

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Оптимізація узгодження сигналів з багатоканальними системами
(тема)

Виконав:
студент 2 курсу, групи ПММ-22-1
Незнанов М.Ю.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Наумейко І.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ _____
(підпис)

Сидоров М.В.
(прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 06 ” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Незнанову Максиму Юрійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Оптимізація узгодження сигналів з багатоканальними системами

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель електричних коливань у
направляючих системах

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Наумейко І.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 58 с., 2 табл., 5 рис., 1 дод., 14 джерел.

РІВНЯННЯ БАГАТОМОДОВОГО КАНАЛУ, АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ, СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ПЕРЕДАВАЛЬНА МАТРИЦЯ, ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЗНАЧЕННЯ.

Об'єкт дослідження – багатоканальна система передачі даних із взаємними впливами каналів.

Мета роботи – створення інструментарію та його програмна реалізація для оптимізації лінійних каналів за мінімумом взаємних впливів ланцюгів та мінімумом відбиття від приймача..

Методи дослідження – розв'язання диференціальних рівнянь, оптимізація лінійних систем.

Розроблено критерії оптимізації та програму для побудови оптимальних каналів. Наведено приклади застосування розроблених методів до оптимізації реальних тримодових каналів

ABSTRACT

Introductory note: 58 pages, 2 tables, 5 figures, 1 appendix, 14 sources.

MULTIMODE CHANNEL EQUATIONS, SOLUTION ASYMPTOTICS, SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, TRANSFER MATRIX, OPTIMAL ASSIGNMENT.

The object of research is a multi-channel data transmission system with mutual influences of channels.

The purpose of the work is to create a toolkit and its software implementation for the optimization of linear channels with a minimum of mutual influences of the circuits and a minimum of reflection from the receiver.

Research methods – solving differential equations, optimization of linear systems.

Optimization criteria and a program for building optimal channels have been developed. Examples of the application of the developed methods to the optimization of real three-mode channels are given.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	10
1.1 Вербальний опис системи	10
1.2 Аналіз проблеми оптимізації матричної передавальної функції	12
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	15
1.4 Постановка задач дослідження	17
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	20
2.1 Основні відомості з теорії нелінійних операторних рівнянь.....	20
2.2 Асимптотичний метод. Випадок простого спектру матриці A_0	23
2.3 Побудова матричної передавальної функції	24
2.4 Неоднорідний багатопровідний канал як система керування	27
2.5 Вибір та обґрунтування критерію для оптимізації та погодження щодо мінімуму взаємних впливів	30
2.6 Вибір та обґрунтування критерію для оптимізації та погодження за мінімумом відбитого сигналу	31
Висновки за розділом 2	36
3 Програмна реалізація	37
3.1 Реалізація алгоритмів оптимізації на підґрунті теореми Хола	37
3.2 Алгоритм вирішення задачі оптимізації та узгодження сигналу на кінцевому пристрою	40
Висновки за розділом 3	43
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	44
4.1 Завдання оптимізації перешкод унаслідок взаємних впливів	44
4.2 Завдання оптимізації перешкод внаслідок відображення частини сигналу	45
Висновки за розділом 4	46
Висновки	48

	7
Перелік джерел посилання	49
Додаток А. Лістинг програми	50

ВСТУП

Актуальність теми. Останнім часом засоби зв'язку розвивалися особливо швидкими темпами у всьому світі, і в усіх сферах життя – від побуту громадян до сучасних військових комплексів. Не втратила своє значення і провідний зв'язок, що має більш високий ступінь скритності та захисту від перешкод. Тож дуже необхідно збільшувати ефективність використання напрямних систем шляхом ущільнення каналів. Таким чином, завдання, що вирішуються в роботі, актуальні і представляють практичний інтерес.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є використання нових типів напрямних систем підвищило інформаційну ємність, швидкість передачі, захищеність таких каналів, і, зрештою, зросла їх конкурентоспроможність.

Ця робота присвячена оптимізації провідних, хвилеводних та інших каналів зв'язку. Надалі під «каналом» мається на увазі лінійна напрямна система – «лінія» будь-якої фізичної природи, разом з безліччю сигналів, що по ній передаються, і кінцевими пристроями.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі оптимального узгодження множини з n вхідних сигналів з n -провідною лінією шляхом вибору призначення «сигнал-канал»;

– розв'язати завдання оптимального узгодження електромагнітних параметрів багатоканального приймача з направляючою системою;

– вирішити завдання оптимізації для багатомодового каналу, які у такій постановці у літературі не описані.

Об'єктом дослідження є багатоканальна система передачі даних із взаємними впливами каналів.

Предметом дослідження є математична модель розповсюдження електричних сигналів з направляючою системою, джерелом та приймачем.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи розв'язання диференціальних рівнянь та оптимізація лінійних систем.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Вербальний опис системи

Основне призначення: вивчення багатоканальної моделі передачі імпульсів.

Ціль створення системи. Здійснити проведення наукових досліджень та виконання наукових розробок, що передбачають подальшу оптимізацію та узгодження переданих за багатоканальною моделлю імпульсів.

На вході до системи розглядається номенклатура вихідних даних щодо досліджень: постановка завдання (замовлення), фінанси, довідкова інформація.

На виході із системи розглядаються результати досліджень та програмний продукт.

Основні функції системи, що характеризують як систему дослідження багатоканальної моделі передачі імпульсів, виконує інформаційно-аналітична підсистема. Детальна схема функціональної моделі для трьох рівнів декомпозиції наведена на рисунках 1.1 та 1.2.

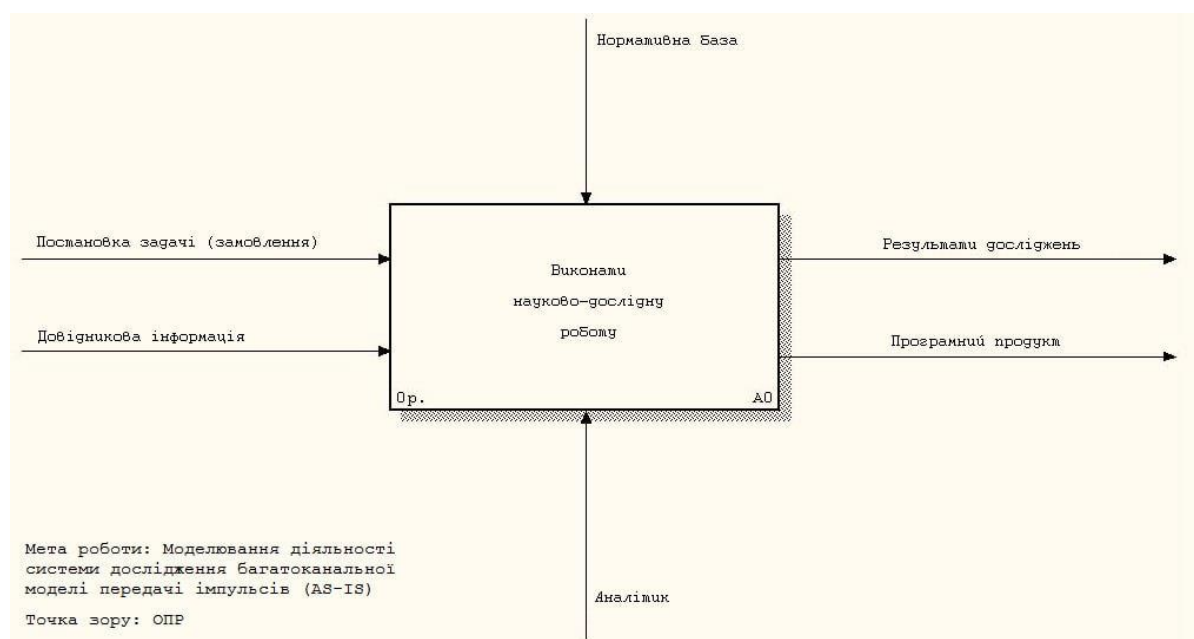
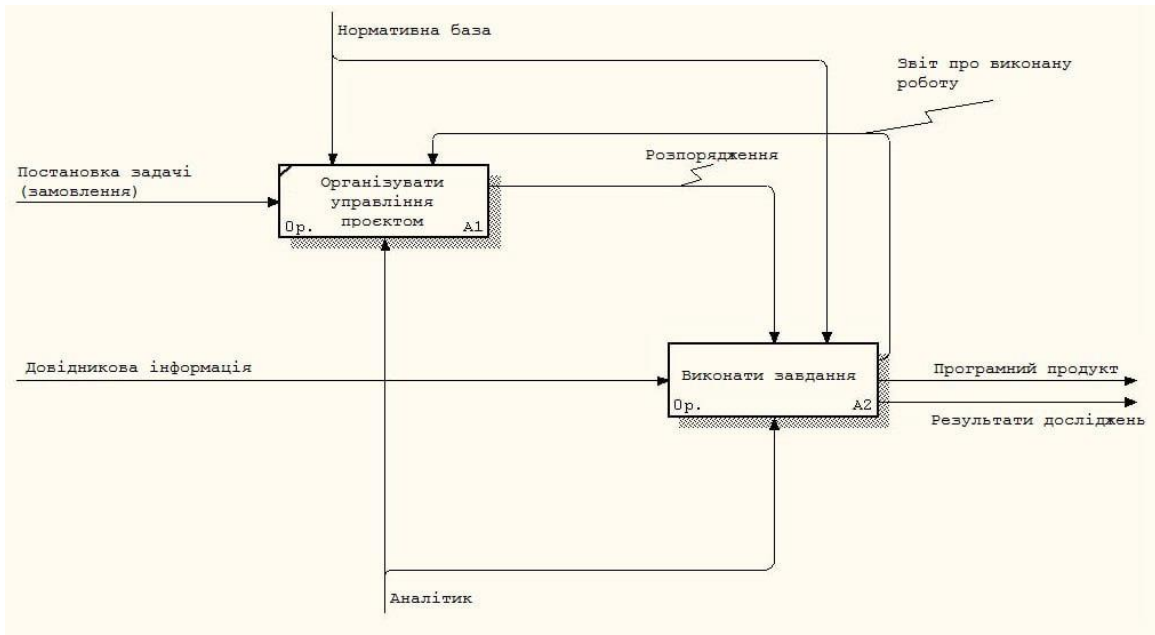
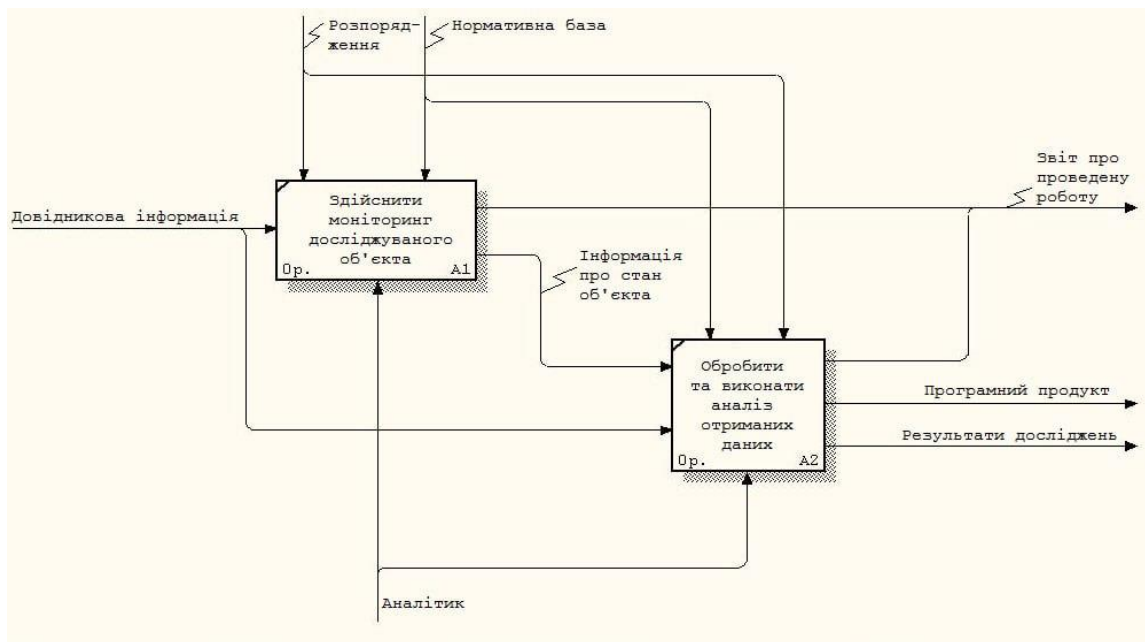


Рисунок 1.1 – Функціональна модель, 0-й рівень декомпозиції



а)



б)

Рисунок 1.2 – Функціональна модель:

а) 1-й рівень декомпозиції; б) 2-й рівень декомпозиції

Інформаційна модель дозволяє на понятійному рівні проаналізувати матеріальні та інформаційні потоки, що циркулюють у системі та у процесі відносини системи із зовнішнім середовищем. В основному це різного роду документація, фінанси або матеріали.

1.2 Аналіз проблеми оптимізації матричної передавальної функції

В якості об'єкта (моделі-основи), на базі якої будуватиметься система, що містить проблему (ПС-система), вибираємо систему дослідження багатоканальної моделі передачі імпульсів. У результаті дослідження багатоканальної моделі передачі імпульсів виникає необхідність побудови передавальної матриці. Оптимізація передачі імпульсів по багатоканальній моделі, по суті, є завданням про призначення. Таким чином, проблема полягає у найкращому виборі методу вирішення оптимізаційної задачі.

Вибираємо ряд показників, контроль за якими дозволяє оцінити стан ПС-системи та керувати динамікою її розвитку.

До таких показників можна віднести:

- швидкість збіжності методу оптимізації;
- складність програмної реалізації;
- можливість спрощення;
- залежність від точності початкового наближення.

Грунтуючись на цих змінних, можна сформулювати кілька логічно можливих результатів (контрастних сценаріїв) стану ПС-системи, що розглядається, під впливом аналізованих компонент проблеми.

Сценарій «Метод диференціальних рент»: розв'язання оптимізаційної задачі проводимо методом диференціальних рент.

Сценарій «Метод потенціалів» розв'язуємо задачу за допомогою методу потенціалів.

Сценарій "Алгоритм Флада" вирішуємо задачу, застосовуючи алгоритм Флада.

Після розробки моделей контрастних сценаріїв агрегується ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми (рисунок 1.3).

Оскільки з усіх факторів вплив має лише технічні, рівень, який відповідає факторам, на діаграмі можна опустити.

Таблиця 1.1 – Стан та сценарії

№ п/п	Показники стану регіону (ПС-системи)	СЦ-1 МДР f=0.213	СЦ-2 МП f=0.217	СЦ-3 АФ f=0.57	Узагальнений сценарій
1.	Швидкість збіжності методу оптимізації	+4	+4	+6	+5,14
2.	Складність програмної реалізації	+5	+4	+4	+4,213
3.	Можливість спрощення методу	+1	+1	+5	+3,28
4.	Залежність від точності початкового наближення	-1	-1	+3	+1,28

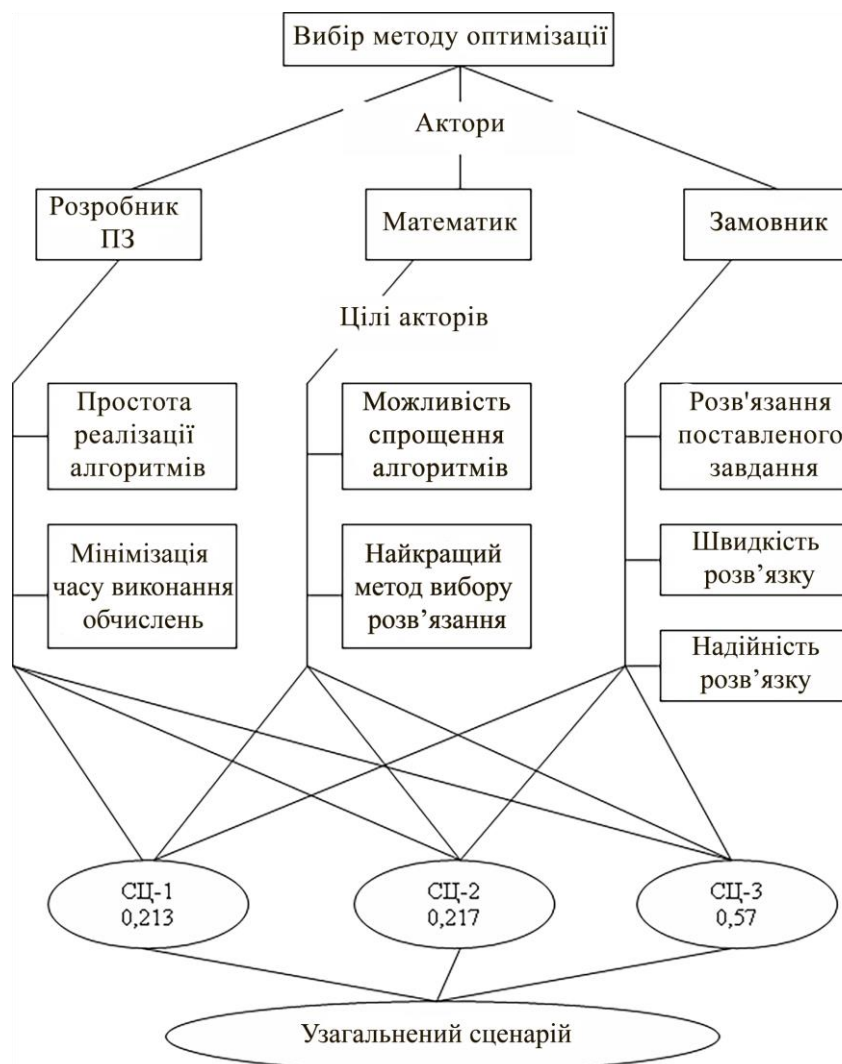


Рисунок 1.3 – Ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми

Після оцінки можливих логічних сценаріїв стану ПС-системи розробимо моделі бажаних сценаріїв.

Для вибору одного зі сформованих бажаних сценаріїв агрегують дві змістовні моделі, за якими експертним шляхом оцінюють їх коефіцієнти значущості (компоненти вектору глобальних пріоритетів) за критеріями «вигода» та «збитки». Результати аналізу заносять до таблиці.

Розглянуті бажані сценарії ранжуються в порядку зменшення відносини V/U , і для подальшого розгляду вибирається сценарій з максимальним значенням величини V/U , у нашому випадку – це сценарій «Розв'язання задачі за допомогою алгоритму Флада».

На наступному етапі агрегують ієрархію зворотного аналізу (рисунок 1.4). Після формування експертних матриць парних порівнянь та розрахунку локальних пріоритетів елементів усіх рівнів розраховують вектор глобальних пріоритетів елементів останнього рівня. Задля реалізації вибирають програму (стратегію) з максимальним коефіцієнтом значимості.

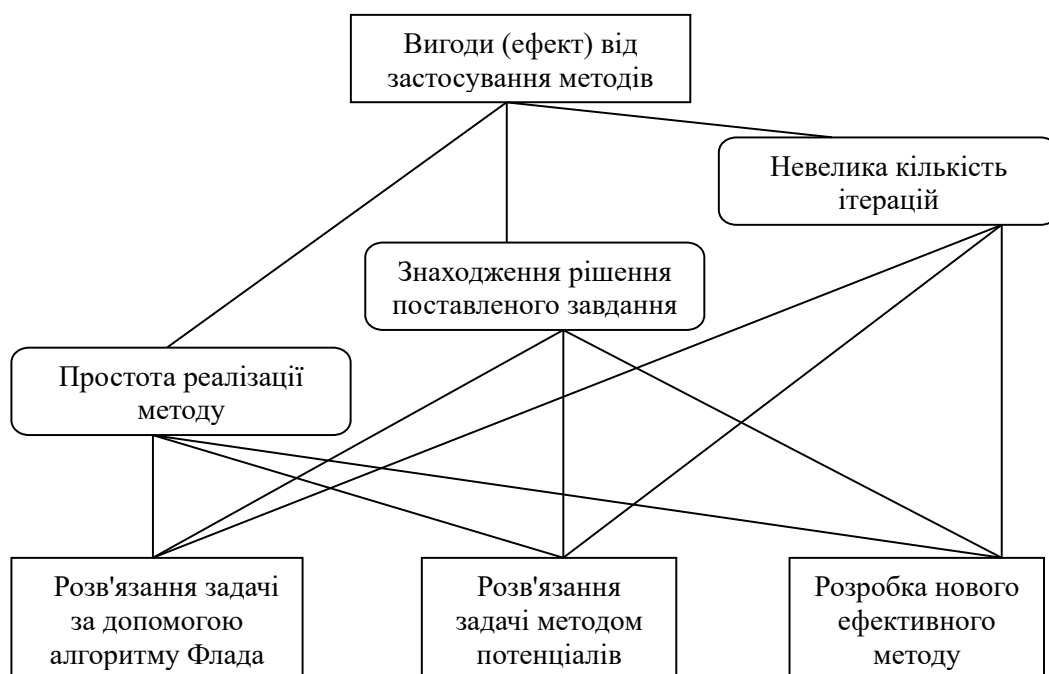


Рисунок 1.4 – Змістовна модель за критерієм «вигода»

Таблиця 1.2 – Критерії та методи.

Сценарії Критерії	Розв'язання задачі за допомогою алгоритму Флада	Розв'язання задачі методом потенціалів	Розробка нового ефективного методу
Критерій "вигода" V	0,58	0,19	0,23
Критерій "збитки" U	0,41	0,28	0,31
Відношення "вигода / збитки" V/U	1,41	0,68	0,74

"Розробка ПЗ за допомогою матпакета Mathematica" – 0,58; "Розробка ПЗ за допомогою мови програмування" – 0,42. Отже, вибираємо програму «Розробка програмного забезпечення за допомогою матпакета Mathematica».

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Можливі різні способи побудови систем передачі, тобто. різні методи утворення каналів і трактів, що залежать від типу лінії та властивостей сигналу, що передається, і приймального пристрою. В даний час відомі системи передачі з поділом каналів за частотою та часом. На магістральних мережах зв'язку переважно застосовуються аналогові системи з частотним поділом каналів. У цифрових системах всі сигнали перетворюються на цифрову форму і передаються лінією методом тимчасового поділу.

У системах передачі із частотним поділом каналів вихідним сигналом різних каналів у лінійних трактах відводяться певні смуги частот. Необхідна ширина лінії частот лінійного тракту визначаються способом передачі каналного сигналу і числом каналів. Для ефективнішого використання дорогих

лінійних споруд бажано у певній смузі частот організувати якнайбільше каналів, тобто. спектр каналного сигналу має бути якомога вже.

Під перешкодами розуміють сторонні струми, частотний спектр яких частково або повністю збігається зі спектром сигналів, що передаються. Перешкоди від лінійних переходів обумовлені електромагнітним зв'язком паралельних кіл. Також перешкоди при передачі імпульсів по ланцюгах можуть виникати в результаті відображення частини сигналу кінцевим пристроєм, що приймає. І оскільки ми, з конструктивних міркувань (у приймачі неприпустимі додаткові паразитні зв'язки), не можемо вибрати матрицю навантаження рівної недіагональній матриці хвильових опорів, необхідно враховувати можливі відображення. Для класичної одномодової системи це питання не стояло, оскільки всі питання електричного узгодження давно вирішені в рамках теоретичної електротехніки.

У цієї роботі вважаємо напрямну систему з усіма взаємними впливами заданим, оскільки зазвичай ми можемо проводити конструкцію. Як ми можемо керувати ситуацією?

Управління можливо здійснити двома способами:

– при передачі імпульсів виникають взаємні впливи між каналами, отже, нам необхідно подати на вхід імпульси таким чином, щоб перешкоди між каналами були мінімальними, тобто по суті вирішити завдання про призначення «канал-сигнал»;

– при з'єднанні з кінцевими пристроями частина сигналів відображається, таким чином, керування можна здійснити, вибираючи діагональну матрицю опорів навантаження за критерієм мінімізації відображеного вектора сигналів.

Найпростіше завдання, вирішуваних першим способом, становила тему бакалаврської роботи автора. Для цієї роботи було поставлено складніша завдання першого типу та запропоновано три критерії оптимізації для завдань другого типу.

Необхідно провести оптимізацію по кожному з них, запропонувати критерій переваги, і за допомогою машинного експерименту вибрати найкращий для даного класу напрямних систем.

1.4 Постановка задач дослідження

Для мінімізації міжканальних перешкод, званих також «наведеннями», багатоканальні системи передачі даних потребують уточнених моделей проходження сигналів у таких каналах, які б враховували наявність взаємних впливів.

Як основна математична модель неоднорідного багатопровідного каналу в даній роботі використовується узагальнена система телеграфних рівнянь (СТР) зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} -\frac{d\vec{U}}{dx} = (R + i\omega L)\vec{I}, \\ -\frac{d\vec{I}}{dx} = (G + i\omega C)\vec{U}, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $R(x)$, $G(x)$, $L(x)$, $C(x)$ – матриці-функції розмірності $n \times n$, що складаються з власних параметрів ланцюгів та параметрів їхнього взаємного впливу, а вектори-стовпці \vec{U} і \vec{I} – електромагнітні носії сигналу. За історичною традицією називатимемо їх, відповідно, «струм» та «напруга». (Для хвилеводів та світловодів – вектора електричної та магнітної складової поля).

Математична модель переданого i -го сигналу має вигляд:

$$U_i(x, \omega) = \frac{A(\omega)}{j\omega} (1 - e^{-\tau j\omega}). \quad (1.2)$$

Розв'язання матричного рівняння (1.1) $\vec{X}(x, \omega)$ необхідно для побудови матричної передавальної функції W , що відображає взаємні впливи багатожильного кабелі або іншій багатомодовій напрямній системі.

W враховує взаємний вплив між каналами

$$W(x, \omega) = X(x, \omega) \cdot X^{-1}(0, \varepsilon), \quad (1.3)$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{1}{j\omega}.$$

По ній обчислимо передавальну матрицю по напрузі W_0 , а також діагональну матрицю K_0 , отриману з W_0 за умови нехтування параметрами взаємних впливів. Їхня різниця $G = K - K_0$ визначає перешкоди в каналі від взаємних впливів.

Нехай далі:

$$\vec{X}_j = \{\delta_{kj}\}_{k=1}^n,$$

де δ_{kj} – символ Кронекера ;

u_i – амплітуда i -го сигналу, що передається.

Тоді величина $\alpha_{ij} = \|G \vec{X}_j u_i\|$ визначає наведення та спотворення в каналі при поширенні i -го сигналу по j -й лінії.

Існує кілька способів визначення сумарних спотворень системи із n сигналів у каналі.

Наприклад, за допомогою наступного критерію:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_{ij} \rightarrow \min, \quad \xi \in Q \quad (3.4)$$

$$\text{де } Q : \xi_{ij} \in \{0; 1\}; \sum_{i=1}^n \xi_{ij} = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} = 1.$$

Завдання мінімізації критерію $Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_{ij}$ на безлічі матриць $\{\xi_{ij}\}$ являє собою відому "завдання про призначення".

Існує метод наближеної побудови для високочастотної направляючої системи передавальної матриці, яка є матриця відповідної системи ЗДР.

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} U^- & U^+ \\ I^- & I^+ \end{pmatrix},$$

де U^- , U^+ , I^- і I^+ – блоки розмірності $n \times n$, визначальні напруги і струми системи падаючих (–) і відбитих (+) хвиль.

Позначимо Z_n – матриця навантажень. В якості критерію оптимізації відображення частини сигналу від приймаючого (кінцевого) пристрою пропонується наступний критерій (опис та причини вибору) див. п. 2.6 цієї роботи):

$$I_3 = \|U^+(0) - U^-(0)[U^- - DI^-]^{-1} \cdot [U^+ - DI^+]\| \rightarrow \min_{D \in Q'},$$

де $Q' = \{diag(d_i) | \operatorname{Re}(d_i) > 0\}$.

Завданням дослідження є оптимізація каналу за декількома критеріями та вибір найбільш адекватного за результатами машинних експериментів для різних реальних наборів електричних параметрів напрямних систем.

Тож, метою роботи є:

- створення математичної моделі поширення імпульсів каналом;
- проведення обчислювального експерименту для знаходження високо-частотного наближення передавальної матриці каналу;
- виділення критеріїв якості передачі;
- знаходження розв'язків задач оптимізації електричних параметрів каналу.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Основні моделі та припущення

Фактор наявності розподілених неоднорідностей та взаємних впливів у каналах суттєво ускладнює завдання дослідження систем передачі інформації, що містять такі канали. Із загальної задачі аналізу неоднорідних систем виділимо підзавдання, рішення якого присвячена справжня робота. Для кожної з них потрібна побудова передавальної матриці каналу.

Розглянуте питання зводиться до вирішення задачі про взаємний вплив ланцюгів, що знаходяться в пучку проводів. Падіння напруги на нескінченно малій ділянці dx першого ланцюга складається з падіння напруги на його поздовжньому опорі та суми напруг, що наводяться на ньому струмами всіх інших ланцюгів:

$$-dU_1 = I_1(R_1 + i\omega L_1)dx + I_1 M_{12} dx + \dots + I_n M_{1n} dx, \quad (2.1)$$

де I_i – струм у ланцюгу i ;

M_{ij} – магнітний зв'язок між ланцюгами i та j .

Подібним чином виходить для падіння напруги на елементі довжини інших ланцюгів. Узагальнюючи отриманий результат, маємо:

$$-\frac{dU_i}{dx} = \sum_{j=1}^n I_j Z_{ij}, \quad (2.2)$$

де

$$\begin{cases} Z_{ij} = M_{ij} = r_{ij} + i\omega m_{ij}, & i, j = 1, 2, \dots, n. \\ Z_{ii} = R_i + iL_i, \end{cases}$$

Зміна струму на елементі довжини першого ланцюга обумовлюється як витік за рахунок кінцевої величини поперечного опору цього ланцюга під дією напруги в ній, так і за рахунок електричних зв'язків з іншими ланцюгами:

$$dI_1 = U_1(G_1 + i\omega C_1)dx + (U_1 - U_2)C_{12}dx + \dots + (U_1 - U_n)C_{1n}dx, \quad (2.3)$$

де U_i – напруга в ланцюгу i ;

C_{ij} – електричний зв'язок між ланцюгами i та j .

Узагальнюючи отриманий результат, маємо:

$$-\frac{dI_i}{dx} = \sum_{j=1}^n U_j Y_{ij}, \quad (2.4)$$

де

$$\begin{cases} Y_{ij} = g_{ij} + i\omega c_{ij}, \\ Y_{ii} = G_i + i\omega C_i. \end{cases}$$

Рівняння (2.2) та (2.4) за наявності одного відокремленого ланцюга, тобто у випадку $n = 1$ перетворюються на телеграфні рівняння, що характеризують поширення електромагнітної енергії по відокремленому ланцюгу виду (1.1).

Передавальна матриця $2n$ -полюсника неоднорідного каналу визначається співвідношенням $\vec{X}_{\text{вих}}(\omega) = W(x) \cdot \vec{X}_{\text{вх}}(\omega)$.

Нехай $\varepsilon = \frac{1}{j\omega}$, ω – кругова частота; A_0 і A_1 – матриці, що визначаються первинними електричними параметрами лінії; $\vec{X}(x, \omega) = \vec{U}^T; \vec{I}^T$ – вектор-стовпець.

Матриці A_0 і A_1 мають блочний вигляд:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Систему телеграфних рівнянь запишемо у такому вигляді:

$$\varepsilon \vec{X}'_x = [A_0(x) + \varepsilon A_1(x)] \cdot \vec{X}. \quad (2.6)$$

Припустимо ω – дуже велике число (10^4). Рішення будемо шукати у вигляді ряду:

$$\vec{X}(x, \varepsilon) = \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^x \lambda(\xi) d\xi \right] \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \vec{Z}_k(x), \quad (2.7)$$

де $\vec{Z}_k(x)$ – вектор функції, що підлягають визначенню. Для цього слід підставити (2.7) (2.6) і прирівняти коефіцієнти при однакових ступенях ε .

В результаті отримаємо

$$(A_0 - \lambda E) \vec{Z}_0 = \vec{0}, (A_0 - \lambda E) \vec{Z}_{k+1} = Z_k - A \vec{Z}_k, \quad (2.8)$$

де E – одинична матриця,

\vec{Z}_0 – власний вектор матриці A_0 .

Відомо, що матриця A_0 діагоналізуема, отже, має повний набір лінійно незалежних власних векторів. Отже, система розв'язків (2.7) є фундаментальною.

На підставі визначення матриця W можемо записати таке:

$$W(x, \omega) = X(x, \varepsilon) \cdot X^{-1}(0, \varepsilon), \quad (2.9)$$

де $X(x, \varepsilon)$ – матриця, стовпцями якої є розв'язки (2.7).

Зазначимо, що для визначення всіх \vec{Z}_k з (2.8) необхідно вимагати, щоб $A_0(x)$ та $A_1(x)$ були нескінченно диференційовані. Якщо кількість гладких похідних від цих матриць звичайно, то можна записати відповідне кінцеве число членів ряду (2.7).

2.2 Асимптотичний метод. Випадок простого спектру матриці A_0

Обчислювальна процедура методу асимптотичного інтегрування системи (2.6) суттєво залежить від властивостей спектра матриці A_0 . Ряд (2.7) асимптотично сходиться до рішень системи (2.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($w \rightarrow \infty$), рівномірно по x на будь-якому кінцевому відрізку $[0; l]$. З асимптотичної збіжності рядів (2.7) впливає асимптотичне уявлення передавальної матриці каналу:

$$W(x, w) = X(k, x, \varepsilon) \cdot X^{-1}(k, 0, \varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1}), \quad (2.10)$$

де $X(k, x, \varepsilon)$ – матриця, складена із кінцевих сум k членів рядів (2.7).

Таким чином, завдання знаходження $W(x, \omega)$ зводиться до обчислення потрібного числа Z_k з (2.8).

Розглянемо випадок простого спектра матриці A_0 . Для кожного з λ будемо шукати \vec{Z}_0 у вигляді:

$$\vec{Z}_0(x) = Y_0(x) \cdot \vec{U}(x), \quad (2.11)$$

де Y_0 – скалярна функція,

\vec{U} – один із власних векторів A_0 , відповідних даному λ .

Для знаходження Z_{k+1} необхідно вирішити друге з матричних рівнянь (2.8), оскільки матриця $(A - \lambda E)$ одноразово вироджена, для розв'язання цього

рівняння необхідна ортогональність його правої частини власного вектору \vec{Y} , що відповідає власному числу λ матриці A_0^{-1} . Зазначимо, що для матриць A_0 виду (2.5) $\vec{\lambda}(x) = \lambda(x)$ – дійсна функція, та $A_0^{-1} = A_0^T$. Цю умову ортогональності можна здійснити, оскільки рівняння (2.8) на попередньому, $(k-1)$ -му кроці можна розв'язати неоднозначно:

$$\vec{Z}_k = Z_k^0 + Y_k \vec{Z}_0, \quad (2.12)$$

де Z_k^0 – частинний розв'язок рівняння (2.8),

$Y_k(x)$ – скалярна функція, що визначається з рівняння:

$$Y_k'(\vec{Z}_0, \vec{Y}) = -([\vec{Z}_k^{01} - A_1 \vec{Z}_k^0], \vec{Y}), \quad (2.13)$$

Рівняння (2.13) отримано з умови розв'язання системи (2.8) на k -му кроці ($k > 0$). Для випадку $k = 0$ з тих самих міркувань отримуємо рівняння:

$$Y_0'(\vec{U}, \vec{Y}) + Y_0([\vec{U}^1 - A_1 \vec{U}], \vec{Y}) = 0, \quad (2.14)$$

яке легко інтегрується.

Таким чином, перебування $\vec{Z}_k(x)$ з (2.8) зводиться до вирішення лінійних систем алгебри і диференціального рівняння (2.14), а також до обчислення квадратур (2.13).

2.3 Побудова матричної передавальної функції

$W(l) = X(l) \cdot X^{-1}(0)$ – передатна функція, де l – довжина хвилі, $X = \{\vec{X}_i\}$ – матриця, складена зі стовпців фундаментальної системи розв'язків рівняння (2.6).

Вони набудуть вигляду:

$$\vec{X}_i(x) = \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^x \lambda_i(\tau) d\tau \right] \vec{Z}_{0i}(x), \quad (2.15)$$

де $\lambda_i(\tau)$ – власні числа матриці $A_0(x)$,

$$A_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & L(x) \\ C(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & R(x) \\ G(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриці-функції $R(x)$, $G(x)$, $L(x)$, $C(x)$, що складаються з власних параметрів ланцюгів та параметрів їх взаємного впливу, визначаються таким чином:

$$R(x) = R_0 \cdot \leq f_R(x), \quad (2.16)$$

$$G(x) = G_0 \cdot \leq f_G(x), \quad (2.17)$$

$$L(x) = L_0 \cdot \leq f_L(x), \quad (2.18)$$

$$C(x) = C_0 \cdot \leq f_C(x), \quad (2.19)$$

де $f_R(x)$, $f_G(x)$, $f_L(x)$, $f_C(x)$ – скалярні функції,

R_0, G_0, L_0, C_0 – матриці розмірності $(n \times n)$, елементами яких є константи:

$$\lambda_i(\tau) = \pm \sqrt{\tilde{\lambda}_i(\tau)}, \quad (2.20)$$

де $\tilde{\lambda}_i(\tau)$ – власні числа матриці CL .

Згідно (2.18) та (2.19):

$$C(x)L(x) = C_0 L_0 f_C(x)_L(x). \quad (2.21)$$

Перетворюючи вираз (2.21), отримуємо $C_0 L_0 f_C(x) f_L(x) \vec{h}_{2j} = \tilde{\lambda}_j(x) \vec{h}_{2j}$, звідки випливає, що \vec{h}_{2j} – власний вектор матриці $C_0 L_0$, відповідний $\tilde{\lambda}_j(x)$.

Таким чином, $\tilde{\lambda}_j(x) = \lambda_{0j} f_C(x) f_L(x)$, де λ_{0j} – j -е власне значення матриці $C_0 L_0$.

$$\text{Значить, } \int_0^x \lambda_i(\tau) d\tau = \pm \int_0^x \sqrt{\lambda_{0i}} \cdot \sqrt{f_C(\tau) f_L(\tau)} d\tau.$$

$$\vec{Z}_{0i}(x) = \phi_{0i}(x) \vec{u}_{0i}(x), \quad (2.22)$$

Використовуючи формули (2.21) та (2.22), запишемо залежність вектора $\vec{h}_{1i}(x)$ від x , яка визначається за допомогою наступного співвідношення:

$$\vec{h}_{1i}(x) = -\frac{L(x) \vec{h}_{2i}}{\lambda_i(x)} = -\frac{L_0 \cdot \vec{h}_{2i}}{\lambda_{i0} \cdot f_C(x)}. \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \phi_{0i}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^x \frac{(R(x) h_{2i}, h_{i2}) + (G(x) h_{1i}, h_{i1})}{V_i(x)} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \cdot \exp\{AL_i(x)\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$V_i(x) = (\vec{h}_{1i}(x), \vec{h}_{2i})$ – скалярний добуток,

$$V_i(x) = (\vec{h}_{1i}(x), \vec{h}_{2i}) = -\frac{1}{\lambda_{i0} f_C(x)} (L_0 \vec{h}_{2i}, \vec{h}_{2i}),$$

$$\phi_{1i} = \int_0^x \frac{(R_0 f_R(x) \vec{h}_{2i}, \vec{h}_{2i}) + (G_0 f_G(x) \vec{h}_{1i}, \vec{h}_{1i})}{V_i(x)},$$

$$\phi_{1i} = -\frac{\lambda i 0}{(L_0 h_2, h_2)} \int_0^x f_C(x) \left((R_0 h_2, h_2) f_R(x) + \frac{(C_0 \vec{h}_{10}, \vec{h}_{10}) f_G(x)}{f_C^2(x)} \right).$$

2.4 Неоднорідний багатопровідний канал як система керування

У цьому підрозділі багатопровідний канал сприймається як система управління. Її передавальна матриця, за напругою відома.

Якщо систему за кінцевий час T можна перевести з будь-якого заданого початкового стану в будь-яке бажане, то така система називається цілком-керованою, а якщо початкову умову можна відновити за спостереженнями деякої лінійної комбінації виходів, вона називається цілком спостерігається.

Зазначені поняття природно перенести на систему передачі даних, що описується рівнянням (2.6). Тут роль управління T грає фізична довжина каналу. Вектор напруги входу \vec{v}_0 складається з вектору \vec{X}_0 , розмірності k , що несе інформацію, та вектору управлінь \vec{U}_0 розмірності $(n - k)$.

Передатну матрицю за напругою K запишемо в блочному (коагульованому) вигляді. Тоді
$$\begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{U}_0 \end{bmatrix}.$$

Звідси вихід каналу:

$$\vec{X} = K_1 \vec{X}_0 + K_2 \vec{U}_0. \quad (2.25)$$

Оскільки розглядається канал передачі, то нас цікавить можливість вибору \vec{U}_0 так щоб $\vec{X} = \vec{X}_0$.

Таким чином, застосовуючи елементарний апарат теорії матриць, отримаємо наступний результат:

- якщо $k \geq n - k$, то система некерована;
- якщо $\text{rang } K_2$, то система також некерована;
- якщо $\text{rang } K_2 = k$, система цілком керована.

При цьому передбачається, що оператори K_2^{-1} і $(E - K_1)$ можуть бути реалізовані хоча б за допомогою комп'ютеру. Єдиним випадком, коли управління U_0 визначається однозначно (якщо воно існує) є $k = n - k$, тобто матриця K_2 має бути квадратною.

Розглянемо тепер канал із кінцевим пристроєм. \vec{X}_0 , \vec{X} і K – відповідно, його вхід, вихід та передатна матриця за напругою. \vec{Y} – вихід та передавальна матриця кінцевого пристрою. Вектор \vec{Y} доступний до спостереження. Тоді очевидно, що для спостереження системи рівняння має вирішуватися однозначно, тобто стовпці матриці C мають бути лінійно незалежними. Якщо кінцевий пристрій працює з перешкодами, виміри необхідно згладжувати, вирішуючи рівняння (2.25) методом найменших квадратів. При цьому необхідно, щоб матриця C була прямокутна, тобто $\dim \vec{Y} = \dim X_0$.

Зазначимо зв'язок між передавальною матрицею за напругою K і передавальною матрицею каналу W , визначеною рівністю (3.3). Представимо W , що складається з квадратних блоків розмірності n :

$$\begin{bmatrix} \vec{U} \\ Z_n^{-1}U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \vec{I}_0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

де Z_n – матриця опорів навантаження.

Вирішуючи матричні рівняння (2.25) щодо K , отримуємо формулу (2.27). Таким чином, завдання визначення керованості каналу зведено до пошуку наближення (2.21) для W .

$$K = (W_{12}^{-1} - W_{22}^{-1}Z_H^{-1}) \cdot (W_{12}^{-1} \cdot W_{11} - W_{22}^{-1} \cdot W_{21}). \quad (2.27)$$

У цьому пункті для побудови каналу, інваріантного за декількома зосередженими перешкодами, знадобиться спосіб визначення передавальних матриць за напругою для кожного з кількох послідовно з'єднаних відрізків неоднорідного багатопровідного каналу. Роль Z_H для кожного попереднього відрізка грає матриця $Z_{вх}$ вхідного опору.

Підставивши $\vec{I}_0 = Z_{вх}^{-1} \cdot \vec{U}_0$ в (2.27), отримаємо

$$Z_{вх} = (Z_H^{-1}K - W_{21})^{-1} \cdot W_{22}, \quad (2.28)$$

вираз для $Z_{вх}$ відрізка неоднорідного каналу через його матриці W та Z_H .

Рівності (2.27) і (2.28) разом дозволяють послідовно обчислити матриці K кожного відрізка, починаючи з останнього.

Розглянемо багатопровідний канал із точковими джерелами перешкод, координати яких x_i невідомі. Взаємовпливні лінії мають приблизно однакові параметри і, отже, вважатимуться, що вектор перешкод у точці x_i має вигляд $\vec{X}_i = U_i \{\vec{1}\}$. Якщо на вхід каналу подано вектор \vec{X}_0 , то на виході отримаємо:

$$\vec{X} = (K_m \cdot K_{m-1} \cdot \dots \cdot K_0) \vec{X}_0 + \dots + K_m \cdot K_{m-1} \cdot \vec{X}_{m-1} + K_m \cdot \vec{X}_m, \quad (2.28)$$

де K_i – передавальна матриця по напрузі для відрізка каналу, укладеного між i -м та $(i+1)$ – джерелом перешкод; $i = 1, 2, \dots, m$,

m – кількість джерел перешкод. Із загальної теорії [6, 8] випливає, що для інваріантності системи по кожному i -му заважає впливу між точкою x_i і виходом має бути щонайменше дві передавальних лінії.

Таким чином, розмірність каналу $n \geq m + 1$. У разі «принцип двока-нальності» то, можливо реалізований так.

На вхід n -вимірного каналу подається інформаційний вектор \vec{X}_0 розмірності $k \geq n - m$ на інші m незадіяних входів каналу подано фіксований (наприклад, нульовий) сигнал. Векторне співвідношення (4.38) при відомому \vec{X} є системою рівнянь алгебри щодо компонентів вектору \vec{X}_0 та величин U_i . Матриця P цієї системи рівнянь складається з перших k стовпців матриці $(K_m \cdot K_{m-1} \cdot \dots \cdot K_0)$, $(k+i)$ -й стовпець визначається з (2.28): $\vec{P}_{k+i} = (K_m \cdot \dots \cdot K_i)\{\vec{1}\}$. Якщо ці стовпці, лінійно незалежні, то верхні K рядків матриці, зворотної до P , є оператором $N : \vec{X}_0 = N\vec{X}$. Оскільки канал – система із запізненням, значить у N будуть утримуватися ланки "випередження". Це ускладнює фізичну реалізацію оператора N як електричної схеми. Однак він може бути реалізований програмним шляхом, що дозволяє не тільки побудувати канал, інваріантний по впливам, що заважають, але і попутно відновити корисний сигнал.

2.5 Вибір та обґрунтування критерію для оптимізації та погодження щодо мінімуму взаємних впливів

Розглянемо канал, що складається з n взаємовпливових ліній, по якому одночасно має бути передано n сигналів $U_i(\omega)$ (2.2) різного типу. Причому кожен сигнал може бути спрямований будь-якою вільною лінією. Очевидно, загальна кількість таких різних призначень дорівнює n . Якщо спектр сигналів лежить в області високих частот, вираз (4.10) дає змогу обчислити передатну матрицю K з прийнятною точністю. Розглянемо також діагональну матрицю K_0 , отриману з K за умови нехтування параметрами взаємних впливів. Їхня різниця $G = K - K_0$ визначає перешкоди в каналі від взаємних впливів.

Нехай $\vec{X}_j = \{\delta_{kj}\}_{k=1}^n$, де δ_{kj} – символ Кронекера.

Тоді величина:

$$\alpha_{ij} = \int_{\omega}^{\Omega} \|G\vec{X}_j u_i\| d\omega$$

визначає наведення та спотворення в каналі при поширенні i -го сигналу по j -й лінії. Зазначимо, що величина α_{ij} може бути задана й іншим чином. Спосіб завдання цього критерію визначається із практичних міркувань у кожному конкретному випадку.

Однак, традиційні критерії, що використовуються в автоматичі, тут не застосовні, оскільки для них необхідні параметри процесу ($t \rightarrow \infty$), які можуть бути отримані асимптотичним методом.

Сумарні спотворення системи, що складається з n сигналів у каналі, природно визначити за допомогою наступного критерію:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_{ij} \rightarrow \min_{\xi \in Q}, \quad (2.30)$$

де $Q : \xi_{ij} \in \{0;1\}$; $\sum_{i=1}^n \xi_{ij} = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} = 1$, ξ_{ij} – елемент матриці Адамара, тобто

$\sum_{i=1}^n \xi_{ij} = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} = 1$, $\xi_{ij} = 0$ чи 1 за всіма i та j . Можна безпосередньо показати,

що з будь-якого несиметричного каналу величина Z залежить від розподілу сигналів лініями. Завдання мінімізації критерію (2.30) на безлічі матриць $\{\xi_{ij}\}$ являє собою відому "задача про призначення".

2.6 Вибір та обґрунтування критерію для оптимізації та погодження за мінімумом відбитого сигналу

Перейдемо до вирішення задачі електричного узгодження багатопровідної лінії із багатоканальним приймачем сигналів. Для одно-

канальної системи розв'язання задачі відоме з електротехніки [11]. Для багатоканальних систем завдання ускладнюється тим, що матриця опору навантаження Z_n (тобто вхідний опір приймача) в реальних системах завжди діагональна або близька до діагональної, оскільки паразитні зв'язки в приймачі завжди намагаються звести до мінімуму.

Позначимо через X матрицю $X(x, \varepsilon)$ з (2.9), упорядкувавши стовпці за зростанням власних чисел λ_i , запишемо:

$$X = \begin{bmatrix} U^- & U^+ \\ I^- & I^+ \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

де U^- і U^+ (I^- і I^+) – блоки розмірності $n \times n$, що визначають напруги (струми) системи падаючих та відбитих хвиль (відповідно, верхні індекси «-» та «+»).

Тоді напруги та струми у приймачі мають вигляд

$$Z_h \vec{I}_1 = \vec{U}_1 = U^- \vec{C}^- + U^+ \vec{C}^+; \quad \vec{I}_1 = I^- \vec{C}^- + I^+ \vec{C}^+, \quad (2.32)$$

де \vec{C}^- і \vec{C}^+ – вектори коефіцієнтів «прив'язки» до граничних умов.

Найкращим електричним узгодженням, очевидно, є нагода $\vec{C}^+ = 0$.

Це призводить до необхідної умови:

$$Z_h = U^{-1}(I^-)^{-1}. \quad (2.33)$$

Матриця Z_h з (2.33), загалом, недіагональна за наявності взаємовпливів. Це робить необхідним рішення задачі наближення Z_h діагональними матрицями у сенсі мінімізації деякого критерію I .

Як зручний з обчислювальної точки зору, пропонується критерій $I_1 = \|Z_h - D\|$. Для найпоширеніших матричних норм мінімум I_1 досягається на

матриці $D = \text{diag}\{Z_{ij}\}$. Діагональ якої збігається з діагоналлю Z_n . Тоді можна скористатися нормою, для якої:

$$\min_D I_1 = \max_{i,j} |Z_{ij}|. \quad (2.34)$$

Істотним недоліком критерію I_1 і те, що він пов'язаний безпосередньо з величиною відбитих хвиль.

Таким чином, необхідно використовувати критерії I безпосередньо залежні від вектору \vec{C}^+ .

Перший із пропонованих підходів полягає в наступному.

З (2.33) отримаємо:

$$U^- \vec{C}^- + U^+ \vec{C}^+ = Z_n (I^- \vec{C}^- + I^+ \vec{C}^+). \quad (2.35)$$

Якщо $\vec{C}^+ \equiv 0$, то $U^- \vec{C}^- = Z_n I^- \vec{C}^-$. У той же час на вході каналу маємо $U_0 = U(0)^- \vec{C}^-$; $\vec{C}^- = (U^-(0))^{-1} \vec{U}_0$. Знаючи U^- , $U^-(0)$ і I^- підберемо діагональну матрицю $Z_n = \text{diag}\{d_i\}$ для даного вхідного вектору U_0 . Для цього

$$d_i = \frac{[U^- \cdot (U^-(0))^{-1} \vec{U}_0]_i}{[I^- \cdot (U^-(0))^{-1} \vec{U}_0]_i}.$$

Якщо на вхід каналу подано кінцевий набір **т**непаралельних векторів \vec{U}_{0j} та ймовірності їх появи p_j відомі, то приймач має бути налаштований на вхідний вектор \vec{V} , що наближає систему векторів $\{\vec{U}_{0j}\}$ найкращим чином. Як критерій може бути запропонована, наприклад, зважена сума скалярних добутоків:

$$I_2 = \sum_{j=1}^m |\vec{U}_{0j}, \vec{V}| \cdot p_j. \quad (2.36)$$

Для використання (2.36) необхідна апріорна інформація про вхідні сигнали, яка практично не завжди доступна.

Від зазначених недоліків вільний наступний підхід. Складемо функціонал I_3 . Друге з поставлених завдань полягає у його дослідженні та мінімізації. З (2.34) випливає:

$$(U^+ - Z_{\text{н}} I^+) \vec{C}^+ + (U^- - Z_{\text{н}} I^-) C^- = 0.$$

Використовуючи умову $\vec{U}_0 = U^+(0) \vec{C}^+ + U^-(0) \vec{C}^-$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{C}^+ &= [U^+(0) - U^-(0)[U^- - Z_{\text{н}} I^-]^{-1}[U^+ - Z_{\text{н}} I^+]]^{-1} \cdot \vec{U}_0. \\ I_3 &= \left\| [U^+(0) - U^-(0)[U^- - Z_{\text{н}} I^-]^{-1}[U^+ - Z_{\text{н}} I^+]] \right\|. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Мінімум норми \vec{C}^+ досягається на тих $Z_{\text{н}}$, які максимізують величину (2.37). У цьому випадку функціонал I_3 не є опуклим. Навіть для випадку $n = 2$ та найпростіших норм аналітична залежність $I_3(Z)$ складна і не дозволяє застосувати класичні методи розв'язання задач на екстремумі.

Щоб скористатися відомими чисельними методами, необхідно довести обмеженість величини I_3 на безлічі D діагональних матриць. Необхідність доказу цього факту випливає з результату підстановки (2.37) значення $Z_{\text{н}}$ з (2.33). З аксіом норми випливає:

$$I_3 = \|U^+(0)\| + \|U^-(0)\| \cdot \|(U^- - DI^-)^{-1}\| \cdot \|U^+ - DI^+\|; \quad (2.38)$$

$$I_4 = \|(U^- - DI^-)^{-1}\| \cdot \|U^+ - DI^+\|. \quad (2.39)$$

Покажемо, що I_4 обмежено на всій множині D . Дійсно, для будь-якого кінцевого D маємо:

$$\begin{aligned} U^- - DI^- &\neq 0, \\ \|U^+ - DI^+\| &\leq c < \infty. \end{aligned}$$

Нехай тепер елементи матриці D прагнуть до нескінченності як $O(d)$ де $d \rightarrow \infty$. Для досить великих d маємо:

$$\begin{aligned} (U^- - DI^-) \cdot Q_1 d, \\ (U^+ - DI^+) \cdot Q_2 d, \end{aligned}$$

де: Q_1 і Q_2 невироджені матриці.

Звідси:

$$I_4 \leq \|Q_1^{-1}\| \cdot \|Q_2\| + 1 \text{ при } d \rightarrow \infty.$$

Відмітимо, що I_4 також може бути критерієм неузгодженості. При використанні крокових методів оптимізації I_3 як початкова точка зручно вибирати матриці D , що мінімізують критерій I_1 .

Таким чином, оптимізаційна задача для випадку мінімуму відбитого сигналу з використанням критерію (2.38) може бути записана:

$$I_3 = \|U^+(0) - U^-(0)[U^- - DI^-]^{-1} \cdot [U^+ - DI^+]\| \rightarrow \max_{D \in Q'} \quad (2.40)$$

де $Q' = \{diag(d_i) | \operatorname{Re}(d_i) > 0\}$,

$U^-(0), U^+(0)$ – отримані з $X(0, \omega)$.

Висновки за розділом 2

Якщо на вхід каналу подано кінцевий набір m непаралельних векторів \vec{U}_{0j} та ймовірності їх появи p_j відомі, то приймач має бути налаштований на вхідний вектор \vec{V} , що наближає систему векторів $\{\vec{U}_{0j}\}$ найкращим чином. Як критерій може бути запропонована, наприклад, зважена сума скалярних добутків.

Щоб скористатися відомими чисельними методами, необхідно довести обмеженість величини I_3 на безлічі D діагональних матриць.

Відмітимо, що I_4 також може бути критерієм неузгодженості. При використанні крокових методів оптимізації I_3 як початкова точка зручно вибирати матриці D , що мінімізують критерій I_1 .

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Реалізація алгоритмів оптимізації на підґрунті теореми Хола

Для оптимізації конкретних систем призначення «сигнал – канал» може бути використана програма, що реалізує алгоритм, який полягає у модифікації методу Флада за допомогою теореми Холла про системи різних представників.

Загальна постановка так званого «транспортного завдання» полягає у визначенні оптимального плану перевезень одного однорідного вантажу з m пунктів відправлення A_1, A_2, \dots, A_m у n пунктів призначення B_1, B_2, \dots, B_n . При цьому як критерій оптимальності зазвичай береться або мінімальна вартість перевезень всього вантажу, або мінімальний час доставки. Розглянемо транспортну задачу, як критерій оптимальності якої взято мінімальну вартість перевезень всього вантажу. Позначимо через c_{ij} тарифи перевезення одиниці вантажу з i -го пункту відправлення до j -го пункту призначення, через a_i – запаси вантажу в i -му пункті відправлення, через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозиться з i -го пункту відправлення до j -го пункту призначення.

Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції [4]:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (3.4)$$

Оскільки змінні x_{ij} , $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ задовольняють системам лінійних рівнянь (3.2) та (3.3) та умові невід'ємності (3.4), забезпечуються доставка необхідної кількості до кожного з пунктів призначення, вивезення наявного “вантажу” з усіх пунктів відправлення, а також виключаються зворотні перевезення.

Будь-яке невід'ємне рішення систем лінійних рівнянь (3.2) – (3.4), що визначається матрицею $X = (x_{ij}) (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, називається планом транспортного завдання.

План $X^* = (x_{ij}^*) (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, при якому функція (3.1) набуває свого мінімального значення, називається оптимальним планом.

Якщо обсяги готівкових і необхідних виконання кожної роботи ресурсів рівні одиниці, тобто $a_j = b_i = 1$ при всіх значеннях i та j (i , крім того, всі $x_{ij} = 1$ або 0), то за цих умов маємо задачу про призначення «сигнал – канал». У задачах цього класу для виконання кожної роботи потрібно один і тільки один вид ресурсу, а кожен ресурс може бути використаний на одній і одній роботі.

Таким чином, ресурси неподільні між роботами, а роботи неподільні між ресурсами.

Таким чином, завдання зводиться до мінімізації функції:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} \quad (3.5)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

та $x_{ij} = 0$ або 1.

Зрозуміло, що якщо відкинути останню умову та замінити її умовою $x_{ij} \geq 0$, то виходить транспортна задача, в якій всі потреби та всі ресурси рівні одиниці. В оптимальному рішенні все x_{ij} дорівнюють або цілого числа, або нуля, причому очевидно, що єдиним можливим цілям є одиниця.

Проте внаслідок виродженості матриці рішення транспортних завдань у разі завдання призначення виявляється малоефективними. За будь-якого призначення завжди автоматично збігаються поставки по рядку з попитом по стовпцю і тому замість $2n - 1$ отримуємо n ненульових значень x_{ij} . У зв'язку з цим необхідно заповнити матрицю $n - 1$ величинами ε , і може виявитися, що ненульові значення x_{ij} визначають оптимальне рішення, проте перевірка його не виявляє, оскільки величини ε розставлені неправильно.

Метод вирішення завдання призначення призначений на двох досить очевидних теоремах [5]. Перша з них стверджує, що рішення не зміниться, якщо додати до будь-якого стовпця та рядка матриці c_{ij} деяку константу або відняти її від них.

Розроблений метод рішення зводиться до додавання констант до рядків і стовпців і віднімання їх з рядків і стовпців доти, доки достатня кількість величин c_{ij} не звертається в нуль, що дає рішення, що дорівнює нулю.

Описуваний нижче алгоритм забезпечує вирішення цього завдання. Цей алгоритм отримав назву алгоритму Флада [6].

Опис алгоритму:

- провести мінімальну кількість горизонтальних і вертикальних прямих, що перетинають принаймні один раз усі нулі.
- вибрати найменший елемент, через який не проведено лінію.

– відняти це число з усіх елементів, через які не проведено жодну лінію, і додати його до всіх елементів, через які проведено дві лінії.

– визначити, чи є рішення серед нового набору нулів. Якщо рішення не виявляється, то повернутися до кроку 1 і виконати всі наступні кроки, доки не буде знайдено рішення.

Алгоритм базується на теоремах Ф. Холла і Д. Кеніга – вони дозволяють визначити, чи знайдено рішення задачі, оскільки застосування цих теорем дає можливість знаходження мінімальної кількості ліній, які мають перекреслити всі необхідні нам елементи матриці.

3.2 Алгоритм вирішення задачі оптимізації та узгодження сигналу на кінцевому пристрою

Для оптимізації маємо чотири критерії мінімізації перешкод, що виникають внаслідок відображення частини сигналу від приймача:

$$\text{а) } I_1 = \|Z_{\text{н}} - D\|;$$

$$\text{б) } I_2 = \sum_{j=1}^m |\vec{U}_{0j}, \vec{V}| \cdot p_j;$$

$$\text{в) } I_3 = \|U^+(0) - U^-(0)[U^- - Z_{\text{н}}I^-]^{-1} \cdot [U^+ - Z_{\text{н}}I^+]\|;$$

$$\text{г) } I_4 = \|(U^- - DI^-)^{-1}\| \cdot \|U^+ - DI^+\|,$$

де $\| \|$ – будь-яка класична матрична норма.

На підставі вищевикладеного можна зробити висновок, що застосування критерію I_3 мінімізації відбитого сигналу буде найкращим. Для знаходження мінімуму функціоналу застосуємо метод прямого пошуку.

Фактично цей метод полягають у зміну щоразу однієї змінної, тоді як інші залишаються постійними, доки досягне мінімум. Тобто змінна x_1 встановлюється постійною, а x_2 змінюють доти, доки не буде отримано

мінімум. Потім, зберігаючи нове значення x_2 постійним, змінюємо x_1 , доки не буде досягнуто оптимуму при вибраному значенні x_2 і так далі.

Хук і Дживс запропонували логічно просту стратегію пошуку, що використовує апріорні відомості і в той же час відкидає застарілу інформацію щодо характеру патології цільової функції в E_n . У інтерпретації Вуда цей алгоритм включає два основні етапи: «досліджувачий пошук» навколо базисної точки і «пошук на зразок», тобто. у напрямку, вибраному для мінімізації. На рисунку 3.1 представлено спрощену інформаційну блок-схему цього алгоритму [10].

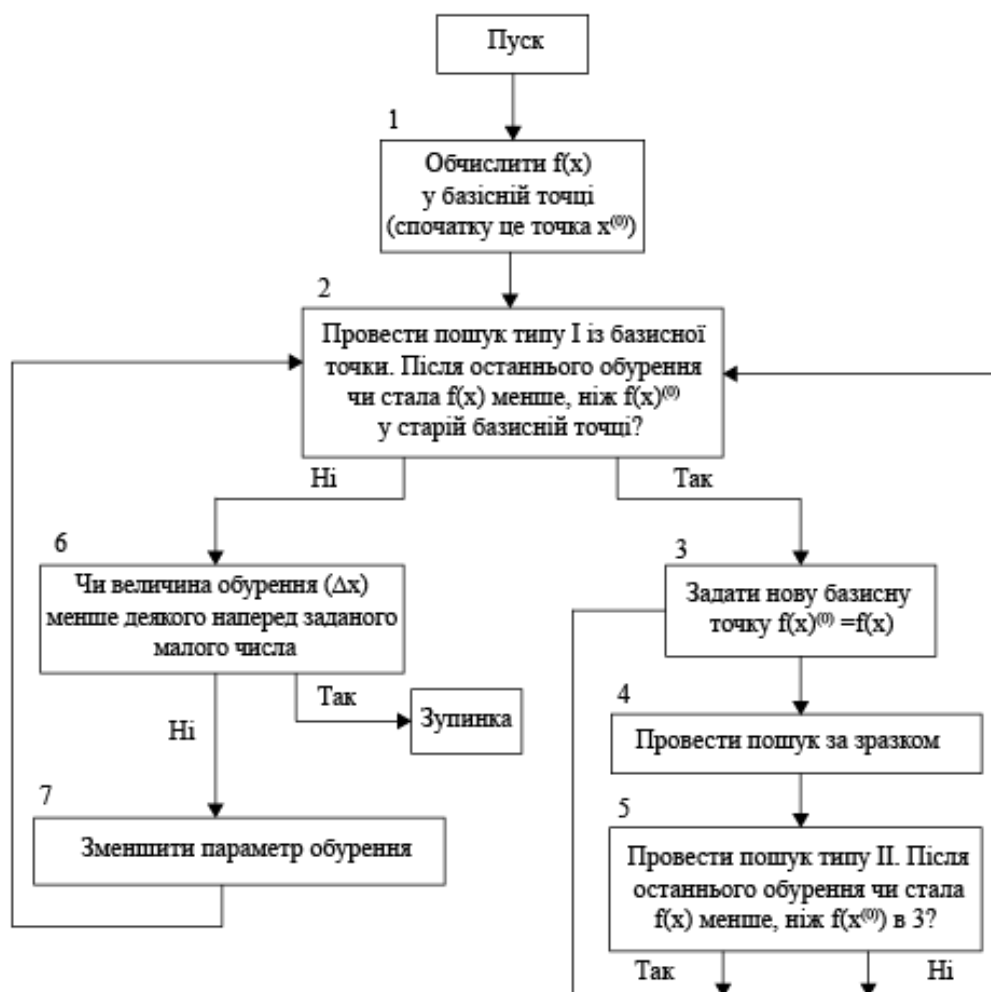


Рисунок 3.1 – Інформаційна блок-схема мінімізації прямим пошуком

Розглянутий алгоритм прямого пошуку складається з наступних операцій. Насамперед, задаються початкові значення всіх елементів x , а також початкове збільшення. Щоб розпочати «досліджувальний пошук», слід визначити

значення функції $f(x)$ в базисній точці (базисна точка є початковим вектором передбачуваних значень незалежних змінних на першому циклі). Потім у циклічному порядку змінюється кожна змінна (щоразу лише одна) на вибрані величини прирощень, доки всі параметри не будуть таким чином змінені. Зокрема, $x_1^{(0)}$ змінюється на величину $\Delta x_1^{(0)}$, так що $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}$. Якщо збільшення не покращує цільову функцію, $x_1^{(0)}$ змінюється на $-\Delta x_1^{(0)}$ та значення $f(x)$ перевіряється, як і раніше. Якщо значення $f(x)$ не покращують ні $x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}$ ні $x_1^{(0)} - \Delta x_1^{(0)}$, то $x_1^{(0)}$ залишають без змін. Потім $x_2^{(0)}$ змінюють на величину $\Delta x_2^{(0)}$ і т. д., доки не будуть змінені всі незалежні змінні, що завершує один пошук. На кожному кроці або зрушенні незалежної змінної значення цільової функції порівнюється з її значенням у попередній точці. Якщо цільова функція покращується на цьому кроці, її старе значення замінюється на нове при наступних порівняннях. Однак якщо зроблене обурення щодо x невдало, то зберігається колишнє значення $f(x)$.

Після проведення одного (або більше) досліджувального пошуку застосовується стратегія пошуку за зразком. Вдалі зміни змінних у досліджувальному пошуку [тобто ті зміни змінних, які зменшили $f(x)$] визначають вектор у E^n , що вказує деякий напрямок мінімізації, який може призвести до успіху. Серія кроків, що прискорюються, або пошук за зразком, проводиться вздовж цього вектора до тих пір, поки $f(x)$ зменшується при кожному такому пошуку. Довжина кроку при пошуку за зразком у даному координатному напрямку приблизно пропорційна числу вдалих кроків, що мали місце раніше в цьому координатному напрямку під час пошуків, що досліджують, за кілька попередніх циклів. Для прискорення процесу оптимізації зміна розміру кроку Δx у пошуку за зразком здійснюється шляхом введення деякого множника при величині Δx , що використовується у досліджувальних пошуках. Досліджувальний пошук, що проводиться після пошуку за зразком, називається пошуком типу II; Успіх чи невдачу пошуку за даним зразком не можна встановити до завершення досліджувального пошуку типу II.

Якщо $f(x)$ не зменшується у процесі досліджувачого пошуку типу II, то кажуть, що цей пошук за зразком невдалий, і проводиться новий пошук типу I для визначення нового вдалого напрямку. Якщо досліджувачий пошук типу I не дає нового вдалого спрямування, то послідовно зменшують Δx , поки або можна буде визначити новий вдалиий напрямок, або Δx стане менше, ніж деяка заздалегідь встановлена допустима величина. Неможливо зменшити $f(x)$, коли Δx_i досить мале, вказує на те, що досягнуто локального оптимуму. Описана послідовність пошуків закінчується, якщо виявляються задовільними умови трьох основних тестів. Перший тест проводиться після кожного досліджувачого пошуку та пошуку за зразком: зміна цільової функції порівнюється із заздалегідь встановленою малою величиною. Якщо значення цільової функції не відрізняється на величину, більшу, ніж це число, від попереднього основного значення цільової функції, пошук або пошук за зразком вважається невдалим. Інакше проводиться тест визначення, збільшилася цільова функція (невдача) чи зменшилася (вдалиий пошук). Цей другий тест потрібний для того, щоб бути впевненим, що значення цільової функції постійно покращується. Третій тест проводиться після невдачі у досліджувальному пошуку на стадії зменшення зміни Δx . Пошук може бути закінчений, якщо на цьому кроці зміна кожної змінної $\Delta x_i^{(k)}$ виявляється менше, ніж деяке наперед певне число.

Висновки за розділом 3

Для реалізації обох алгоритмів в даній роботі використан математичний пакет, створений американською компанією Wolfram Research, Inc. Основним автором первинних версій розробки є відомий фізик та Стефан Вольфрам (Stephen Wolfram). Концепція системи Mathematica полягає в системі символічної математики, в якій можна обробляти різні технічні обчислення.

Для роботи обрано вільно розповсюджений (з обмеженим терміном користування) сучасний пакет Mathematica. Текст програми наведено у Додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Завдання оптимізації перешкод унаслідок взаємних впливів

Як приклад розглянемо кабель довжиною 1000 м, у якому утворено 3 ланцюги. Напруги на вході синусоїдальні, з різною фазою, та амплітудами $|u_1| = 10$ В, $|u_2| = 15$ В, $|u_3| = 20$ В, $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ Гц.

Напрямна система задана таким чином:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R0} &= \begin{pmatrix} 0.11 & 0.021 & 0.02 \\ 0.021 & 0.13 & 0.019 \\ 0.02 & 0.019 & 0.09 \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{G0} &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.073 & 0.071 \\ 0.073 & 0.75 & 0.07 \\ 0.071 & 0.07 & 0.79 \end{pmatrix} * 10^{-3}; \\
 \mathbf{L0} &= \begin{pmatrix} 0.29 & 0.038 & 0.039 \\ 0.038 & 0.3 & 0.041 \\ 0.039 & 0.041 & 0.34 \end{pmatrix} * 10^{-4}; \\
 \mathbf{C0} &= \begin{pmatrix} 0.69 & 0.091 & 0.087 \\ 0.091 & 0.692 & 0.093 \\ 0.087 & 0.093 & 0.709 \end{pmatrix} * 10^{-6};
 \end{aligned}$$

За допомогою складених програм передавальна матриця каналу за напругою при узгодженому навантаженні складає (див. Додаток А):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -0.0156062 - 0.290211 \text{ i} & 0.116927 + 0.213926 \text{ i} & 0.133623 - 0.288141 \text{ i} \\ 0.115213 + 0.213926 \text{ i} & -0.000531025 - 0.235776 \text{ i} & 0.141334 - 0.323764 \text{ i} \\ 0.139886 - 0.288141 \text{ i} & 0.150207 - 0.323764 \text{ i} & 0.0560655 + 0.0514823 \text{ i} \end{pmatrix},$$

відповідна їй матриця \mathbf{K}_0 :

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} 0.124367 - 0.519315 \text{ i} & 0. + 0. \text{ i} & 0. + 0. \text{ i} \\ 0. + 0. \text{ i} & -0.141011 + 1.11756 \text{ i} & 0. + 0. \text{ i} \\ 0. + 0. \text{ i} & 0. + 0. \text{ i} & 0.319396 - 8.24584 \text{ i} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\{\alpha_{ij}\} = \begin{pmatrix} 3.20302 & 13.6061 & 13.6061 \\ 4.80453 & 20.4092 & 20.4092 \\ 6.40604 & 27.2122 & 27.2122 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо $Z_{\min} = 40.42$ і найкращим узгодженням буде 1-й, 2-й, 3-й сигнали подати відповідно по 3-му, 2-му, 1-му або 3-му, 1-му, 2-му каналам.

4.2 Завдання оптимізації перешкод внаслідок відображення частини сигналу

Розглянемо самі параметри напрямної системи, як і для п. 4.1.

Тоді на основі побудованих матриць X і $X(0)$ можемо записати:

$$U^- = \begin{pmatrix} 1.52631 + 0.698539 \text{ i} & -0.988897 - 1.07402 \text{ i} & -1.55731 + 1.83248 \text{ i} \\ 1.64098 + 0.751017 \text{ i} & -1.12715 - 1.22417 \text{ i} & 1.4343 - 1.68774 \text{ i} \\ 2.05839 + 0.942053 \text{ i} & 1.72999 + 1.87891 \text{ i} & 0.0280865 - 0.0330492 \text{ i} \end{pmatrix}$$

$$U^+ = \begin{pmatrix} 1.55731 + 1.83248 \text{ i} & 0.988897 - 1.07402 \text{ i} & -1.52631 + 0.698539 \text{ i} \\ -1.4343 - 1.68774 \text{ i} & 1.12715 - 1.22417 \text{ i} & -1.64098 + 0.751017 \text{ i} \\ -0.0280865 - 0.0330492 \text{ i} & -1.72999 + 1.87891 \text{ i} & -2.05839 + 0.942053 \text{ i} \end{pmatrix}$$

$$I^- = \begin{pmatrix} 0.471401 + 0.215743 \text{ i} & -0.305541 - 0.331842 \text{ i} & -0.479767 + 0.564538 \text{ i} \\ 0.50017 + 0.22891 \text{ i} & -0.341513 - 0.370909 \text{ i} & 0.434854 - 0.51169 \text{ i} \\ 0.595339 + 0.272465 \text{ i} & 0.49882 + 0.541757 \text{ i} & 0.00907867 - 0.0106828 \text{ i} \end{pmatrix}$$

$$I^+ = \begin{pmatrix} -0.479767 - 0.564538 \text{ i} & -0.305541 + 0.331842 \text{ i} & 0.471401 - 0.215743 \text{ i} \\ 0.434854 + 0.51169 \text{ i} & -0.341513 + 0.370909 \text{ i} & 0.50017 - 0.22891 \text{ i} \\ 0.00907867 + 0.0106828 \text{ i} & 0.49882 - 0.541757 \text{ i} & 0.595339 - 0.272465 \text{ i} \end{pmatrix}$$

$$U^-(0) = \begin{pmatrix} -3.35714 & -2.91989 & -4.80965 \\ -3.60934 & -3.3281 & 4.42975 \\ -4.52745 & 5.1081 & 0.0867433 \end{pmatrix}$$

$$U^+(0) = \begin{pmatrix} 4.80965 & 2.91989 & 3.35714 \\ -4.42975 & 3.3281 & 3.60934 \\ -0.0867433 & -5.1081 & 4.52745 \end{pmatrix}$$

$$I^-(0) = \begin{pmatrix} -0.518424 & -0.451081 & -0.740864 \\ -0.550064 & -0.504187 & 0.671509 \\ -0.654726 & 0.736425 & 0.0140194 \end{pmatrix}$$

$$I^+(0) = \begin{pmatrix} 4.80965 & 2.91989 & 3.35714 \\ -4.42975 & 3.3281 & 3.60934 \\ -0.0867433 & -5.1081 & 4.52745 \end{pmatrix}$$

Оскільки метод прямого пошуку розроблений для знаходження мінімуму, то максимум для I_3 буде мінімум функції $-I_3$.

Візьмемо як початкову точку для методу прямого пошуку Хука-Джівса діагональну матрицю вхідних опорів навантаження $D_0=\{1+i2, 1+i1, 7+i1\}$; значення функції у нульовій точці буде $f_0 \rightarrow -14.7644$.

Наведемо далі першу та останню ітерації:

```

1 _____
1 -> +: -14.7644, -: -14.7644, di={0.1, 2, 1, 1, 7, 1}, f=-14.7644 fd -> -14.7644
2 -> +: -14.7644, -: -14.7644, di={0.1, 1.1, 1, 1, 7, 1}, f=-14.7644 fd -> -14.7644
3 -> +: -14.7644, -: -14.7644, di={0.1, 1.1, 0.1, 1, 7, 1}, f=-14.7644 fd -> -14.7644
4 -> +: -14.7644, -: -14.7644, di={0.1, 1.1, 0.1, 0.1, 7, 1}, f=-14.7644 fd -> -14.7644
5 -> +: -16.0237, -: -13.506, di={0.1, 1.1, 0.1, 0.1, 6.1, 1}, f=-16.0237 fd -> -14.7644
6 -> +: -13.6954, -: -13.4334, di={0.1, 1.1, 0.1, 0.1, 6.1, 0.1}, f=-13.6954 fd -> -14.7644

9 _____
1 -> +: -13.4135, -: -13.4135, di=
  {0.0929687, 1.08594, 0.0859375, 0.0859375, 6.08594, 0.0859375}, f=-13.4135 fd -> -16.0237
2 -> +: -13.4135, -: -13.4135, di=
  {0.0929687, 1.09297, 0.0859375, 0.0859375, 6.08594, 0.0859375}, f=-13.4135 fd -> -16.0237
3 -> +: -13.4135, -: -13.4135, di=
  {0.0929687, 1.09297, 0.0929687, 0.0859375, 6.08594, 0.0859375}, f=-13.4135 fd -> -16.0237
4 -> +: -13.4135, -: -13.4135, di=
  {0.0929687, 1.09297, 0.0929687, 0.0929687, 6.08594, 0.0859375}, f=-13.4135 fd -> -16.0237
5 -> +: -13.4431, -: -13.4233, di=
  {0.0929687, 1.09297, 0.0929687, 0.0929687, 6.09297, 0.0859375}, f=-13.4431 fd -> -16.0237
6 -> +: -13.4236, -: -13.4234, di=
  {0.0929687, 1.09297, 0.0929687, 0.0929687, 6.09297, 0.0929687}, f=-13.4236 fd -> -16.0237

```

Висновки за розділом 4

Елементи вектора d_i с непарними індексами відповідатимуть дійсній частині чисел Z_{ni} , а з парними – уявною, f – значення функції на k -му кроці, fd –

значення функції на k -му кроці після проведеного пошуку мінімуму на k -му кроці.

Таким чином, рішення вихідного завдання набуде вигляду:

```
Kol-vo iteracij -> 9, f(D)=16.0237, D=  
{0.0929687 + 1.09297 i, 0.0929687 + 0.0929687 i, 6.09297 + 0.0929687 i}
```

Відповідна програма для обчислення вищевикладеного завдання, а також усі необхідні проміжні результати наведені у Додатку А

ВИСНОВКИ

У атестаційній роботі була змодельована багатомодова система передачі даних шляхом побудови матричної передавальної функції, що відображає залежність сигналу на виході від сигналу на вході багатомодового каналу з взаємними впливами мод, по ній була побудована передатна матриця за напругою, за допомогою якої визначили критерій, що відповідає між каналами.

На підставі цього:

– показано, що різні паросполучення типу канал-сигнал дають різні величини наведень у каналі.

– запропоновано та обґрунтовано критерії оптимального призначення каналів передачі на безлічі сигналів, що передаються.

– було зроблено аналіз методів вирішення оптимізаційної задачі для вибору найкращого з них. Для вирішення було обрано алгоритм Флада.

– для обраного критерію проведено розрахунок із параметрами реально існуючої лінії.

Для оптимізації каналу за мінімумом відбиття на виході розглянуто декілька критеріїв та проведено розрахунок оптимальних електричних входних опорів багатоканального приймача. У більшості практично важливих випадків оптимум досягається всередині області обмежень.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Незнанов М.Ю. Оптимізація узгодження сигналів з багатоканальними системами. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»*. Зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків: ХНУРЕ. 2023. 243 с.
2. Акоф Р. Основы исследования операций. Москва : Мир, 1971. 538 с.
3. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Москва : Высшая шк., 1986. 320 с.
4. Бразма Н. А. Решение основных задач обобщенной системы телеграфных уравнений матричным методом разделения переменных. *Радиотехника*, август, 1952. С. 79–92.
5. Дикарев В. А. Волны в многопроводных системах с распределенными параметрами. *Радиотехника и электроника*, Изд-во АН СССР. 1975. Т. XX вып. 12. С. 10–13
6. Зингеренко А. М. Системы многоканальной. Москва : Связь, 1980. 440 с.
7. Кузнецов П. И. Об оптимальном переходе между двумя различными однородными длинными линиями. 1954. Т. 9, №2. С. 13–20.
8. Ланкастер П. Теория матриц. Москва : Наука, 1973. 280 с.
9. Литвиненко О. Н. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. Москва : Советское радио, 1964. 535 с.
10. Перельман Я. С. Распространение волн по неоднородным линиям электропередачи с периодическими неоднородностями. *Электричество*, 1971, № 7. С. 44–48.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. Москва : Мир, 1975. 536 с.
12. Холл М. Комбинаторика. Москва : Мир, 1970. 424 с.
13. Шварцман В. О. Взаимные влияния в кабелях связи. Москва : Связь, 1966. 430 с.
14. С.-Петербург. гос. ун-т, фак. прикладной математики и процессов управления. URL: <http://www.fipm.ru/normir7.shtml/> (дата звернення: 14.01.2024).