УДК 621.391

В. А. ОМЕЛЬЧЕНКО, д-р физ.-мат. наук, *А. В. ОМЕЛЬЧЕНКО*,
Я. П. ДРАГАН, канд. физ.-мат. наук, *О. А. КОЛЕСНИКОВ*

РАСПОЗНАВАНИЕ ГАУССОВСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ. *СООБЩЕНИЕ 1.*

Ряд физических явлений, стохастических по природе, но обладающих периодичностью, можно описать математической моделью в виде периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП) [1—4]. Такие ситуации возникают, в частности, в радиолокации при приеме сигналов, отраженных вращающимися объектами или взволнованной поверхностью раздела двух сред. Модель ПКСП учитывает повторяемость явлений и их случайность. Использование этой модели открывает новые возможности в задачах обработки нестационарных сигналов со свойствами периодичности.

Решим задачу распознавания нестационарных сигналов на основе модели периодически коррелированных гауссовских случайных процессов.

Вероятностная модель сигналов в виде периодически коррелированной случайной последовательности. Рассмотрим некоторые особенности модели сигнала в виде ПКСП. Ограничимся случаем, когда сигнал задан на счетном множестве точек $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. является случайной последовательностью.

Случайная последовательность $X(l)$, $l = \overline{-\infty, \infty}$ периодически коррелирована, если существует такое целое число N, при котором ее среднее $\mu(l)$ и ковариация $K(l, s)$ удовлетворяют условиям [1; 2

$$\mu(l+N) = \mu(l),\ K(l+N,\ s+N) = K(l,\ s),\ l,\ s = \overline{-\infty,\ \infty}.$$

Известно, что периодически коррелированная случайная последовательность $X(l)$, $l = \overline{-\infty,\ \infty}$ гармонизуема и допускает представление [4]

$$X(l) = \int_0^{2\pi} e^{il\lambda}\, d\,Z(\lambda). \tag{1}$$

Здесь $Z(\lambda)$ — комплекснозначная функция. Если при этом $Z(\lambda)$ абсолютно непрерывна, то разложение (1) примет вид [1]

$$X(l) = \int_0^{2\pi} e^{il\lambda}\, z(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

где

$$z(\lambda) = \frac{dZ}{d\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(l)\, e^{-il\lambda}. \tag{3}$$

Гауссовские случайные последовательности описываются спектральными функциями [1; 3]

$$f(\lambda, \mu) = \mathbf{M}\,[z(\mu)\,\bar{z}(\lambda)].$$

Здесь $\mathbf{M}(\cdot)$ — символ математического ожидания. Для периодически коррелированной случайной последовательности спектральная функция сосредоточена на $2N-1$ отрезках прямых, задаваемых уравнениями

$$\lambda = \mu + p\frac{2\pi}{N}, \quad p = \overline{-N+1,\ N-1}, \tag{4}$$

которые находятся в квадрате $\lambda, \mu \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ [1; 2].

Рассмотрим особенности спектральных функций периодически коррелированных последовательностей, заданных на конечном интервале.

Случайную последовательность $X_W(l)$ представим в виде $X_W(l) = W(l)\,X(l)$, $l = \overline{-\infty,\ \infty}$, где функция временного окна

$$W(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } l = \overline{0,\ n-1}; \\ 0, & \text{если } l \neq \overline{0,\ n-1}. \end{cases}$$

Тогда с учетом (3) Фурье-трансформанта последовательности $X_W(l)$

$$z_W(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{n-1} e^{-il\lambda} X_W(l) = \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda-\mu)\,z(\mu)\,d\mu. \tag{5}$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ — частотная характеристика окна,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} W(l)\,e^{-il\lambda}.$$

На основании выражений (4) и (5) установим следующую связь спектральной функции $f_w(\lambda_1, \lambda_2)$ последовательности $X_W(l)$ со спектральной функцией исходной последовательности

$$f_W(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{p=-N+1}^{N-1}\int_0^{2\pi} \varphi(\lambda_1-\mu)\,\varphi\left(\lambda_2-\mu+\frac{2\pi}{N}p\right) f\left(\mu, \mu+p\frac{2\pi}{N}\right) d\mu.$$

Отсюда следует, что при $n \gg N$ спектральная функция периодически коррелированной последовательности, заданной на интервале $[0, n-1]$, в основном сосредоточена внутри узких полосок шириной $\Delta \cong 1/n$, ограниченных параллельными прямыми

$$\lambda_1 = \lambda_2 + p\frac{2\pi}{N} + \Delta \tag{6}$$

и

$$\lambda_1 = \lambda_2 + p\frac{2\pi}{N} - \Delta, \quad p = \overline{-N+1,\ N-1}.$$

Байесовское решающее правило распознавания гауссовских периодически коррелированных сигналов. Задача распознавания формулируется следующим образом.

Пусть распознаванию подлежит M сигналов $X^i(l)$, $i=\overline{1, M}$, $l=\overline{0, n-1}$, являющихся отрезками гауссовских периодически коррелированных случайных последовательностей с периодом коррелированности $N_i \ll n$ $(i=\overline{1, M})$, математические ожидания сигналов $\mu^i(l)=\mathbf{M}[X^i(l)]=0$, $(l=\overline{0, N-1})$ и выполняется условие перемешивания

$$\lim_{u \to \pm\infty} K_i(l, l+u)=0,$$

где $K_i(l, l+u)=\mathbf{M}[X^i(l)X^i(l+u)]$. Полагаем, что сигналы появляются с априорными вероятностями P_i и заданы обучающими выборками $x^i(l)$, $l=\overline{0, n-1}$, $i=\overline{1, M}$.

Предъявленную реализацию $x^i(l)$, $l=\overline{0, n-1}$ необходимо отнести к одному из M-сигналов.

Байесовское решающее правило распознавания M полностью заданных сигналов

$$\max_{i=\overline{1,M}}\{P_i W(\vec{x}/i)\}, \tag{7}$$

в случае простой функции потерь для гауссовских сигналов [5—7]

$$\min_{i=\overline{1,M}}\{\vec{x}^{tr} K_i^{-1}\vec{x}+\ln|K_i|-2\ln P_i\}. \tag{8}$$

Здесь $W(\vec{x}/i)$ — функция правдоподобия вектора $\vec{x}$; $K_i=\mathbf{M}[\vec{x}^i\vec{x}^{itr}]$ — ковариационная матрица i-го сигнала; tr — символ транспонирования вектора; $|K_i|$ — определитель матрицы K_i; K_i^{-1} — матрица, обратная K_i.

Приведем решающее правило (8) к виду, учитывающему особенности модели сигналов в виде ПКСП.

Преобразуем квадратичную форму в (8)

$$\vec{x}^{tr} K_i^{-1}\vec{x}=\vec{z}^{*} F_i^{-1}\vec{z}, \tag{9}$$

где вектор спектрального представления сигналов $\vec{z}=W\vec{x}$ (10); ковариационная матрица i-го сигнала в спектральной области

$$F_i=\mathbf{M}[\vec{z}\vec{z}^{*}]=WK_iW^{-1}; \tag{11}$$

W — унитарная матрица преобразования Фурье с элементами

$$w(k, l)=\frac{1}{n}\varepsilon^{(k-1)(l-1)},\quad k, l=\overline{0, n-1},$$

$$\varepsilon=\exp\left\{-j\frac{2\pi}{n}\right\};$$

$\divideontimes$ — символ комплексного транспонирования матрицы. Компоненты вектора $\vec{z}$ определяются в соответствии с (10)

$$z_m = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} x(l) e^{-j\frac{2\pi}{n}ml}, \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{12}$$

Из (5), (12) получим

$$z_m = \frac{2\pi}{n} z_W\left(\frac{2\pi}{n} m\right), \quad m = \overline{0, n-1};$$

$$f_{ms} = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 f_W\left(\frac{2\pi}{n} m, \frac{2\pi}{n} s\right), \ m, s = \overline{0, n-1},$$

где $f_{ms} = \mathbf{M}[z_m z_s^*]$. Согласно (6) коррелированными являются лишь отсчеты z_m, следующие с интервалом $L_i = n/N_i$, что соответствует $\Delta\lambda_i = 2\pi/N_i$.

Этот вывод позволяет представить квадратичную форму (9) в виде

$$\vec{x}^{tr} K_i^{-1} \vec{x} = \sum_{\nu=1}^{Li} \vec{z}_i^{\nu *} [r_i^\nu]^{-1} \vec{z}_i^\nu, \tag{13}$$

где векторы $\vec{z}_i^\nu$ $(\nu = \overline{1, L})$ формируются из взаимно коррелированных отсчетов $z_m (m = \overline{0, n-1})$ в соответствии с правилом

$$\vec{z}_i^\nu = [z_\nu, \ldots, z_{\nu+(s-1)L_i}, \ldots, z_{\nu+(N_i-1)L_i}]; \tag{14}$$

$$r_i^\nu = \mathbf{M}[\vec{z}_i^\nu, \vec{z}_i^{*\nu}]. \tag{15}$$

Тогда, учитывая (13)—(15), приведем решающее правило (8) к виду

$$\min_{i=\overline{1,M}} \left\{\sum_{\nu=1}^{Li} \vec{z}_i^\nu [r_i^\nu]^{-1} \vec{z}_i^\nu + d_i\right\}. \tag{16}$$

Здесь

$$d_i = \sum_{\nu=1}^{L_i} \ln|r_i^\nu| - 2\ln P_i,$$

а элементы ковариационной матрицы (15) определяются через элементы матрицы (11) следующим образом:

$$r_{iln}^\nu = f_{ims}, \ l, n = \overline{0, N_i - 1}; \ \nu = \overline{1, L_i};$$
$$m = (l-1)L_i + \nu; \quad s = (u-1)L_i + \nu.$$

Адаптивное байесовское решающее правило распознавания гауссовских периодически коррелированных сигналов. Предположим теперь, что имеет место параметрическая априорная неопределенность, т. е. функция правдоподобия $W(\vec{x}/i)$ задана с точностью до неизвестного векторного параметра $\vec{\gamma}$ — $W(\vec{x}/\vec{\gamma}, i)$. Тогда, применяя адаптивный байесовский подход, можно получить адаптивное байесовское решающее правило [6; 7] $\max_i \{P_i W(\vec{x}/\hat{\vec{\gamma}}, i)\}$.

Процедура построения такого правила сводится к использованию в байесовском правиле принятия решений (7) вместо неизвестного значения параметра $\vec{\gamma}$ его состоятельной оценки $\hat{\vec{\gamma}}$.

В рассматриваемом случае, используя в (16) вместо истинных значений отсчетов спектральных функций f_{ilk} их состоятельные оценки $\hat{f}_{ilk}$, приходим к решающему правилу

$$\min_{i=1,M}\left\{\sum_{\nu=1}^{L_i}\vec{z}^{\nu *}[\hat{r}_i^{\nu}]^{-1}\vec{z}^{\nu}+\hat{d}_i\right\}. \tag{17}$$

Здесь

$$\hat{d}_i=\sum_{\nu=1}^{L_i}\ln|\hat{r}_i^{\nu}|-2\ln P_i;\ \hat{r}_{iln}^{\nu}=\hat{f}_{ims},\quad l,\ n=\overline{0,N_i-1};$$
$$\nu=\overline{0,L_i},\ m=(l-1)L_i+\nu,\ s=(n-1)L_i+\nu,$$

причем, в качестве $\hat{f}_{iln}$ может быть выбрана оценка

$$\hat{f}_{imn}=\frac{1}{n^2}\sum_{l_1=0}^{n-1}\sum_{l_2=0}^{n-1}\hat{K}_i(l_1,l_2)\exp\left\{-\frac{2\pi}{n}(l_1m-l_2u\right), \tag{18}$$

где статистика $\hat{K}_i(l_1, l_2)$ находится по обучающей выборке

$$\hat{K}_i(l_1,l_2)=\frac{1}{L_{i0}}\sum_{k=0}^{L_{i0}-1}x(l_1+kN_i)\,x(l_2+kN_i), \tag{19}$$
$$L_{i0}=E(n_{i0}/n_i).$$

$E(\cdot)$ — целая часть числа. В работе [2] показано, что если $\lim\limits_{u\to\pm\infty}K_i(l, l+u)$, то оценка (19) является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой функции корреляции гауссовской периодически коррелированной последовательности. Отсюда вытекают несмещенность и среднеквадратическая состоятельность оценки (18).

Таким образом, на основе модели сигналов в виде периодически коррелированных случайных последовательностей получены в спектральной области байесовское и адаптивное байесовское решающее правило распознавания нестационарных сигналов. Они иллюстрируют одну из возможностей учета нестационарности сигналов.

Список литературы: 1. *Драган Я. П.* Структура и представления моделей стохастических сигналов.— К. : Наук. думка, 1980.— 380 с. 2. *Драган Я. П., Яворский И. Н.* Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы.— К. : Наук. думка, 1982.— 245 с. 3. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику.— М. : Наука, 1976.— Т. 1.— 494 с. 4. *Гладышев Е. Г.* О периодически коррелированных случайных последовательностях // Докл. АН СССР.— 1961.— 137, № 5.— С. 2236—2239. 5. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов: Пер. с англ.— М. : Наука, 1979.— 367 с. 6. *Омельченко В. А.* Основы спектральной теории распознавания сигналов.— X. : Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те.— 1983.— 159 с. 7. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем.— М.: Сов. радио, 1977.— 432 с.

Поступила в редколлегию 24.06.86