диафрагмированием светового потока (это число представлено площадью отверстия диафрагмы) или же приближением (удалением) источника света от освещаемой поверхности (в этом случае множитель светового излучения обратно пропорционален квадрату расстояния).

В роли базисных элементов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ пространства T можно взять n излучений $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, ..., $p_n(\lambda)$, заданных соответственно на интервалах длин волн $[\lambda_0, \lambda_1]$, $[\lambda_1, \lambda_2]$, ..., $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$. Каждое из этих излучений имеет на интервале своего задания постоянную интенсивность и охватывает единичную площадь. Здесь $[\lambda_0, \lambda_n]$ - диапазон длин волн электромагнитных колебаний, видимых глазом (λ_0=380 нм, λ_n=780 нм) [6]. Пусть $x(\lambda)$ - непрерывный спектр светового излучения x, понимаемый в физическом смысле этого слова. Определим числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ следующим образом:

$$\alpha_i = \sum_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} x(\lambda) d\lambda. \tag{7}$$

Выбирая в роли n достаточно большое натуральное число и разбивая достаточно равномерно интервал $[\lambda_0, \lambda_n]$ точками $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, всегда можно добиться того, чтобы спектр $x(\lambda)$ любого излучения x с требуемой точностью совпал со спектром

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(\lambda)$$

аппроксимирующего излучения. Это означает, что с достаточной точностью выполняется равенство

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(\lambda) , \tag{8}$$

следовательно числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ можно принять в роли координат вектора x.

Характер световых излучений таков, что все свойства конечномерного векторного пространства для них выполняются в пределах точности измерения спектров излучений. Правда, реализуются эти свойства на несколько суженной основе. Дело в том, что спектр $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ любого реального излучения не может иметь отрицательных компонентов, поскольку числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ задают мощность излучения на отдельных участках его спектра, которая всегда неотрицательна. Поэтому выполнение свойств арифметического векторного пространства может быть экспериментально продемонстрировано не для всех векторов пространства T, а только для некоторой его части T_0, называемой *положительным конусом* [8]. Таким образом, операции над скалярами и векторами, введенные в векторном пространстве, в физическом смысле оказываются не всюду определенными, а частичными. Тем не менее ничто не мешает при математических действиях со скалярами и векторами использовать также и физически неинтерпретируемые спектры с отрицательными компонентами, когда это окажется целесообразным. Так например, к спектру реального излучения можно прибавить спектр фиктивного излучения с отрицательными компонентами при условии, что в результате получится спектр излучения из множества T_0, т.е. такого излучения, которое можно физически предъявить испытуемому. Свойства арифметического пространства можно условно распространить на все векторы полного пространства T, но при этом надо иметь в виду, что эти свойства приобретают физический смысл только в том случае, когда в них будут фигурировать лишь векторы из множества T_0.

Список литературы: 1. *Хедли Дж.* Линейная алгебра: Пер. с англ. М.: Наука, 1984. 415 с. 2. *Шилов Г.Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969. 432 с. 3. *Шикин Е.В.* Линейные пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1987. 312 с. 4. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 392 с. 5. *Баталин А.В., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко С.Ю.* О теории натурального ряда // АСУ и приборы автоматики. 1998. № 107. С. 24-31. 6. *Баталин А.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко С.Ю.* О теории рациональных и вещественных чисел // Там же. С. 32-45. 7. *Мешков В.В.* Основы светотехники: В 2 ч. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. Ч. 2. 416 с. 8. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы, общая теория: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1974. 895 с.

Поступила в редколлегию 24.11.97