АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ СИСТЕМ С ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТОЙ ОТ ВРЕДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Прусаков Н.А.
Научные руководители: Наумейко И.В. доц. кафедры ПМ, Сова А.В., проф. кафедры ВМ
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина,14, каф. ВМ, тел. (057) 70-21-335)
E-mail: igor.naumejko@mail.ru, факс (057) 702-11-13

A model of the dynamic system describing the situation when the main subsystem "produces" a detrimental factor, and the second subsystem - defense - tries to reduce it completely, or at a reasonable price.

Рассматривается модель динамической системы, описывающей ситуацию, когда основная подсистема «производит» вредный фактор, а вторая подсистема – защита – пытается его уменьшить абсолютно, или за приемлемую цену. Как эмпирическая базовая модель – основа для модификации – взята система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая основные законы конкуренции. Для них выполняются следующие Аксиомы (естественные положения):

1. Автокуммулятивность: вредное воздействие растет тем быстрее, чем его величина больше.

2. Взаимная куммулятивность: вредное воздействие растет тем быстрее, чем больше вредность других факторов.

Защита z(t) может управляться программно или адаптивно – в зависимости от величины u(t). Стоимость защиты $C=C(z)$ естественно считать монотонно растущей функцией.

Модель 1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u(t)' = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t) \\ z(t)' = \gamma u(t) \end{cases} \qquad (1)$$

где u(t) – приведенная интенсивность вредного фактора, $z(t)$ – интенсивность динамической защитной системы. Параметры положительны и постоянны.

Выполним подстановку $u = \frac{z'}{\gamma}$ и $u' = \frac{z''}{\gamma}$ в первое уравнение системы (1), и, проинтегрировав один раз, получим уравнение, которое, в свою очередь, легко интегрируется:

$$z' = \alpha z - \frac{\beta}{2}z^2 + c_1,\ \ z(0) = z_0, \qquad (2)$$

где c_1 – константа, очевидно условие: $u(0)=0 \Rightarrow c_1=\frac{\beta}{2}z_0^2 - \alpha z_0$

Начальное условие z_0 определяется стационарной защитой (экран).

Для определения стоимости защиты воспользуемся функцией

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T c(\max\{0, z - z_0\})dt + C_0 ,$$

где: c_0 – стоимость стационарной защиты; $c(z)$ – функция стоимости, которая часто принимает вид:

а) $c(z) = z$; б) $c(z) = z^2$; в) $c(z) = zLn(z)$,

взяв время, за которое интенсивность защиты превысит z_0.

Модель 2.

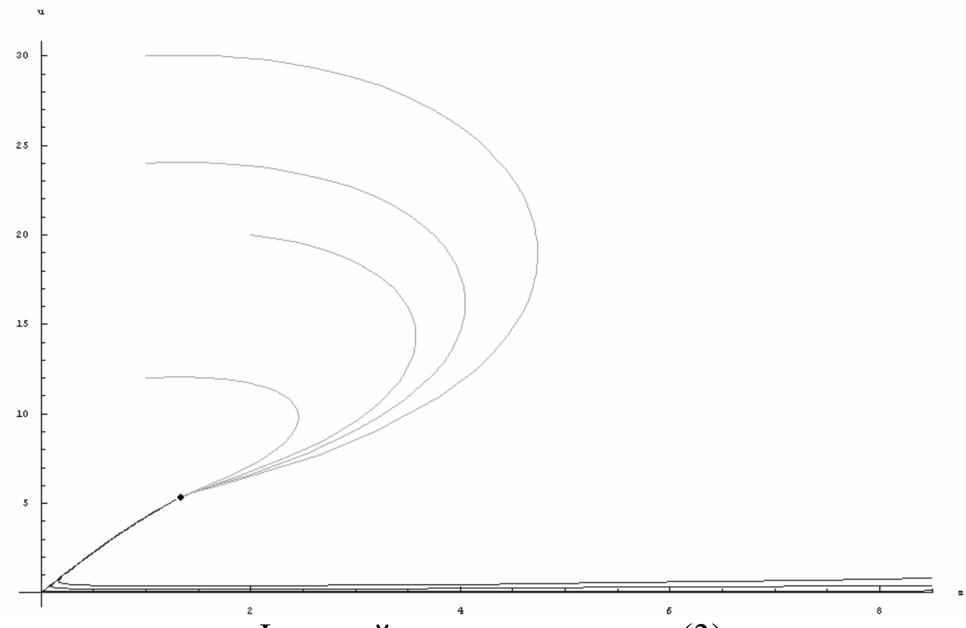
Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t) \\ z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t) \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) не имеет аналитического решения в общем виде.

Функции *z(t)* и *u(t)* пакетом Mathematica представлены в виде интерполяций, т.е. получено численное решение системы (3). Найдем её стационарные точки, $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma})$, $(0,0)$ приравняв левые части к 0 при любых значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Легко видеть, что вторая из них – «седло». Это соответствует физике ситуации, поскольку выделение вредных факторов не исчезает само. Первая – всегда устойчива. При $\alpha<\delta/4$ это "узел» – процесс апериодический, в противном случае – «фокус».

Модель (3) является имитационной и позволяет интерактивно подбирать нужные параметры защиты. Её портрет представлен на рисунке в фазовых координатах (*z*, *u*), при значениях параметров: $\alpha = 0.4, \beta = 0.3, \gamma = 0.5, \delta = 2$, $z_0 = 11$, $C_0 = 1100$.



Фазовый портрет системы (3).

Фазовый портрет модели совпадает с характерным поведением защитной системы в критической ситуации, а значит, она адекватна.