

УДК 517.927:517.95]:519.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОГО КАТОЛІЗУ ІЗ ЛІНІЙНИМ РОЗПАДОМ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Вороненко М.Д.

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Гибкина Н.В.

e-mail: mykyta.voronenko@nure.ua

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

The paper discusses constructive methods for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations $-u'' + k^2u = f(x, u)$ where $f(u)$ is a nonnegative and continuous function for $u \geq 0$. It highlights the use of the two-sided iterative methods to construct two sequences that converge to the exact solution from both sides. This approach allows for a posteriori error estimate at each step of the iterative process. The effectiveness of the developed method is demonstrated through computational experiments.

Розглянемо задачу визначення стаціонарного профілю концентрації реагенту всередині пористої гранули катализатора із лінійним розпадом. Такі задачі виникають при дослідженні процесів окиснення пористих матеріалів, наприклад, при дифузії кисню всередину вугільної частинки [1].

Стаціонарний профіль концентрації реагенту описує закон дифузії Фіка. Вважатимемо, що гранула має форму видовженого циліндра, а отже, задачу можна вважати одновимірною. Якщо відбувається лінійний розпад, то концентрація речовини u описується рівнянням $-u'' + k^2u = f(u)$.

Вважатимемо, що потік речовини через лівий кінець гранули $x = 0$ дорівнює нулю, а правий кінець гранули $x = 1$ омивається чистим розчинником, який одразу виносить усі залишки реагенту, причому хімічна реакція є реакцією дробового порядку. Тоді маємо задачу:

$$-u'' + k^2u = u^p, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2)$$

де $p \in (0, 1)$ – ступінь нелінійної залежності хімічної реакції.

На конусі K_+ невід'ємних у $C[0, 1]$ функцій крайова задача (1), (2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) u^p(s) ds,$$

де $G(x, s) = \frac{1}{k \operatorname{sh} k} \begin{cases} \operatorname{ch} kx \operatorname{sh} k(1-s), & 0 \leq x \leq s, \\ \operatorname{ch} ks \operatorname{sh} k(1-x), & s < x \leq 1, \end{cases}$ – функція Гріна відповідної мішаної крайової задачі для оператора $-u'' + k^2u$ на відрізьку $[0, 1]$.

Розглянемо оператор T , що діє у $C[0, 1]$ за правилом

$$T(u)(x) = \int_0^1 G(x, s) u^p(s) ds.$$

Можна довести, що оператор T на конусі K_+ має такі властивості: є додатним, цілком неперервним, монотонним, угнутим та u_0 -угнутим, де

$$u_0(x) = \int_0^1 G(x, s) ds.$$

Для монотонного оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, де $v_0(x) = \alpha u_0(x)$, $w_0(x) = \beta u_0(x)$, а константи α і β ($0 \leq \alpha < \beta$) обираються з умов $T(v_0) \geq v_0$, $T(w_0) \leq w_0$. Далі розглянемо схему послідовних наближень

$$v_{n+1}(x) = \int_0^1 G(x, s) v_n^p(s) ds, \quad w_{n+1}(x) = \int_0^1 G(x, s) w_n^p(s) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Послідовність $\{v_n(x)\}$ не спадає за конусом K_+ , а послідовність $\{w_n(x)\}$ не зростає за конусом K , тобто мають місце нерівності

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0,$$

де u^* – точний розв’язок задачі (1), (2).

Отже, побудовано дві ітераційні послідовності, що збігаються до точного розв’язку задачі (1), (2) зверху і знизу відповідно. Наближеним розв’язком крайової задачі (1), (2) на n -й ітерації буде функція $u_n(x) = \frac{v_n(x) + w_n(x)}{2}$, при цьому

похибка оцінюється нерівністю $\|u_n - u^*\| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 1]} (w_n(x) - v_n(x))$.

Наближені розв’язки знаходились з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$. У таблиці наведено залежність норми наближеного розв’язку $\|u_n\|$ та кількості ітерацій n від p ($k=1$).

p	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\ u_n\ $	0,3064	0,2062	0,1012	0,0192	0,0000048
n	4	9	15	26	36

Список використаних джерел:

1. Aris R. The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts. Oxford : Clarendon Press, 1975. 444 p.
2. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв’язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57 – 66. DOI 10.15588/1607-3274-2019-1-6