

Метод Двобічних Наближень та Метод Прямих Розв'язання Першої Початково-Крайової Задачі для Багатовимірного Квазілінійного Рівняння Теплопровідності на Основі Використання Функції Гріна

Максим Сидоров
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
maxim.sidorov@nure.ua

Two-sided Approximations Method and the Lines Method for Solving First Initial-Boundary Value Problem for a Multidimensional Quasi-linear Heat Equation Based on the Use of the Green's Function

Maxim Sidorov
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
maxim.sidorov@nure.ua

Анотація—Розглянуто першу початково-крайову задачу для багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності. На основі модифікованого методу Роте на кожному часовому шарі вихідна задача замінена нелінійною крайовою задачею для еліптичного рівняння. Методом функцій Гріна від цієї задачі виконано перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке далі розглянуто як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Для знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (а отже, і узагальненого розв'язку відповідної крайової задачі) на кожному часовому шарі побудовано метод послідовних наближень з двобічним характером збіжності. Наведено результати обчислювального експерименту для тестової задачі.

Abstract—The first initial-boundary problem for the multi-dimensional quasi-linear heat equation is considered. Based on the modified Rothe method at each time layer the original non-stationary problem is replaced by a nonlinear boundary-value problem for an elliptic equation. Using the Green's functions

method of nonlinear boundary value problems a transition to an equivalent Hammerstein integral equation is considered, which is investigated as a nonlinear operator equation with a heterotone operator in the space of continuous functions that is semioordered by a cone of non-negative functions. To find a positive solution of the integral equation (and hence a generalized solution of the corresponding boundary value problem), a method of successive approximations with a two-sided character of convergence is constructed on each time layer. A computational experiment was carried for test problem.

Ключові слова—квазілінійне рівняння теплопровідності; додатний розв'язок; метод Роте; двобічні наближення

Keywords—quasi-linear heat equation; positive solution; Rothe method; two-sided approximations

I. ВСТУП

Актуальність дослідження. Проблема математичного моделювання різноманітних процесів у фізиці, хімії, біології призводить до необхідності розв'язання початково-крайових задач для квазілінійного



параболічного рівняння теплопровідності [3, 6, 7]. Методи чисельного аналізу таких задач зазвичай засновані на використанні методів скінченних різниць, скінченних елементів або методу прямих [1, 4, 8]. На цей час актуальною є розробка таких наближених методів розв'язання початково-крайових задач для квазілінійного рівняння теплопровідності, які б були ітераційними та дозволяли будувати послідовності функцій з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку.

Цілі та задачі дослідження. Метою роботи є розробка нового методу розв'язання першої початково-крайової задачі для багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності на основі сумісного використання модифікованого методу прямих (методу Роте) і метода двобічних наближень. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті автором в [5], і розповсюджує їх на нестационарні рівняння.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо початково-крайову задачу вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p(\mathbf{x}, t)\nabla u) + q(\mathbf{x}, t)u = f(\mathbf{x}, t, u), \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0],$$

$$u(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0], \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T_0], \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

де Ω – вимірна за Жорданом область з -2 чи -3 з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$); $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Позначимо $\bar{Q}_{T_0} = \{(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, t \in [0, T_0]\}$.

Вважатимемо, що

$$p(\mathbf{x}, t) > 0, \quad q(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \text{якщо } (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0},$$

$p(\mathbf{x}, t)$ неперервно диференційована за змінними \mathbf{x} ,
якщо $(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}$,

$$q(\mathbf{x}, t) \text{ неперервна, якщо } (\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0},$$

$f(\mathbf{x}, t, u)$ неперервна і додатна, якщо $(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}_{T_0}$, $u > 0$,

$\varphi(\mathbf{x})$ неперервна і додатна, якщо $\mathbf{x} \in \Omega$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$.

Задача (1) – (4) часто зустрічається у математичному моделюванні нелінійних нестационарних процесів, розглядуваних у біології, теорії горіння, хімічній кінетиці тощо [6, 7]. Умова додатності (2) при цьому є наслідком прикладного сенсу функції u у тій чи іншій галузі.

III. МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ

На відрізьку $[0, T_0]$ введемо сітку з кроком τ , яка складається з точок $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $m\tau = T_0$, і

позначимо $U_j = U_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

В рівнянні (6.37) відповідно до методу прямих Роте диференціальний оператор $\frac{\partial u}{\partial t}$ апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі (1) – (4) шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$. Тоді з похибкою $O(\tau)$ рівняння (6.37) на прямій $t = t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, замінюється нелінійним еліптичним рівнянням

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} - \operatorname{div}(p(\mathbf{x}, t_j)\nabla U_j) + q(\mathbf{x}, t_j)U_j = f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (5)$$

Рівняння (5) є модифікацію класичного методу Роте [8], бо на j -му часовому шарі використовує поточне значення U_j при апроксимації нелінійності $f(\mathbf{x}, t, u)$, а не попереднє значення U_{j-1} .

Відповідно до початкової умови (4) на нульовому часовому шарі $t_0 = 0$ матимемо $U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$.

Використовуючи крайову умову (3) отримаємо крайову умову на функцію $U_j(\mathbf{x})$: $U_j|_{\partial\Omega} = 0$.

Отже, розв'язання початково-крайової задачі (1) – (4) зводиться до розв'язання послідовності нелінійних еліптичних крайових задач

$$-\operatorname{div}(P_j(\mathbf{x})\nabla U_j) + Q_j(\mathbf{x})U_j = \frac{1}{\tau}U_{j-1} + f(\mathbf{x}, t_j, U_j), \quad (6)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega,$$

$$U_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

$$U_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

$$j = 1, \dots, m;$$

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}),$$

де позначено $P_j(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_j)$, $Q_j(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}, t_j) + \frac{1}{\tau}$.

Як бачимо, $Q_j(\mathbf{x}) > 0$ у Ω при будь-якому $\tau > 0$.

Збіжність методу Роте при $\tau \rightarrow 0$ доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (1) [1, 8].

Крайові задачі (6) – (8) розв'язуються послідовно, а отже, при розв'язанні задачі для $U_j(\mathbf{x})$ функція $U_{j-1}(\mathbf{x})$ буде вже відомою. Тому праву частину рівняння (6) позначимо через $F(\mathbf{x}, U_j)$:

$$F_j(\mathbf{x}, U_j) = \frac{1}{\tau}U_{j-1}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, t_j, U_j). \quad (9)$$

Застосуємо для розв'язання кожної з задач (6) – (8) метод двобічних наближень на основі використання



функції Гріна, розроблений у [5].

Розглянемо задачу (6) – (8) для деякого фіксованого j . Якщо $G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – відповідна функція Гріна, то ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (10)$$

Розглядатимемо рівняння (10) у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$, напівупорядкованому конусом \mathbb{K}_+ невід’ємних у $\bar{\Omega}$ неперервних функцій, і шукатимемо узагальнений розв’язок $U_j(\mathbf{x})$ крайової задачі (6) – (8), тобто неперервний розв’язок інтегрального рівняння (10).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T_j , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T_j(U)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) F_j(\mathbf{s}, U_j(\mathbf{s})) ds. \quad (11)$$

Нехай функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$, де невід’ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ є неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x}, t, v, w , монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]$. Тоді функція $F_j(\mathbf{x}, U_j)$ вигляду (9) теж дозволить діагональне подання у вигляді $F_j(\mathbf{x}, U_j) = \hat{F}_j(\mathbf{x}, U_j, U_j)$, де функція $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$ задаватиметься рівністю

$$\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w) = \frac{1}{\tau} U_{j-1}(\mathbf{x}) + \hat{f}(\mathbf{x}, t_j, v, w). \quad (12)$$

Через неперервність і невід’ємність на Ω функції $U_{j-1}(\mathbf{x})$ функція $\hat{F}_j(\mathbf{x}, v, w)$ буде неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x}, v, w невід’ємною функцією, що монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$.

Отже, оператор T_j вигляду (11) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds. \quad (13)$$

Оператори T_j і \hat{T}_j є цілком неперервними [2].

Лема 1. Оператор T_j вигляду (11) буде:

а) додатним оператором;

б) u_0 -додатним оператором з функцією $u_0^j(\mathbf{x})$, яка задається формулою

$$u_0^j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds; \quad (14)$$

в) гетеротонним оператором з супровідним оператором вигляду (13), якщо функція $f(\mathbf{x}, t, u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, t, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, t, u, u)$, де невід’ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$ є неперервною за сукупністю змінних \mathbf{x}, t, v, w , монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]$;

г) псевдоувігнутим і навіть u_0 -псевдоувігнутим оператором функцією $u_0^j(\mathbf{x})$, яка має вигляд (14), якщо для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $v \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, vv, \frac{1}{v}w\right) > v\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T_0]. \quad (15)$$

Далі вважатимемо, що оператор T_j вигляду (11) є гетеротонним з супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (13). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв’язку інтегрального рівняння (10) (а отже, і крайової задачі (6) – (8)).

Виділимо у конусі \mathbb{K}_+ сильно інваріантний для гетеротонного оператора T_j конусний відрізок $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$. Це призводить до того, що для функцій $v_j^0(\mathbf{x})$ і $w_j^0(\mathbf{x})$ виконуватимуться нерівності

$$\int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) ds \leq w_j^0(\mathbf{x}) \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

або (з урахуванням (12)) для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v_j^0(\mathbf{s}), w_j^0(\mathbf{s})) ds \geq v_j^0(\mathbf{x}), \quad (16)$$

$$\varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w_j^0(\mathbf{s}), v_j^0(\mathbf{s})) ds \leq w_j^0(\mathbf{x}), \quad (17)$$

де позначено

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_{j-1}(\mathbf{s}) ds.$$

Очевидно, що $\varphi_j(\mathbf{x}) > 0$ для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ і $\varphi_j|_{\partial\Omega} = 0$.

Тепер сформуємо ітераційний процес:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$



$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{F}_j(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}).$$

З урахуванням (12) ітераційні формули набувають вигляду

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad (18)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) ds, \quad (19)$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_j^0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_j^0(\mathbf{x}). \quad (20)$$

Послідовність функцій $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є неспадною за конусом \mathfrak{L}_+ , а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ є незростаючою за конусом \mathfrak{L}_+ . Тоді з нормальності конуса \mathfrak{L}_+ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей.

Теорема 1. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (11) з супровідним оператором \hat{T}_j вигляду (13) і система рівнянь

$$v(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) ds, \quad (21)$$

$$w(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, t_j, w(\mathbf{s}), v(\mathbf{s})) ds, \quad (22)$$

не має на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес (18) – (20) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (6) – (8).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (18) – (20) означає виконання ланцюга нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \cdot v^{(1)} \cdot \dots \cdot v^{(k)} \cdot \dots \cdot U_j^* \cdot$$

$$\cdot \dots \cdot w^{(k)} \cdot \dots \cdot w^{(1)} \cdot w^{(0)} = w^0.$$

Теорему 1 можна уточнити за рахунок накладання додаткових умов на функцію $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w)$, за виконання яких система рівнянь (21), (22) не має на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Зокрема, використання умови (15) призводить до такого результату.

Теорема 2. Нехай $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle \subset K(u_0^j)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду (11) з супровідним оператором \hat{T}_j

вигляду (13), $j=1, \dots, m$, і для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $v \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(\mathbf{x}, t, vv, \frac{1}{v}w\right) > v\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T_0].$$

Тоді при кожному j , $j=1, \dots, m$, ітераційний процес (18) – (20) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (6) – (8).

При реалізації розглянутого методу двобічних наближень за наближений розв'язок вихідної нестационарної задачі (1) – (4) на j -му часовому шарі на k -й ітерації приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}. \quad (23)$$

На кожній k -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (23):

$$\|U_j^* - U_j^{(k)}\| \leq \varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})),$$

що є перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес розв'язання j -ї задачі, $j=1, \dots, m$, слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k_j)}(\mathbf{x}) - v^{(k_j)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(\mathbf{x}, t_j) = U_j^*(\mathbf{x}) \approx U_j^{(k_j)}(\mathbf{x}).$$

Тоді, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad U_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), \quad U_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad U_m^{(k_m)}(\mathbf{x}).$$

Відповідно до загальних теорем збіжності метода Роте [1] з теорем 1, 2 випливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (1) – (4) при $\tau \rightarrow 0$.

IV. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо задачу (1) – (4) у одиничному квадраті $\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ з $p(\mathbf{x}, t) = 1$, $q(\mathbf{x}, t) = 0$,



$$f(\mathbf{x}, t, u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad (24)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2).$$

Для функції $f(\mathbf{x}, t, u)$ вигляду (24) обираємо $\hat{f}(\mathbf{x}, t, v, w) = \sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{w}}$. Виконання умови u_0 -псевдоувігнутості (15) для функції $f(\mathbf{x}, t, u)$ вигляду (24) перевіряється безпосередньо.

Функція Гріна крайової задачі (6) – (8) у цьому випадку має вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x_1 \sin \pi m x_2 \sin \pi n s_1 \sin \pi m s_2}{\pi^2 (n^2 + m^2) + \kappa^2},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $\kappa^2 = \frac{1}{\tau}$.

Знайдемо наближений розв'язок задачі (1) – (4) на першому часовому шарі для $\tau = 0,1$. Шукаючи кінці сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_1^0, w_1^0 \rangle$ у вигляді $v_1^0(\mathbf{x}) = \alpha_1 u_0(\mathbf{x})$, $w_1^0(\mathbf{x}) = \beta_1 u_0(\mathbf{x})$, де $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$, отримано, що нерівності (16) – (17) на першому часовому шарі ($j=1$) задовольняються при $\alpha_1 = 1,6693$, $\beta_1 = 14,4990$.

Отже, згідно з теоремою 2 ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\sqrt{v^{(k)}(\mathbf{s})} + \frac{1}{\sqrt{w^{(k)}(\mathbf{s})}} \right] ds,$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\sqrt{w^{(k)}(\mathbf{s})} + \frac{1}{\sqrt{v^{(k)}(\mathbf{s})}} \right] ds,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha_1 u_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_1 u_0(\mathbf{x}),$$

де $\varphi_1(\mathbf{x}) = 10 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) s_1 s_2 (1 - s_1)(1 - s_2)$, двобічно збігається до функції $U_1^*(\mathbf{x})$, яка є наближенням за модифікованим методом Роте для $u(\mathbf{x}, t_1)$.

Для $\varepsilon = 10^{-4}$ було зроблено десять ітерацій. На рис. 1 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$. Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0, 1, \dots, 9$, похибок ε_k , отримали

$\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0,452$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з таким показником.

$$w^{(k)}(x_1, 0,5), \quad v^{(k)}(x_1, 0,5)$$

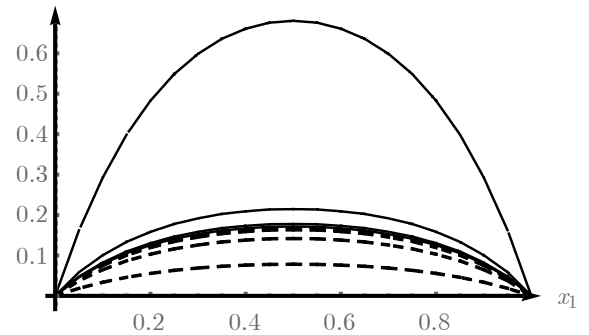


Рис. 6. Графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(\mathbf{x})$ для $k = 0, 2, 4, 6$ у перерізі $x_2 = 0,5$ для першого часового шару ($\tau = 0,1$)

V. ВИСНОВКИ

У роботі для розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного багатовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності вперше запропоновано комбінація модифікованого метода Роте і метода двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Обчислювальний експеримент, проведений для тестової задачі зі степеневу нелінійністю, продемонстрував можливість та ефективність метода. Запропонований метод може бути використаний при розв'язанні прикладних задач математичними моделями яких є початково-крайові задачі вигляду (1) – (4). Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Ладьженская О.А. “Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений”, *Тр. ММО*, т. 7, с. 149-177, 1958.
- [2] Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
- [3] Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. М.: Наука, 1987. 478 с.
- [4] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы математической физики*. 2-е изд. М.: Научный мир, 2003. 316 с.
- [5] Сидоров М.В. “Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач”, *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*, № 2, с. 250-259, 2017.
- [6] Франк-Каменецкий Д.А. *Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике*. М.: Интеллект, 2008. 408 с.
- [7] Pao C. V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. New York: Plenum Press, 1992. 794 p.
- [8] Rothe E. “Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben”, *Mathematische Annalen*, v. 102, № 1, p. 650-670, 1930.

