УДК 621.372

М. А. ИВАНОВ, д-р техн. наук, *И. А. ЯКОВЛЕВ*, канд. физ.-мат. наук,
А. И. ЯКОВЛЕВА

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫХОДНОГО ОТКЛИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Известно, что отсутствие строгой и полной теории нелинейных динамических преобразований стохастических сигналов существенно ограничивает возможности анализа, синтеза и идентификаций реальных радиосистем [1]. Поэтому цель исследования основных статистических характеристик сигнала на выходе нелинейных радиосистем вольтерровского типа, которые широко распространены на практике и обладают достаточно хорошо разработанным математическим аппаратом их аналитического описания [1; 2].

Запишем выходной отклик $y(\cdot)$ одномерной нелинейной инерционной системы с постоянными параметрами и аналитическими (или приводимыми к аналитическим) характеристикам в виде стационарного ряда Вольтерра от входного воздействия $x(\cdot)$ [2]:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1,\ldots\tau_n)\prod_{i=1}^{\infty} x(t-\tau_i)\,d\tau_i, \qquad (1)$$

где $h_n(\cdot)$ — ядро Вольтерра n-го порядка, характеризующее импульсную переходную характеристику n-й подсистемы Вольтерра общей функциональной модели исследуемой нелинейной радиосистемы; $y_n(\cdot)$ — парциальный выходной отклик подсистемы Вольтерра n-го порядка указанной выше модели. Таким образом, описываемая формулой (1) общая функциональная модель исследуемой нелинейной динамической радиосистемы (далее—системы вольтерровского типа) представляет собой параллельное соединение не более чем счетной совокупности подсистем Вольтерра различных порядков.

Отметим, что из значительного количества статистических характеристик случайных процессов особое место занимает их стационарность. Поэтому представляется целесообразным в первую очередь исследовать влияние вольтерровских нелинейных инерционных преобразований стохастических сигналов на стационарные свойства последних. В этой связи сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для обеспечения стационарности m-го порядка выходного отклика $y_n(\cdot)$ n-й подсистемы Вольтерра достаточно стационарности $(m\cdot n)$-го порядка входного сигнала $x(\cdot)$.*

Доказательство. В соответствии с известным определением [1], стационарности m-го порядка случайного процесса $y_n(\cdot)$ означает независимость всех его моментов порядка не выше m от начала отсчета времени, т. е.

$$M_k\{y_n(t_1)\cdot\ldots\cdot y_n(t_k)\}=M_k\{y_n(t+\theta\cdot\ldots\cdot y_n(t_k+\theta)\}\stackrel{\Delta}{=} \qquad (2)$$

$$\stackrel{\Delta}{=} M_k[y_n](\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}),\ \forall k\in[1,m],$$

где — $M_k\{\cdot\}$ — момент k-го порядка; θ — произвольный временной сдвиг;

$$\xi_i \stackrel{\Delta}{=} t_{i+1}-t_1,\quad \forall i\in[1,(k-1)].$$

Используя формулу (1) с учетом отмеченного ранее постоянства параметров нелинейных систем исследуемого типа (подсистем

Вольтерра их общей функциональной модели), перепишем левую часть равенства (2) в виде

$$M_k\{y_n(t_1)\cdot\ldots\cdot y_n(t_k)\} = M_1\left\{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_{11},\ldots,\tau_{n1})\times\right.\right.$$

$$\times\prod_{i1=s}^{n} x(t_1-\tau_{is})\,d\tau_{i1}]\cdot\ldots\cdot\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_{1k},\ldots\tau_{nk})\prod_{ik=1}^{n} x(t_k\cdot\tau_{ik})\,d\tau_{ik}\right]\Bigg\}.$$

Применяя известную теорему о среднем суммы [1], из соотношения (3) получаем

$$M_k\{y_n(t_1)\cdot\ldots\cdot y_n(t_k)\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_1\left\{\prod_{j=1}^{k}\prod_{y=1}^{n} x(t_j-\tau_{ij})\right\}\prod_{j=1}^{k}\left[h_n(\tau_{1j},\ldots,\tau_{nj})\prod_{ij=1}^{n} d\tau_{ij}\right]\equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\infty\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{kn}\{x(t_1-\tau_{11}),\ldots,x(t_k-\tau_{nk})\}\prod_{j=1}^{k} h_n(\tau_{1j},\ldots,\tau_{nj})\prod_{ij=1}^{n} d\tau_{ij}. \tag{4}$$

Из выражения (4) следует, что для обеспечения независимости от начала отсчета времени k-го момента $M_k\{y_n(t_1)\cdot\ldots y_n(t_k)\}$ выходного отклика $y_n(\cdot)$ требуется независимость от начала отсчета времени момента $(k\cdot n)$-го порядка $M_{kn}\{x(t_1)\ \ldots\ x(t_{kn})\}$ входного воздействия $x(\cdot)$, т. е.

$$M_{kn}\{x(t_1)\cdot\ldots\cdot x(t_{kn})\} = M_{kn}\{x(t_i+\theta)\cdot\ldots\cdot x(t_{kn}+\theta)\} \stackrel{\Delta}{=}$$

$$\stackrel{\Delta}{=} M_{kn|\times]}(\eta_1,\ldots,\eta_{kn-1}), \tag{5}$$

где $\quad \eta \stackrel{\Delta}{=} (t_{[i+1]^{\#}}-\tau_{i+1})-(t_1-\tau_1),\ \ \forall i\in[1,(1,(k_n-1)];$

$$[i+1]^{\#} \stackrel{\Delta}{=} \left|\begin{matrix}\left(\dfrac{i+1}{n}\right), & \forall\left(\dfrac{i+1}{n}\right)\in N\\ \left[\dfrac{i+1}{n}\right]^{*}+S, & \forall\left(\dfrac{i+1}{n}\right)\overline{\in} N\end{matrix}\right|,$$

где N — множество натуральных чисел; $[\cdot]^*$ — обозначение целой части числа, записанного в квадратных скобках.

Кроме того, поскольку равенство (2) должно выполняться при всех значениях k из множества натуральных чисел $[1, m]$, то для справедливости сформулированного выше утверждения о стационарности m-го порядка выходного отклика $y_n(\cdot)$ n-й подсистемы Вольтерра общей функциональной модели нелинейной инерционной системы вольтерровского типа достаточно обеспечить стационарность $(n\cdot m)$-го порядка сигнала $x(\cdot)$ на входе данной системы, а следовательно, и на входе указанной подсистемы Вольтерра.

Таким образом, доказанное утверждение означает, что нелинейное вольтерровское преобразование n-го порядка случайного процесса понижает порядок его стационарности в n раз. Отсюда следует, в частности, что свойство стационарности в широком смысле (стационарности второго порядка) случайных процессов не сохраняется при их произвольных нелинейных преобразованиях вольтерровского типа. Можно показать также справедливость подобных утверждений и для случайных (нестационарных) процессов со стационарными приращениями [1]. В последнем случае теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1'. *Для обеспечения стационарности m-го порядка приращений $\delta y_n(\cdot)$ выходного отклика $y_n(\cdot)$ n-й подсистемы Вольтерра достаточно стационарности $(m\cdot n)$-го порядка приращений $\delta x(\cdot)$ выходного сигнала $x(\cdot)$.*

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству теоремы 1 с заменой $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ на $\delta x(\cdot)$ и $\delta y(\cdot)$ соответственно. Легко видеть, что утверждение 1 справедливо для приращений любых порядков стохастических процессов $x(\cdot)$ и $y_n(\cdot)$. Кроме того, из теоремы 1 вытекает почти очевидное следствие.

Следствие 1. Для обеспечения стационарности второго порядка (стационарности в широком смысле или, что эквивалентно, стационарности по А. Я. Хинчину) выходного сигнала $y_n(\cdot)$ n-й подсистемы Вольтерра достаточно стационарности $(2\cdot n)$-го порядка входного воздействия $x(\cdot)$.

Доказательство. Справедливость данного положения следует из приведенных выше формул (4) и (5) для $k=2$. Нетрудно показать также и корректность следующего утверждения.

Следствие 2. Для обеспечения строгой стационарности (стационарности в узком смысле) сигнала $y_n(\cdot)$ на выходе n-й подсистемы Вольтерра достаточно строгой стационарности входного воздействия $x(\cdot)$.

Доказательство. Как известно [1], строгая стационарность (стационарность в узком смысле) случайного сигнала $y_n(t)$ предполагает, что функции его распределения любых порядков инварианты к временному сдвигу. С другой стороны, справедливость соотношения (2) для всех значений коэффициента k из полного счетного множества натуральных чисел N при выполнении достаточных условий Карлемана [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty}(M_{2k[y_n]}\{\cdot\})^{-1/2k}=\infty \qquad (6)$$

разрешимости классической проблемы моментов Чебышева (проблемы восстановления функции распределения стохастического процесса $y_n(\cdot)$ по его моментам)

$$M_{k[y_n]}\{\cdot\}=\int_{-\infty}^{\infty} y_n(t)\,dF_k\{y_n(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} y_n(t)\,f_k\{y_n(t)\}\,dy_n(t) \qquad (7)$$

позволяет обоснованно утверждать о корректности переноса ранее указанного свойства (2) независимости всех моментов $M_{k[y_n]}\{$ от начала отсчета времени на функции распределения $f_k\{y^n(\cdot)\}$ любых порядков. Отметим также, что в формуле (7) символами $F\{\cdot\}$

и $f_k\{\cdot\}$ обозначены интегральная функция распределения и плотность вероятности k-го порядка. Кроме того, поскольку на максимальное значение величины m в формуле (2) никаких ограничений априори не налагалось, то справедливость следствия 2 теоремы 1 вытекает автоматически из формул (4) и (5) с учетом $k \in [1, m]$ при $m \to \infty$.

Для дальнейшего изложения потребуется следующая вспомогательная теорема.

Лемма 1. *Для обеспечения стационарной связанности выходных откликов $y_{n_1}(\cdot)$ и $y_{n_2}\{\cdot\}$ подсистем Вольтерра любых двух различных* (т. е. при $n_1 \neq n_2$) *порядков необходимо и достаточно строгой стационарности входного сигнала $x(\cdot)$.*

Доказательство. Согласно определению [1] два случайных процесса $y_{n_1}(\cdot)$ и $y_{n_2}(\cdot)$ являются стационарно связанными, если их совместные функции распределения любого порядка не зависят от положения начала отсчета времени. С учетом отмеченной при доказательстве следствия 2 теоремы 1 принципиальную возможность прямого (и, очевидно, обратного) переноса свойства инвариантности к началу временного отсчета всех моментов на функции распределения любого порядка, поставленная выше задача сводится к доказательству утверждения вида

$$M_l\{x(t_1)\cdot\ldots\cdot x(t_l)\} = M_l\{x(t_1+\theta)\cdot\ldots\cdot x(t_l+\theta)\} \stackrel{\Delta}{=}$$
$$\stackrel{\Delta}{=} M_{l[x]}\{\xi_1, \ldots, \xi_{l-1}\}, \forall l, \tag{8}$$

где $l \stackrel{\Delta}{=} k_1 n_1 + k_2 n_2$, а $k_1 k_2 \in N$. Однако справедливость выражения (8) легко показать, проделав с сотоношением для определения момента $M_{k_1+k_2}\{y_{n_1}(t_1)\cdot\ldots\cdot y_{n_1}(t_{k_1})\, y_{n_2}(t_{k_1}+1)\cdot\ldots y_{n_2}(t_{k_1+k_2})\}$ выкладки, аналогичные проведенным при выходе формул (4) и (5). Кроме того, поскольку коэффициенты k_1, k_2, а также величины n_1, n_2 могут принимать любые значения из N, то множество возможных значений l должно включать в себя весь ряд натуральных чисел, т. е. достаточное утверждение (8) является одновременно и необходимым. Таким образом, есть все исходные данные для строгого обоснования следующего утверждения, имеющего существенное самостоятельное значение.

Теорема 2. *Для обеспечения строгой стационарности выходного сигнала $y(\cdot)$ нелинейной инерционной радиосистемы вольтерровского типа необходимо и достаточно строгой стационарности входного воздействия $x(\cdot)$.*

Доказательство. Известно, что строгая стационарность выходного отклика $y(\cdot)$ будет обеспечена в том и только в том случае, когда все это парциальные составляющие $y_n(\cdot)$, $\forall n \in [1, \infty]$ являются строго стационарными и, кроме того, стационарно связанными (попарно — для всевозможных сочетаний) [1]. Однако первое из указанных выше условий доказывается следствием 2 из теоремы 1, а второе — леммой 1. При этом из последней вытекает и необходимость указанных в теореме 2 достаточных условий строгой стационарности сигнала $y(\cdot)$ на выходе нелинейной динамической радиосистемы вольтерровского типа.

Итак, из доказанной теоремы 2 следует важный в теоретическом и практическом отношениях вывод о том, что свойство строгой стационарности случайных процессов сохраняется при их произвольных нелинейных инерционных преобразованиях вольтерровского типа, т. е. указанное свойство инвариантно к данным преобразованиям. Кроме того, факт стационарности выходного отклика нелинейной динамической радиосистемы вольтерровского типа подтверждает также и стационарность сигнала на входе этой радиосистемы (т. е. обратные описанным ранее результаты также справедливы).

Заметим, что для решения целого ряда теоретико-вероятностных и статистических задач существенна и эргодичность изучаемых строго стационарных случайных процессов. В связи с этим необходимо исследовать влияние вольтерровских нелинейных инерционных преобразований стохастических сигналов на эргодические свойства последних. Для достижения данной цели сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Достаточным условием эргодичности выходного отклика $y_n(\cdot)$ подсистемы Вольтерра n-го порядка является справедливость следующего предельного соотношения для входного воздействия $x(\cdot)$:*

$$\lim_{\{\xi_i\}_1^{2n-1}\to\infty} M_{2n[x]}(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}) = 0, \tag{9}$$

где lim—*сходимость в среднем;* $\{\cdot\}_1^{2n}$ — *переборное множество стоящей в фигурных скобках величины с переменным подстрочным индексом, варьируемым в указанных нижнем и верхнем пределах изменения его значения, т. е.* $\{\xi_i\}_1^{2n-1} \overset{\Delta}{=} \{\xi_1 \ldots, \xi_{2n-1}\}$, *причем символ* $\{\xi_i\}_1^{2n-1}\to\infty$ *означает:* $\xi_i\to\infty$; $\forall i\in[1, (2n-1)]$; $(\dot{\cdot})$ — *надстрочный символ, означающий центрирование случайного процесса,* т. е.

$$\dot{x}(t) \overset{\Delta}{=} x(t) - M_1\{x(t)\} \overset{\Delta}{=} x(t) - M_{1[x]}(t) \equiv x(t) - M_{1[x]}. \tag{10}$$

Доказательство. В соответствии с известной эргодической теоремой [4], достаточным условием эргодичности строго стационарного стохастического процесса $y_n(\cdot)$ является выполнение предельного равенства

$$\lim_{\xi_1\to\infty} M_2[\dot{y}_n](\xi_1) = 0. \tag{11}$$

Повторяя затем выполнение при выходе формулы (5) рассуждения и учитывая при этом соотношение (10) и следствие 1 к теореме 1, получаем, что выражение (9) и (11) строго эквивалентны.

Используя далее теорему 3, покажем корректность следующего окончательного утверждения.

Теорема 4. *Достаточным условием эргодичности полного выходного сигнала $y(\cdot)$ нелинейной инерционной радиосистемы воль-*

терровского типа является справедливость полной совокупности предельных соотношений следующего вида:

$$\lim_{\{\xi_i\}_1^{2n-1} \to \infty} M_{2n]x]}(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1}) = 0; \ \forall n \in [1, \infty]. \tag{12}$$

Доказательство. Из ранее доказанной теоремы 3 следует, что выполнение условия (2) означает эргодичность всех парциальных составляющих $y_n(\cdot)$ полного выходного отклика $y(\cdot)$ нелинейной динамической радиосистемы вольтерровского типа. Кроме того, в соответствии с известной теоремой о среднем суммы [1] совокупность произвольного (но не более, чем счетного) количества эргодических случайных процессов также является эргодическим случайным процессом.

Необходимо отметить справедливость утверждений, обратных теоремам 3, 4. Таким образом, эргодичность сигнала на выходе произвольной нелинейной инерционной радиосистемы вольтерровского типа (или выходного отклика любой подсистемы Вольтерра общей функциональной модели данной радиосистемы) дает основание утверждать и об эргодичности входного воздействия. Вместе с тем, из теорем 3, 4 следует также, что обеспечение эргодичности выходного сигнала нелинейной динамической радиосистемы вольтерровского типа предъявляет более жесткие требования к статистическим характеристикам сигнала на ее входе, чем для эргодичности собственно этого входного сигнала. Итак, теорема 4 — это обобщение известной эргодичной теоремы 4 для достаточно широкого класса нелинейных инерционных систем вольтерровского типа.

Аналогично можно оценить и другие вероятностные характеристики выходного отклика указанных радиосистем. Анализ результатов работы позволяет достаточно обоснованно утверждать, что предложенное направление открывает вполне реальную возможность строгого построения общей статистической теории нелинейных инерционных радиосистем вольтерровского типа.

Список литературы: 1. *Левин Б. Р.*//Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1-я. М., 1974. 552 с. 2. *Макаренко Б. И., Иванов М. А.* Функциональный метод исследования нелинейных радиотехнических систем//Радиотехника.1980. Т. 30, № 4. С. 13—24. 3. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 4. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1957. 660 с

Поступила в редколлегию 06.07.88