ДОСЛІДЖЕННЯ НОВОГО МЕТОДУ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ВІДОМИМИ ПРОЕКЦІЙНИМ ДАНИМИ

Пантєлєєва К.О., Пучкін М.О.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.Г.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: pmkaf@kture.kharkov.ua

The task of restoring a function basing on the projections given is considered. For the solution of the problem the sum Fourier is used. The functioning of the method has been verified using test problem. Satisfactory results have been received.

Задача реконструкції зображень полягає у відновленні функції $f(x,y)$ за відомими проекційними даними - значеннями інтегралів γ_k вздовж прямих L_k, які перетинають об'єкт дослідження :

$$\int\limits_{L_k} f(x,y)dl = \gamma_k,\ k = \overline{1,M}\,. \tag{1}$$

Надалі будемо вважати, що об'єкт дослідження належить квадрату $D = [0,1]^2$. Цю задачу можна інтерпретувати як задачу дослідження щільності $f(x,y)$ всередині деякого тіла на площині Oxy методами рентгенівської комп'ютерної томографії [2].

Для розв'язання задачі використано новий метод , запропонований проф. О. М. Литвином у роботі [1]. Згідно з цим методом розв'язок задачі відшукувався у вигляді скінченної суми Фур'є.

$$f(x,y) \approx S_{N,N}(x,y) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} F_{k,l}e^{i2\pi(kx+ly)}\,, \tag{2}$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$F_{k,l} = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy\,.$$

У вказаному методі знайдено явні формули для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних через значення проекцій, що дозволило звести задачу до обчислення інтегралів спеціального вигляду. Вибір системи прямих, вздовж яких задаються проекційні дані, обумовлений значеннями індексів k та l у сумі Фур'є.

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k,l}$ за допомогою проекційних даних розглядалися окремо випадки щодо знаків k та l і їх взаємного розташування. Метод вигідно відрізняється від відомих, зокрема від алгебраїчного методу, який зводиться до розв'язання систем рівнянь великих розмірів і вимагає додаткового вибору параметрів регуляризації або релаксації.

Розглянутий метод застосовано до тестових задач. Розглядались тестові задачі для функцій з носіями у однозв'язних та багатозв'язних областях, для функцій диференційовних та неперервних. Набір функцій для відновлення формувався авторами. Розглядались випадки розташування в заданій області одного, двох та більшої кількості об'єктів. Досліджувалась збіжність методу при різних значеннях N у сумі Фур'є та кількості M проекційних даних. Підраховувались похибки.

Приклади функцій для відновлення:

1. Функція с носієм у $K = K_\varphi$ кругах:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{K}\left[-\left[\dfrac{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2-r^2}{r^2}\right]\right]^p, \text{ якщо } (x-a_i)^2+(y-b_i)^2 \le r^2, \\ 0 \text{ у противному випадку.} \end{cases}$$

2. Функція с носієм у $K = K_\rho$ квадратах:

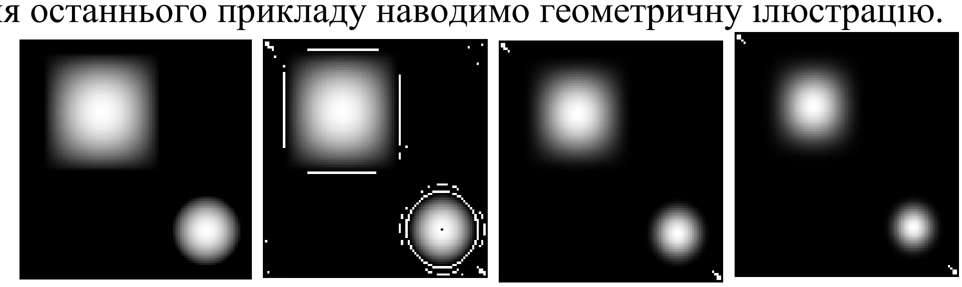
$$\rho(x,y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{K}\left[\dfrac{(a^2-(x-a_i)^2)(a^2-(y-b_i)^2)}{a^4}\right]^p, \text{ якщо } |x-a_i|<a \wedge |y-b_i|<a, \\ 0, \text{ у противному випадку.} \end{cases}$$

Присутність у наведених вище формулах параметра p дозволяє отримувати набори тестових функцій неперервних та дифернційовних. При $p = 1,2,3$ маємо відповідно неперервні, один раз та двічі диференційовні функції. На основі цих функцій будуємо інші.

3. Функція з носієм у двох областях - крузі та квадраті:

$$f_2(x,y) = \varphi(x,y) + \rho(x,y),\ K_\varphi = 1, K_\rho = 1.$$

Для останнього прикладу наводимо геометричну ілюстрацію.



а) б) в) г)

Рисунок 1 – Напівтонові зображення: а) заданої неперервної функції; б) відновленої неперервної функції при $N = 32$; в) заданої диференційовної функції; г) відновленої диференційовної функції при $N = 32$.

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. Випуск 125. – Харків: ХДПУ, 2000. – С. 27– 35.

2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. – М.: Мир, 1990. – 288 с.