ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ КООРДИНАТ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ВИБРАЦИОННОГО СТЕНДА

А. Е. Божко
Харьков

Движение платформы электродинамического вибрационного стенда описывается системой уравнений [4]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\vartheta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = R \cdot i\omega_0^2,$$

$$L\frac{di}{dt} + R_l i = U - C_1\frac{dy}{dt}, \qquad (1)$$

$$\vartheta = \frac{h}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad R = \frac{B_6 \cdot l}{m},$$

где y — амплитуда вибраций;
m — масса виброплатформы;
h — коэффициент демпфирования;
c — коэффициент жесткости пружин;
ω_0 — собственная частота колебаний платформы;
ϑ — коэффициент затухания;
R_l, L — сопротивление и индуктивность электрической цепи подвижной катушки;
U — напряжение управления;
C_1 — э. д. с., индуктируемая в подвижной катушке при перемещении ее на единицу скорости.

Для воспроизведения на стенде кривой записи эксплуатационных вибраций аппаратуры уравнение (1) преобразуется в координатной форме относительно ошибки воспроизведения к следующему виду:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \qquad (2)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{a_2}{a_3}x_3 - \frac{a_1}{a_3}x_2 - \frac{a_0}{a_3}x_1 - \frac{b_0}{a_3}U, \quad |U| \leqslant 1,$$

где x_1, x_2, x_3 — фазовые координаты ошибки воспроизведения (x_1 — амплитуда, x_2 — скорость, x_3 — ускорение);

$$a_0 = \omega_0^2 R_l; \quad a_1 = L\omega_0^2 + 2\vartheta R_l + 1;$$

$$a_2 = R_l + 2\vartheta L; \quad a_3 = L; \quad b_0 = B_3 \cdot l.$$

Уравнения (2) в матричном виде

$$\dot{x} = Ax + bU, \quad |U| \leqslant 1, \qquad (3)$$

где

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underline{a_0} & \underline{a_1} & \underline{a_2} \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{Vmatrix} \quad \text{вектор } b = \left(0,\ 0,\ -\frac{b_0}{a_3}\right)$$

$$\text{вектор } x = (x_1,\ x_2,\ x_3).$$

Исследования, проведенные Ю. Н. Соколовым [5], показали, что при синтезе оптимального управления динамическим объектом целесообразно решать задачу в системе координат, при которой в каждое уравнение входит только один координатный параметр.

Переход к новой системе координат y можно осуществить с помощью линейного преобразования

$$x = Ty, \quad |T| \neq 0, \tag{4}$$

где T — преобразующая матрица ($T = \| t_{ij} \|$).

В новой системе уравнение вибростенда

$$y_i = \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^{3} b_j U, \quad |U| \leqslant 1, \tag{5}$$

или в векторной форме

$$\dot{y} = Jy + \beta U, \quad |U| \leqslant 1. \tag{6}$$

Существо координатного преобразования состоит в следующем. Подставим выражение (4) в (3):

$$T\dot{y} = ATy + bU. \tag{7}$$

Умножим обе части формулы (7) на матрицу T^{-1}, обратную матрице T:

$$\dot{y} = T^{-1}ATy + T^{-1}bU. \tag{8}$$

Сравнивая уравнения (6) и (8), приходим к выводу, что

$$J = T^{-1}AT,$$

$$\beta = T^{-1}b = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3).$$

Для решения задачи преобразования необходимо определить матрицу T, удовлетворяющую условию

$$J = T^{-1}AT = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}, \tag{9}$$

где $\lambda_i (i = 1,\ 2,\ 3)$ — корни характеристического уравнения системы (2).

Для электродинамического стенда искомая матрица T найдена с учетом полученных собственных векторов матрицы A, соответствующих корням $\lambda_i (i = 1,\ 2,\ 3)$:

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_3^2} \\ \lambda_1 & 1 & \frac{1}{\lambda_3} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Определим уравнение проекций оптимальных траекторий координат стенда на плоскости фазового пространства y_1, y_2, y_3. Так как собственные значения матрицы системы электродинамического вибростенда имеют

комплексные члены с отрицательными действительными частями, оптимальный процесс протекает в n интервалах не во всей области оптимальных траекторий, а лишь в некоторой ее подобласти, содержащей начало координат как внутреннюю точку, т. е. многообразие L_{n-1} является частью оптимальной гиперплоскости переключения [3, 6].

Уравнения проекций фазовых траекторий на плоскости y_1y_3 и y_2y_3 находим путем интегрирования уравнений, которые могут быть получены из выражения (5), представленного в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \beta_1 U, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 + \beta_2 U, \\ \frac{dy_3}{dt} &= \lambda_3 \beta_3 + \beta_3 U. \end{aligned} \tag{10}$$

Исключим в системе уравнений (10) параметр времени:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dy_3} &= \frac{\lambda_1 y_1 + \beta_1 U}{\lambda_3 y_3 + \beta_3 U}, \\ \frac{dy_2}{dy_3} &= \frac{\lambda_2 y_2 + \beta_2 U}{\lambda_3 y_3 + \beta_3 U}. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (11) по виду аналогичны уравнениям (8.13) для сервомотора с переменной скоростью ($V \neq 0$), приведенным в работе [3].

В этом случае необходимо использовать нелинейное преобразование

$$z = \frac{\beta_3 U}{\lambda_3} \ln (\lambda_3 y_3 + \beta_3 U). \tag{12}$$

Тогда вместо системы (11) получим

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dz} &= \frac{\lambda_1 y_1}{\beta_3 U} + \frac{\beta_1}{\beta_3}, \\ \frac{dy_2}{dz} &= \frac{\lambda_2 y_2}{\beta_3 U} + \frac{\beta_2}{\beta_3}. \end{aligned} \tag{13}$$

Соотношения (13) представляют собой систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dz} &= A_1 y_1 + B_1 y_2 + C_1', \\ \frac{dy_2}{dz} &= A_2 y_1 + B_2 y_2 + C_2'. \end{aligned} \tag{14}$$

Для рассматриваемого случая

$$A_1 = \frac{\lambda_1}{\beta_3 U}, \quad B_1 = 0, \quad C_1' = \frac{\beta_1}{\beta_3},$$

$$A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_3 U}, \quad C_2' = \frac{\beta_2}{\beta_3}.$$

Характеристическое уравнение системы (14)

$$\begin{vmatrix} A_1 - \lambda' & 0 \\ 0 & B_2 - \lambda' \end{vmatrix} = (\lambda' - A_1)(\lambda' - B_2) = 0$$

имеет корни λ_1' и λ_2'. Этим корням соответствуют частные решения

$$\begin{aligned} y_1 &= D_1 e^{\lambda_1' z} + E_1 e^{\lambda_2' z}, \\ y_2 &= D_2 e^{\lambda_1' z} + E_2 e^{\lambda_2' z}. \end{aligned} \tag{15}$$

Коэффициенты D_i, E_i ($i = 1, 2$) определяются из системы линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}(A_1 - \lambda_1')\, D_1 + B_1 D_2 &= 0,\\ A_2 D_1 + (B_2 - \lambda_1')\, D_2 &= 0,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}(A_1 - \lambda_2')\, E_1 + B_1 E_2 &= 0,\\ A_2 E_1 + (B_2 - \lambda_2')\, E_2 &= 0.\end{aligned} \tag{17}$$

После подстановки в (16) и (17) значений корней λ_1' и λ_2' и коэффициентов A_i, B_i ($i = 1, 2$) получаем

$$\begin{aligned}(B_2 - A_1)\, D_2 &= 0,\\ (A_1 - B_2)\, E_1 &= 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Из (18) очевидно, что коэффициенты D_1, E_1 могут принимать произвольные значения, определяемые начальными условиями системы вибростенда.

Решение однородной системы имеет вид

$$\begin{aligned}y_2 &= D_2 e^{A_1 z},\\ y_1 &= E_1 e^{B_1 z}.\end{aligned} \tag{19}$$

Общее решение системы уравнений (14) дополнительно включает частные решения, соответствующие свободным членам C_1', C_2':

$$\begin{aligned}y_2 &= k_1' + D_2 e^{A_1 z},\\ y_1 &= k_2' + E_1 e^{B_1 z}.\end{aligned} \tag{20}$$

Постоянные k_1' и k_2' определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}0 &= A_1 k_1' + B_1 k_2' + C_1',\\ 0 &= A_2 k_1' + B_2 k_2' + C_2',\end{aligned} \tag{21}$$

откуда

$$k_1' = -\frac{C_1'}{A_1}, \quad k_2' = -\frac{C_2'}{B_2}.$$

Таким образом, учитывая, что корни λ_1' и λ_2' являются комплексными, выражения (15) проводятся к виду [3]

$$\begin{aligned}y_1 &= k_1' + A' e^{-\alpha' z} \cos(gz + \varphi'),\\ y_2 &= k_2' - A' e^{-\alpha' z} \sin(gz + \varphi').\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь α' — действительная часть корней системы (14);

A' и φ' — постоянные, определяемые каждым интервалом оптимального процесса.

Из уравнений (22) находятся выражения проекций фазовых траекторий на плоскость $y_1 y_2$. Для этого каждое уравнение (22) возводится в квадрат и полученные выражения складываются. В результате имеем

$$(y_1 - k_1')^2 + (y_2 - k_2')^2 = A'^2 e^{-2\alpha' z}. \tag{23}$$

Разделив обе части второго уравнения системы (22) на соответствующие части первого уравнения, получим

$$gz + \varphi' = -\operatorname{arctg} \frac{y_2 - k_2}{y_1 - k_1'}. \tag{24}$$

Окончательно для проекций фазовых траекторий на плоскость y_1y_2 выражение (23) принимает вид

$$(y_1 - k_1')^2 + (y_2 - k_2')^2 = A'^2 \exp\left[\frac{2\alpha'}{g}\left(\varphi' + \operatorname{arctg}\frac{y_2 - k_2'}{y_1 - k_1'}\right)\right]. \qquad (25)$$

В соответствии с выражением (25) проекции фазовых траекторий на плоскость y_1y_2 представляют собой логарифмические спирали.

Практически можно ограничиться тремя интервалами оптимального движения системы электродинамического стенда в начало координат [3]. В этом случае для отдельных интервалов введем следующие обозначения. Для первого интервала

$$U = U_0, \quad A' = A_{01}, \quad \varphi' = \varphi_1, \quad \text{тогда} \quad k_1' = +k_{10}, \quad k_2' = +k_{20},$$

для второго

$$U = -U_0, \quad A' = A_{02}, \quad \varphi' = \varphi_2, \quad \text{тогда} \quad k_1' = -k_{10}, \quad k_2' = -k_{20},$$

для третьего

$$U = U_0, \quad A' = -U_0, \quad \varphi' = 0 \quad \text{и} \quad k_1' = k_{10}, \quad k_2' = k_{20}.$$

Вследствие окончания переходного процесса на третьем интервале предполагаем, что система стенда движется вдоль нулевой траектории в начало координат фазового пространства y_1, y_2, z. В этой области оптимальная поверхность переключения образована совокупностью траекторий, по которым изображающая точка движется на втором интервале оптимального процесса. Концы траекторий располагаются на нулевых траекториях третьего интервала.

Учитывая обозначения, запишем уравнения (23), (24) для второго интервала:

$$\begin{gathered}(y_1 + k_{10})^2 + (y_2 + k_{20})^2 = A_{02}^2 e^{2\alpha' z}, \\ \varphi_2 = gz - \operatorname{arctg}\frac{y_2 + y_{20}}{y_1 + k_{10}}.\end{gathered} \qquad (26)$$

Уравнения оптимальной поверхности переключения записываются в виде [3]

$$\begin{gathered}\sqrt{(y_1 + k_{10})^2 + (y_2 + k_{20})^2} = A_{02}(\varphi')\, e^{\alpha' z}, \\ \varphi' = gz - \operatorname{arctg}\frac{y_2 + k_{20}}{y_1 + k_{10}}.\end{gathered} \qquad (27)$$

Величина $A_{02}(\varphi')$ определяется путем совместного решения во второй точке переключения управления $U[N_2(y_{12}, y_{22}, z_2)]$, уравнений (22), записанных для второго и третьего интервалов оптимального переходного процесса:

$$\begin{gathered}A_{02} \approx e^{-\alpha' z_2}\sqrt{4 - 4e^{\alpha' z_2}\cos(gz_2) + e^{-2\alpha' z_2}}, \\ \varphi' \approx gz_2 - \operatorname{arctg}\frac{e^{-\alpha z_2}\sin(gz_2)}{2 - e^{-\alpha z_2}\cos(gz_2)}.\end{gathered} \qquad (28)$$

При $U_0 = +1$ и $U_0 = -1$ получаем уравнения поверхностей L_2^- и L_2^+, которые заполнены соответствующими семействами траекторий движения системы стенда. Стыкуя поверхности L_2^- и L_2^+ вдоль линии нулевых траекторий, проходящих через начало координат, получаем проекции оптимальных фазовых траекторий, представляющих собой логарифмические спирали. Аналогичные решения могут быть проведены при нахождении проекций фазовых траекторий на плоскости y_1y_2, y_2y_3 и в системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. С. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. И. П. Лыткин. Об одной задаче синтеза оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 1.
3. А. А. Павлов. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. Изд-во «Наука», 1966.
4. Ю. И. Иорши. Виброметрия. Изд-во «Машгиз», 1963.
5. Ю. Н. Соколов. Синтез оптимального управления объектами проветривания шахт. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1966.
6. Н. Н. Михайлов, Ж. А. Новосельцева. Оптимальные процессы в системе третьего порядка с комплексными полюсами. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 9.

О ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ С ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ ЦИФРА — АНАЛОГ

Е. Я. Иванченко, В. А. Каменев

Харьков

В последнее время довольно широкое распространение получили системы с переменной структурой. Это объясняется в первую очередь тем, что принцип переменности структуры позволяет обеспечить высококачественное управление свободным движением объектов с постоянными параметрами, а в случае изменения параметров объекта в широком диапазоне построить систему, малочувствительную к этим изменениям. Важная с практической точки зрения особенность рассматриваемого класса систем заключается в том, что для реализации необходимого закона управления часто не требуется информации ни о величине изменяющихся параметров объекта, ни о приложенных к нему возмущениях.

Наиболее полно системы с переменной структурой исследованы в работе [1]. В ней приводится довольно полная библиография по системам с переменной структурой. Частотные методы исследования систем с переменной структурой изложены в работах [2, 3].

В настоящее время существует достаточно широкий класс цифровых следящих систем, в которых ставится задача отработки рассогласования с ошибкой, не превышающей шага квантования. Очевидно, для таких систем может быть широко применен принцип переменности структуры, а для их исследования — метод гармонического баланса. Статическая характеристика преобразователя цифра — аналог с переключающим элементом (для смены структуры) приведена на рис. 1.

Гармонический коэффициент передачи нелинейного элемента K (A) может быть получен при разложении нелинейной функции в ряд Фурье и имеет вид

$$K(\bar{A}) = a(\bar{A},\ \omega)\,x^* + \frac{b(\bar{A},\ \omega)}{\omega}\,px^* + \text{высшие гармоники}, \qquad (1)$$

где

$$a = \frac{1}{\pi\bar{A}}\int_0^{2\pi} F(\bar{A}\sin\varphi,\ \bar{A}\omega\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi; \qquad (2)$$

$$b = \frac{1}{\pi\bar{A}}\int_0^{2\pi} F(\bar{A}\sin\varphi,\ \bar{A}\omega\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi; \qquad (3)$$