Проблемы бионики
1998. Вып. 49. С. 113—117

ХТУРЭ

УДК 519.23/25

С.Н. ГЕРАСИН

# ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ КВАЗИСТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

При изучении различных биологических, экологических и экономических процессов, обусловленных быстроизменяющимися факторами, часто используются процессы Маркова. В этом случае процесс удобно задавать либо матрицей переходных вероятностей (т.е. стохастической), либо системой уравнений Колмогорова, причем главная матрица системы является квазистохастической [1]. Для таких процессов очень важно определять существование стационарного режима и время перехода к нему. Для этого необходимо устанавливать расположение собственных чисел указанных матриц на комплексной плоскости.

Рассмотрим множество всех стохастических матриц $n$-го порядка и обозначим через $M_n$ множество характеристических корней всех таких матриц. В работах [2; 3] множество $M_n$ определено полностью. В работе [2] показано, что для $n = 2$ $M_n$ представляет собой отрезок действительной оси $[-1,1]$, а для $n = 3$ $M_n$ представляет собой объединение треугольника с вершинами в точках $(1,0)$, $\exp(2\pi i / 3)$, $\exp(4\pi i / 3)$ и отрезка действительной оси $[-1,1]$. В работе [3] показано, что для $n > 3$ фигура $M_n$ симметрична относительно действительной оси, заключена в круге $|z| \leq 1$ и имеет с окружностью $|z| = 1$ общие точки $\exp(2\pi i a / b)$, где $0 \leq a < b \leq n$. Граница $M_n$ состоит из этих точек и соединяющих их в круговом порядке криволинейных дуг. Каждая из этих дуг задается одним из следующих параметрических уравнений:

$$\lambda^q (\lambda^p - t)^r = (1 - t)^r; \qquad (1)$$

$$(\lambda^b - t)^d = (1 - t)^d \lambda^q, \qquad (2)$$

где параметр $t$ изменяется в пределах $0 \leq t \leq 1$, а $b, d, p, q, r$ – натуральные числа, которые определяются следующим образом: пусть концы некоторой дуги, взятые по направлению против часовой стрелки, есть $\exp(2\pi i a' / b')$ и $\exp(2\pi i a'' / b'')$. Возможны два случая:

$$b''[n / b''] \geq b'[n / b']; \qquad (3)$$

$$b''[n / b''] \leq b'[n / b']. \qquad (4)$$

Если для некоторой дуги имеет место случай (3), то для комплексно-сопряженной дуги имеет место случай (4), и наоборот. Поэтому в силу симметрии $M_n$ достаточно определить дуги, удовлетворяющие условию (3). Пусть $r_1 = b''$, $r_2 = a''$, $r_3, \ldots, r_m$ – последовательность остатков, получающихся при нахождении наибольшего общего делителя чисел $b''$ и $a''$ посредством алгоритма Евклида. Если $[n/b''] = 1$ и для некоторого целого $S$: $r_{2s} = 1$, то дуга, соединяющая точки $\exp(2\pi i a'/b')$ и $\exp(2\pi i a''/b'')$, задается уравнением (1), где $r = r_{2s-1}$, а числа $p$, $q$ определяются из соотношений

$$a''p \equiv 1 \bmod b''(0 < p < b'');$$
$$a''q \equiv -r \bmod b''(0 \le q < b'').$$

В противном случае дуга, соединяющая точки $\exp(2\pi i a'/b')$ и $\exp(2\pi i a''/b'')$, задается уравнением (2), причем $d = [n/b''], b = b''$, а $q$ определяется из соотношения

$$a''q \equiv -1 \bmod b''(0 < q < b'').$$

Исследуем самый первый участок границы $M_n$. Это криволинейная дуга, соединяющая точки (1,0) и $\exp(2\pi/n)$, т.е. в данном случае

$$a' = 0, b' = n, a'' = 1, b'' = n.$$

Тогда $b''[n/b''] = n[n/n] = n$, а $b'[n/b'] = n[n/n] = n$, а значит, данный случай относится к (3). Далее, $[n/b''] = [n/n] = 1$ и для целого $s = 1$ $r_2 = 1$ в последовательности остатков алгоритма Евклида $r_1 = n$, $r_2 = n, \ldots$ .Тогда эта дуга задается уравнением (1), причем $p = n$, а $q = 0$.

Таким образом, для всех $n > 3$ участок границы фигуры $M_n$, соединяющий точки (1,0) и $\exp(2\pi/\mathrm{n})$, удовлетворяет параметрическому уравнению

$$(\lambda - t)^n = (1 - t)^n, \quad 0 \le t \le 1.$$

В этом уравнении точке (0,1) соответствует значение параметра $t = 1$, а точке $\exp(2\pi/\mathrm{n})$ -- значение параметра $t = 0$:

$$\lambda(0) = \exp(2\pi/n); \lambda(1) = 1.$$

Для удобства преобразуем параметрическое уравнение для $\lambda(t)$ в параметрическое уравнение для $\lambda(u)$, где $u = 1 - t$:

$$(\lambda(u) - 1 + u)^n = u^n.$$

Здесь $0 \le u \le 1$; $\lambda(0) = 1$; $\lambda(1) = \exp(2\pi / n)$.

Рассмотрим параметрическое уравнение для вспомогательной дуги $z(u) = \lambda(u) - 1 + u$:

$$z(u)^n = u^n, \text{ где } 0 \le u \le 1 \quad (z(0) = 0, z(1) = \exp(2\pi / n)).$$

Тогда $\arg z(u) = 2\pi / n, | z(u) |=| u |$ для $0 \le u \le 1$. Итак, дуга $z(u)$ представляет собой прямолинейный отрезок, соединяющий точки комплексной плоскости 0 и $\exp(2\pi i / n)$. Координаты точек данного отрезка удовлетворяют параметрическим уравнениям

$$x(u) = \cos(2\pi / n)u; \quad y(u) = \sin(2\pi / n)u, \text{ где } 0 \le u \le 1.$$

Тогда координаты точек отрезка дуги $\lambda(u)$ удовлетворяют параметрическим уравнениям

$$x(u) = (\cos(2\pi / n) - 1)u + 1; \quad y(u) = (\sin(2\pi / n))u, \text{ где } 0 \le u \le 1.$$

Таким образом, отрезок дуги $\lambda(u)$ представляет собой отрезок прямой, соединяющий точки комплексной плоскости 1 и $\exp(2\pi i / n)$.

Рассмотрим произвольную ненулевую квазистохастическую матрицу $A \in R^{n \times n}$, т.е. матрицу, элементы которой $a_{ij} (1 \le i, j \le n)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ii} \le 0, \quad 1 \le i \le n; \tag{5}$$

$$a_{ij} \ge 0, \quad 1 \le i, \quad j \le n, \quad i \ne j; \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, \quad 1 \le i \le n. \tag{7}$$

Пусть ρ – максимальный по модулю диагональный элемент матрицы $A$. Из условия (5) следует, что ρ – максимальный по модулю отрицательный элемент матрицы $A$, а из условий (6) и (7) вытекает, что ρ – максимальный по модулю элемент матрицы $A$.

Построим матрицу следующим образом:

$$B = (A+|\rho|E)/|\rho|,$$

где $E$ – единичная матрица.

Элементы матрицы $b_{ij}(1 \le i, j \le n)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \le b_{ij} \le 1, \ 1 \le i, j \le n; \qquad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1, \ 1 \le i \le n. \qquad (9)$$

Значит, матрица $B$ является стохастической. Найдем границы множества собственных значений квазистохастической матрицы $A$. Пусть некоторое число $\lambda_0$ является характеристическим корнем матрицы $A$. Тогда оно удовлетворяет характеристическому уравнению матрицы $A$:

$$|A - \lambda_0 E| = 0;$$

$$||\rho|(B - E) - \lambda_0 E| = 0;$$

$$||\rho|B - (\lambda_0 + |\rho)E/|\rho|| = 0.$$

Итак, число $(\lambda_0 + |\rho|)/|\rho|$ удовлетворяет характеристическому уравнению матрицы $B$ и, следовательно, является характеристическим корнем стохастической матрицы $B$.

Обозначим множество характеристических корней всех квазистохастических матриц $n$-го порядка с максимальным по модулю элементом $\rho$ через $K_n^\rho$. Из сказанного выше следует, что все элементы множества $K_n$ получаются из элементов множества $M_n$ умножением на число $|\rho|$ и вычитанием числа $|\rho|$. Таким образом, для квазистохастических матриц $n$-го порядка с максимальным по модулю элементом $\rho$ справедливы следующие утверждения.

Элемент $K_2^\rho$ представляет собой отрезок действительной оси $[-2|\rho|, 0]$, а $K_3^\rho$ – объединение треугольника с вершинами в точках (0, 0), $|\rho|\exp(2\pi i/3) - |\rho|$, $|\rho|\exp(4\pi i/3) - |\rho|$ с отрезком действительной оси $[-2|\rho|, 0]$.

Для $n > 3$ фигура $K_n^\rho$ заключена в круге $|z+|\rho|| \le |\rho|$ и имеет с окружностью $|z+|\rho|| = |\rho|$ общие точки $|\rho|\exp(2\pi ia/b) - |\rho|$, где $0 \le a < b \le n$. Граница $K_n^\rho$ состоит из этих точек и соединяющих их в круговом порядке криволинейных дуг. Отрезки границы множества $K_n^{\rho}$, проходящие через точку комплексной плоскости (0, 0), представляют собой отрезки прямых, соединяющих точки $|\rho|\exp(2\pi i(n-1)/n)-|\rho|$ и (0, 0), (0, 0) и $|\rho|\exp(2\pi i/n)-|\rho|$ соответственно.

Таким образом, найдены области локализации характеристических корней квазистохастических матриц. Это позволяет исследовать вопрос о стационарном режиме различных биологических, экологических и экономических процессов, обладающих свойством отсутствия последействия.

**Список литературы:** 1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с. 2. *Карпелевич Ф.Р.* О корнях матриц с неотрицательными элементами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 361–383. 3. *Seneta E., Vere-Jones D.* On quasi-stationary distributions in discrete-time Markov chains with a denumerable infinity of states // J. Appl. Probability. 1966. N 3. P. 403–434.

*Поступила в редколлегию 13.02.98*