

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ISSN 1563-0064

# РАДИОЭЛЕКТРОНИКА И ИНФОРМАТИКА

**Научно-технический журнал**

**№ 1(64), январь – март 2014**

**Основан в 1997 г.**

**Выходит 4 раза в год**

© Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники, 2014

Свидетельство о государственной регистрации КВ № 12097-968 ПР 14.12.2006

## СОДЕРЖАНИЕ

### ***РАДИОТЕХНИКА***

- СЛИПЧЕНКО Н.И., ГОРДИЕНКО Ю.Е., БОРОДКИНА А.Н.** ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ АПЕРТУР РЕЗОНАТОРНЫХ ДАТЧИКОВ ДЛЯ БЛИЖНЕПОЛЕВОЙ СВЧ ДИАГНОСТИКИ БИООБЪЕКТОВ 3
- ФИЛИПКОВСКАЯ М. С.** ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ В РАДИОТЕХНИКЕ 7

### ***ДИСКУССИЯ***

- РЫБИН В.В.** ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ПРИРОДЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ 17

### ***ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ***

- ЧЕБОТАРЕВА Д.В., БЕЗРУК В.М.** АВТОМАТИЗАЦИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ СЕТЕЙ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ 20

### ***СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ***

- КОЛОСОВА С.В., ЛАМТЮГОВА С.Н., СИДОРОВ М.В.** ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ, УСЛОЖНЕННЫХ МАССО-ОБМЕНОМ (ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ) 25
- СТАДНИКОВА А.В.** МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ 31
- СЁМКИН В.В., ЧУГАЙ А.М., ПАНКРАТОВ А.В.** КВАЗИ Ф-ФУНКЦИЯ ДЛЯ СФЕРОКОНУСОВ С ПОВОРОТАМИ 35

### ***КОМПЬЮТЕРНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И ТЕХНИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА***

- ХАХАНОВ В.И., ОБРИЗАН В.И., МИЩЕНКО А.С., ФИЛИППЕНКО И.В.** КИБЕРФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КАК ТЕХНОЛОГИИ КИБЕРУПРАВЛЕНИЯ (аналитический обзор) 39

### ***КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ***

- ДУБРОВИН В.И., ТВЕРДОХЛЕБ Ю.В., ПАНЧЕНКО Д.В.** ОБРАБОТКА ВИДЕОРЕДА СПОРТИВНЫХ ИГР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРА ГАБОРА 46

### ***ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ***

- НЕЧИПОРЕНКО Ю.Л.** СПЕЦИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ МЕДИЦИНСКИХ КАРТОК 50
- РИШКОВЕЦЬ Ю.В.** МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ МУЛЬТИМЕДІЙНИХ ВЕБ-СИСТЕМ 53
- АБДУЛЛАЕВ В. Г., ЧУБА И. В., АСКЕРОВ Т.К.** МОБИЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЗДОРОВЬЯ 58

- РЕФЕРАТИ** 60

- ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ ДЛЯ АВТОРОВ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ЖУРНАЛА** 63

## ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ АПЕРТУР РЕЗОНАТОРНЫХ ДАТЧИКОВ ДЛЯ БЛИЖНЕПОЛЕВОЙ СВЧ ДИАГНОСТИКИ БИООБЪЕКТОВ

СЛИПЧЕНКО Н.И., ГОРДИЕНКО Ю.Е.,  
БОРОДКИНА А.Н.

Проводится анализ выходных информационных параметров резонаторных измерительных преобразователей с коаксиальной апертурой при условиях ближнеполевой микроскопии биологических проб. В результате численного эксперимента определены параметры преобразователей, которые позволяют получить оптимальные соотношения конструктивных элементов, что существенно уменьшает погрешности измерений.

### Введение

Современные достижения в новейших областях медицинской науки отрывают возможности использования электромагнитных полей для оперативной диагностики и лечения целого ряда патологий [1]. В частности, анализ систем регуляции клеток путем оценки функциональной активности мембранно-рецепторного комплекса по соотношению связанной и свободной воды в биологических пробах пациента позволяет выявить кардиологические патологии на ранних стадиях [2].

Наиболее удобной моделью для исследования молекулярных механизмов систем регуляции клеток являются эритроциты человека. Это обусловлено наличием в их мембранах адренорецепторов, функционально и структурно похожих на адренорецепторы клеток миокарда, сосудов и других органов [3]. Наиболее информативные методы определения соотношения связанной и свободной воды предполагают проведение измерений в частотном диапазоне релаксации молекул воды, т.е. вблизи частоты 10 ГГц. Измерение диэлектрической проницаемости биологических проб в этом диапазоне позволяет не только получить оперативную информацию о состоянии молекул воды, но и при направленном действии биорегуляторов выбрать наиболее эффективные пути лечения кардиопатологий и определить оптимальные дозы препаратов с учетом индивидуальных особенностей пациента [4]. Однако для проведения СВЧ измерений необходимо строго выдерживать размеры образца, его положение в измерительном устройстве. Поэтому недостатками данной методики является весьма болезненный этап получения биологических проб пациента необходимого объема.

Волноводные методы требуют образцов, размеры которых соизмеримы с длиной волны, поэтому предпочтительно использование резонаторных методов, как наиболее чувствительных к изменениям параметров исследуемого объекта. Это позволяет уменьшить объем проб при сохранении необходимой

точности измерений. По условиям эксплуатации наиболее удобными являются четвертьволновые резонаторные измерительные преобразователи (РИП), допускающие внешнее расположение образца. Но при изменении комплексного значения диэлектрической проницаемости образца  $\epsilon_a = \epsilon_a(1 - \text{tg}\delta)$  в широком диапазоне возникают области существенного снижения информативности измерений. Это обусловлено изменением крутизны значений функций связи между параметрами образца и выходными интегральными параметрами РИП – резонансной частотой  $f$  и добротностью  $Q$ . Уменьшить негативное воздействие этих факторов можно оптимальным выбором конструктивных параметров РИП.

### 1. Описание геометрической схемы РИП

Теория коаксиальных четвертьволновых РИП основана на использовании тензорных функций Грина уравнений Максвелла для цилиндрических областей [5,6]. Несмотря на сравнительную простоту конструкции, общее число параметров такого РИП и взаимосвязей между ними весьма велико. В настоящее время построены полные теоретические модели и исследован ряд характеристик таких РИП [7]. Поэтому в данном случае необходимо ориентироваться на специфические особенности поставленной задачи.

Выбранная конструкция РИП с коаксиальной измерительной апертурой (КИА) схематически показана на рис. 1.

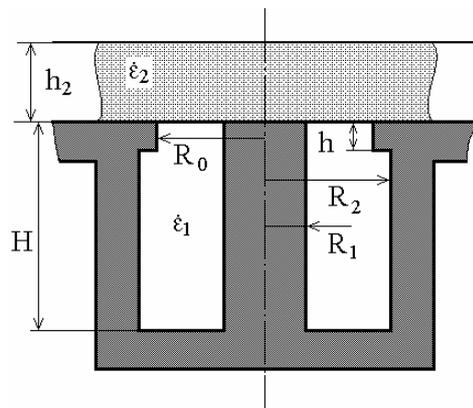


Рис. 1. Электродинамическая структура РИП

Оптимальным расположением клеточного материала пациента является размещение его в виде плоского слоя на коаксиальной измерительной апертуре РИП ( $h_2, \epsilon_2$ ).

Преимущества данной конструкции состоят в том, что при резонансном согласовании апертуры ( $R_0, h$ ) и основной камеры резонатора ( $R_1, R_2, H$ ) можно существенно увеличить чувствительность датчика. Кроме того, данная конструкция допускает теоретическую калибровку.

### 2. Условия задачи численного моделирования

Влагосодержание в биобъектах характеризуется диапазоном изменений  $\epsilon$  в пределах от 3 до 10 и  $\text{tg}\delta$  в пределах от 0,01 до 0,4. Таким образом, численное

моделирование работы РИП целесообразно проводить в данном диапазоне.

Расчетные зависимости изменений выходных параметров РИП получены путем численного решения электродинамической задачи с помощью методики, описанной в [7]. Для расчетов взята модель, у которой исходные параметры выбраны с учетом результатов предшествующих работ [8]. Исходные параметры РИП с КИА следующие:  $H/\lambda = 1,25$ ;  $R_2/\lambda = 0,17$ ;  $h_2/\lambda = 0,14$ ;  $h/H = 0,01$ ;  $\lambda = 3$  см;  $\epsilon_1 = 1$ ; проводимость стенок резонаторной камеры выбрана равной  $\sigma = 5,8 \cdot 10^6$  Сим/м. Детальные расчеты показали, что выбранные соотношения размеров обеспечивают максимальную чувствительность данной конструкции РИП с коаксиальной измерительной апертурой.

Дальнейшее уточнение размеров РИП касается определения оптимальных радиусов его частей, то же относится и к КИА.

### 3. Результаты численного моделирования

Вначале рассмотрим влияние КИА на добротность системы. Возможное изменение радиуса апертуры  $R_0/R_2$  при расчетах взято в пределах 0,29 до 1. Относительное изменение добротности рассчитывалось исходя из добротности системы, нагруженной на образец с параметрами  $\epsilon_2 = 3$ ;  $\text{tg}\delta_2 = 0,01$ . При этом исходной считалась система, нагруженная на свободное пространство. Такое представление позволяет наглядно показать весь диапазон изменения информационных параметров.

Зависимости добротности и ее относительного изменения приведены на рис. 2, а-г.

Резонансная частота  $f$  в большей степени определяется реальной частью диэлектрической проницаемости образца. Результаты расчета ее поведения и изменения  $\Delta f$  при аналогичных условиях в зависимости от отношения радиусов апертуры  $R_0/R_2$  представлены на рис. 3, а-г.

Как видно из графиков (см. рис. 2 и 3), размер апертуры существенно влияет на информационные параметры РИП с КИА. Выбор оптимального размера измерительной апертуры производился в соответствии со следующими принципами. Известно, что для проведения достоверных измерений добротность нагруженного резонатора должна быть как можно больше. Однако для уменьшения требуемых размеров исследуемого образца и, соответственно, уменьшения объема биологических проб пациента наиболее важно добиться высокого значения отношения  $\Delta Q/Q$  РИП при измерении  $\text{tg}\delta$ . При этом необходимо сохранить высокое значение отношения  $\Delta f/f$  при изменении  $\epsilon$ .

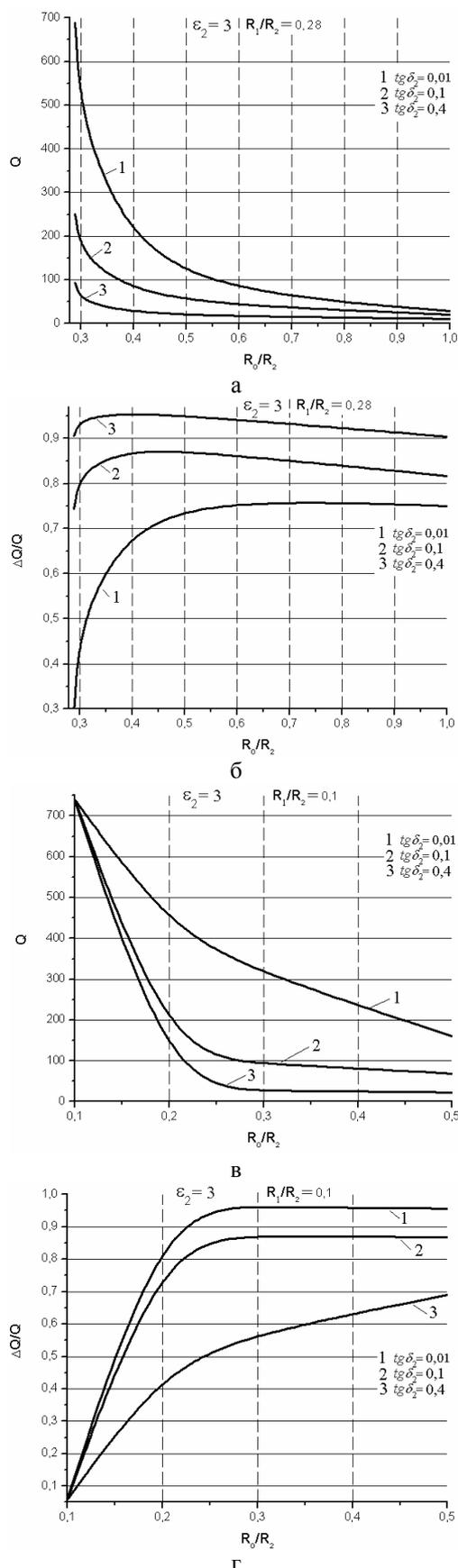


Рис. 2. Зависимость  $Q$  (а),  $\Delta Q/Q$  (б) от величины апертуры и параметров образца

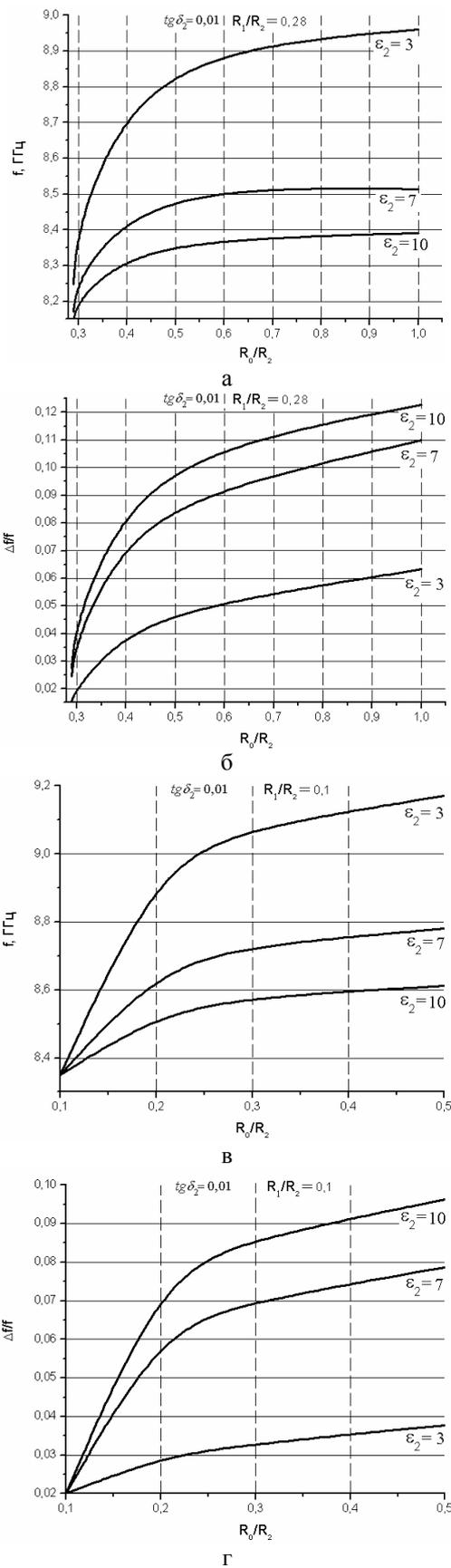


Рис. 3. Зависимость  $f$  (а) и  $\Delta f/f$  (б) от величины апертуры и параметров образца

В [7,8] показано, что эти противоречивые требования можно в наибольшей степени удовлетворить, выбирая  $R_1/R_2 = 0,28$ , а величина  $h/H$  должна быть минимальной. Поэтому дальнейшее моделирование будет проводиться для КИА с  $R_0/R_2 = 0,3$ ,  $h/H = 0.01$ .

Зависимости добротности и ее изменения от электрофизических параметров образца приведены на рис. 4, а, б.

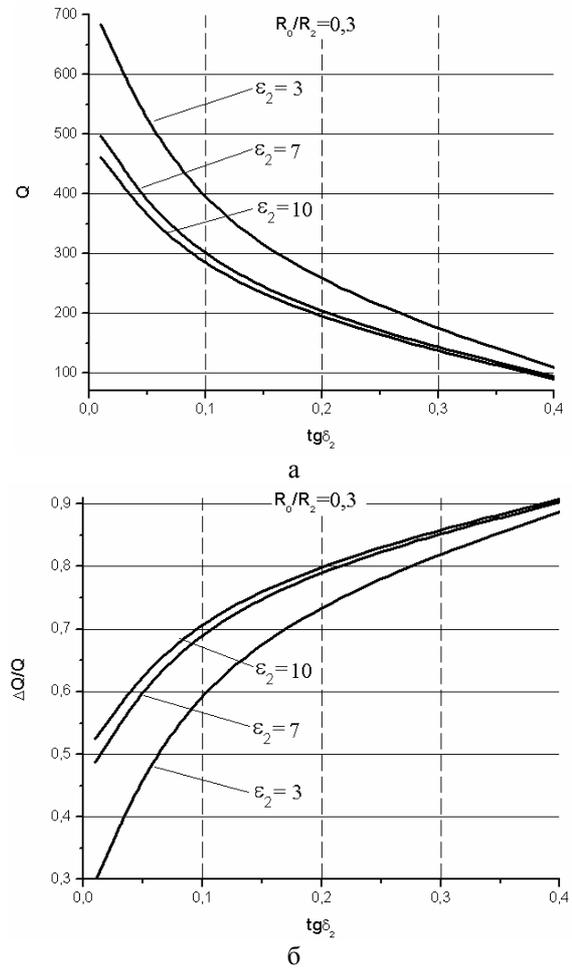


Рис. 4. Зависимость  $Q$  (а) и  $\Delta Q/Q$  (б) от параметров образца

Представленные на рис. 4 зависимости показывают, что при увеличении значений относительной диэлектрической проницаемости образца увеличивается добротность системы. Это является следствием экранирования открытого конца апертуры диэлектрическим материалом. Тем не менее, увеличение потерь, несмотря на уменьшение глубины проникновения поля в образец приводит к существенному уменьшению добротности и соответственно чувствительности датчика. Но соотношение приращения параметров к их первоначальной величине по-прежнему остается высоким, что указывает на возможность поддержания информативных свойств сенсора на высоком уровне.

#### Выводы

Результаты, представленные в данной работе и ранее в работах [7,8], показывают, что методы СВЧ диэлектрических измерений имеют ряд преимуществ по сравнению с другими методами и могут быть успешно применены в клинической практике. Преиму-

щества этих методов обусловлены следующими факторами. Во-первых, СВЧ методы позволяют осуществлять бесконтактное определение характеристик исследуемых объектов. Во-вторых, СВЧ методы позволяют одновременно, в процессе измерения воздействовать на исследуемый образец, что существенно увеличивает объем получаемой информации. Последнее особенно важно при выборе эффективного способа лечения кардиопатологии путем определения оптимальных доз препаратов с учетом индивидуальных особенностей пациента.

Выбор в качестве СВЧ сенсора четвертьволновых РИП обеспечит минимальный объем проб, что уменьшает стрессовую нагрузку пациентов. Но при значительном диапазоне изменений параметров исследуемых объектов требуются дополнительные меры для уменьшения погрешности измерений. Проведенный в работе анализ информативных параметров позволил выделить наиболее взаимозависимые из них.

В данной работе решена задача определения оптимального соотношения радиусов основной камеры РИП и радиуса КИА. Полученные зависимости информационных параметров РИП КИА позволяют минимизировать погрешность измерений электрофизических параметров биообъектов и однозначно сопоставить их с содержанием свободной воды.

Однако было бы ошибочным считать, что полученные результаты смогут полностью удовлетворить все практические потребности. В качестве путей дальнейшего совершенствования модели РИП можно выделить следующие. Потребуется оптимизация параметров системы с учетом того, что специфика измерений параметров биологических проб приведет к усложнению модели. В частности, может потребоваться учет влияния защитного слоя между экраном с КИА и образцом. Это может быть, например, доннышко кюветы с пробой. Кроме того, условия поточных клинических исследований могут потребовать учета дополнительного воздушного зазора между дном кюветы и плоскостью КИА. Поэтому для улучшения информационных возможностей метода потребуются дальнейшие исследования влияния зазоров и толщины биологических образцов.

Остальные факторы, определяющие общую погрешность, можно исключить необходимым качеством изготовления конструкции датчика.

**Литература:** 1. Щеголева Т.Ю. Исследование биологических объектов в миллиметровом диапазоне радиоволн / Т.Ю. Щеголева // К.: Наукова думка. 1996. 182 с. 2. Введение в биомембранологию / Под ред. А.А. Болдырева. М.: МГУ, 1990. 208с. 3. Авакян О.М. Фармакологическая регуляция функции адренорецепторов / О.М. Авакян // М.: Медицина, 1988. 256 с. 4. Стрюк Р.И. Адренореактивность и сердечно-сосудистая система / Р.И. Стрюк, И.Г. Длусская // М.: Медицина, 2003. 160с. 5. Панченко Б.А. Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для цилиндрических областей / Б.А. Панченко // Радиотехника. 1970. Вып. 15. С. 82–91. 6. Tai C.T. Dyadic Green's functions for a coaxial line / С. Т. Tai // IEEE Trans. of Antennas and Propagation. 1983. Vol. 48, N 2. P. 355–358. 7. Гордиенко Ю.Е. Свойства четвертьволнового коаксиального СВЧ измерительного преобразователя для диагностики материалов / Ю.Е. Гордиенко, В.В. Петров, Д.А. Полетаев // Радиотехника. 2008. № 154. С. 61 – 66. 8. Слипченко Н.И. Сравнение результатов численного моделирования систем помещения образцов в СВЧ резонаторных датчиках с коаксиальной измерительной апертурой / Н.И. Слипченко, А.Н. Бородкина // Радиотехника. 2013. № 175. С. 89 – 96.

Поступила в редколлегию 11.03.2014

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Панченко А.Ю.

**Слипченко Николай Иванович**, д-р физ.-мат. наук, проф., проректор по научной работе ХНУРЭ. Научные интересы: микроволновая микроскопия, микро- и оптоэлектроника, СВЧ-гигрометрия, приборостроение. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021-013.

**Гордиенко Юрий Емельянович**, д-р физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник каф. микроэлектроники, электронных приборов и устройств ХНУРЭ. Научные интересы: СВЧ диагностика материалов и объектов, микроэлектронные датчики. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057)702-13-62.

**Бородкина Анна Николаевна**, аспирантка каф. микроэлектронных приборов и устройств ХНУРЭ. Научные интересы: биофизика, радиофизика, СВЧ методы измерений, неразрушающий контроль. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021-362.

## ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ В РАДИОТЕХНИКЕ

ФИЛИПКОВСКАЯ М. С.

Доказывается теорема существования и единственности глобального решения переопределенной системы дифференциально-алгебраических уравнений. Векторная форма системы имеет вид полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с сингулярным характеристическим пучком операторов. Для нелинейной правой части уравнения не требуется выполнения ограничения типа глобального условия Липшица. Исследуется модель радиотехнического фильтра с нелинейными элементами и указываются ограничения, которые обеспечивают гладкую эволюцию состояний в течение сколь угодно большого временного периода.

### 1. Введение

Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений, векторная форма которой имеет вид дифференциально-алгебраического уравнения (ДАУ) с выделенной линейной частью и сингулярным характеристическим пучком операторов. Предполагается, что система уравнений переопределена, т.е. число уравнений больше числа неизвестных.

Дифференциально-алгебраические уравнения возникают в теплофизике, радиотехнике, экономике, теории управления, при математическом моделировании различных систем и процессов. Дифференциальные уравнения такого типа называют также вырожденными, сингулярными, алгебро-дифференциальными, дескрипторными. В настоящей статье под сингулярной системой дифференциально-алгебраических уравнений понимается ДАУ с сингулярным характеристическим пучком операторов.

Разрешимость ДАУ в случае регулярного характеристического пучка исследовалась многими авторами (см. монографию [1] и библиографию в ней). Для сингулярных линейных дифференциально-алгебраических уравнений классические результаты принадлежат Л. Кронекеру [2]. Локальная разрешимость сингулярных полулинейных дифференциальных уравнений исследована в статье [3]. Известны теоремы о глобальной разрешимости ДАУ с регулярным характеристическим пучком операторов, которые содержат ограничения, эквивалентные глобальным условиям Липшица [1].

Целью работы является получение условий существования и единственности глобального решения сингулярного дифференциально-алгебраического уравнения. Эта задача представляет интерес для теории динамических систем и приложений, поскольку наличие глобального по времени решения гарантирует длительное время жизни соответствующей реальной системы.

Стоит отметить, что на нелинейную правую часть рассматриваемого уравнения не накладываются ограничения типа глобальных условий Липшица.

Отказ от подобных ограничений обусловлен тем, что во многих прикладных задачах радиотехники, электроники, математической экономики и т. д. реальные нелинейности не являются глобально липшицевыми.

В качестве приложения рассматривается обратная задача для математической модели нелинейного двухполюсного радиотехнического фильтра.

### 2. Блочные представления сингулярного пучка и его компонент

Пусть даны линейные операторы  $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\mathbb{R}^n$  – вещественное  $n$ -мерное пространство), которым соответствуют  $(m \times n)$ -матрицы  $A, B$ .

Введем комплексные расширения  $\hat{A}, \hat{B}$  операторов  $A, B$ , действующие из  $\mathbb{C}^n$  в  $\mathbb{C}^m$ . Пучок  $\lambda A + B$  является регулярным, если множество  $\rho(\hat{A}, \hat{B}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \hat{A} + \hat{B})^{-1} \in L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)\}$  регулярных точек соответствующего комплексного пучка  $\lambda \hat{A} + \hat{B}$  нетривиально ( $\mathbb{C}^n$  – комплексное  $n$ -мерное пространство,  $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$  – пространство ограниченных линейных операторов из  $\mathbb{C}^m$  в  $\mathbb{C}^n$ ). В противном случае, т.е. при  $\rho(\hat{A}, \hat{B}) = \emptyset$ , пучок называется сингулярным.

Рассмотрим сингулярный пучок операторов  $\lambda A + B$ , у которого ранг (наибольший из порядков миноров, не равных тождественно нулю [2])  $r(A, B) = \text{rg}(\lambda A + B) = n < m$ . Это значит, что у соответствующего пучка матриц  $\lambda A + B$  строки линейно-зависимы и уравнение

$$(\lambda A^T + B^T)y = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda A^T + B^T$  – транспонированный пучок размера  $n \times m$ , имеет хотя бы одно ненулевое решение. Достаточно рассмотреть лишь те решения  $y(\lambda)$ , которые являются полиномами от  $\lambda$ :

$$y(\lambda) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \lambda^i y_i, \quad y_i \neq 0, \quad i = \overline{1, k},$$

где  $k \leq n$  – степень решения  $y(\lambda)$ . Условие  $(\lambda A^T + B^T)y(\lambda) = 0$  равносильно набору равенств

$$B^T y_0 = 0, B^T y_1 = A^T y_0, \dots, B^T y_k = A^T y_{k-1}, A^T y_k = 0.$$

Системы векторов  $\{y_i\}_{i=0}^k, \{B^T y_i\}_{i=1}^k$  линейно-независимы и образуют базисы, относительно которых матрица индуцированного пучка  $\lambda A_X^T + B_Y^T = \lambda A^T + B^T : Y \rightarrow X$ , где

$Y = \text{Lin}\{y_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{R}^m, X = \text{Lin}\{B^T y_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$ , будет канонической клеткой Кронекера  $L_k = (l_{ij})$  размера  $k \times (k+1)$ , у которой все элементы нулевые, кроме  $l_{ii} = \lambda, l_{i, i+1} = 1, i = \overline{1, k}$  [2]. Среди всех решений уравнения (1) выберем линейно-независимые. Если в выбранном наборе имеются решения, не зависящие от

$\lambda$ , то возьмем их в качестве новых базисных, тогда соответствующие столбцы матрицы  $\lambda A^T + B^T$ , определяющей оператор  $\lambda A^T + B^T$  в новом базисе, будут состоять из нулей. Оставшиеся линейно-независимые решения уравнения (1) обозначим через  $y_1(\lambda), y_2(\lambda), \dots, y_d(\lambda)$ . Отметим, что линейно-независимые решения уравнения (1) определяются с точностью до скалярных множителей. Коэффициенты при степенях  $\lambda$  решений  $\{y_i(\lambda)\}_{i=1}^d$  являются линейно-независимыми векторами и их можно взять в качестве новых базисных векторов в  $\mathbb{R}^m$ .

Согласно [2] сингулярный пучок матриц  $\lambda A + B$  размера  $m \times n$  и ранга  $r(A, B) = n$  ( $n < m$ ) всегда может быть приведен к каноническому квазидиагональному виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_{k_1}^T & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & L_{k_d}^T & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \tilde{A} + \tilde{B} \end{pmatrix},$$

где количество первых нулевых строк совпадает с количеством линейно-независимых постоянных решений уравнения (1), транспонированные канонические клетки Кронекера  $L_{k_j}^T$  расположены в порядке возрастания степеней  $k_j$  ( $0 < k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_d$ ,  $k_1 + k_2 + \dots + k_d \leq n$ ), соответствующих линейно-независимым решениям  $y_j(\lambda)$ ,  $j = \overline{1, d}$ ,  $\lambda \tilde{A} + \tilde{B}$  – регулярный пучок.

Таким образом, сингулярный операторный пучок  $\lambda A + B$  имеет блочное представление

$$\begin{pmatrix} \lambda \tilde{A}_s + \tilde{B}_s & 0 \\ 0 & \lambda \tilde{A}_r + \tilde{B}_r \end{pmatrix},$$

где  $\lambda \tilde{A}_s + \tilde{B}_s$  – чисто сингулярный пучок, т. е. от него нельзя отделить регулярный блок, а  $\lambda \tilde{A}_r + \tilde{B}_r$  – регулярный пучок. Ясно, что выбирая базисы в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  необходимым образом, можно получить аналогичное блочное представление соответствующего пучка матриц  $\lambda A + B$  с одинаковыми матричными компонентами  $\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{A}_r, \tilde{B}_r$ .

Существуют разложения пространств  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  в прямые суммы подпространств

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r, \quad (2)$$

относительно которых индуцированные пучки

$$\lambda A_s + B_s = \lambda A + B : X_s \rightarrow Y_s, \quad (3)$$

$$\lambda A_r + B_r = \lambda A + B : X_r \rightarrow Y_r \quad (4)$$

являются чисто сингулярным и регулярным соответственно. Подобное представление в [3] названо RS-расщеплением пучка. Введем две пары взаимно дополнительных проекторов  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow X_s$ ,

$P : \mathbb{R}^n \rightarrow X_r$  и  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_s$ ,  $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_r$  на подпространства из разложений (2),  $E_{\mathbb{R}^n} = S + P$ ,

$E_{\mathbb{R}^m} = F + Q$ . Пары подпространств  $(X_s, Y_s)$ ,  $(X_r, Y_r)$  инвариантны относительно операторов  $A, B$ , то есть  $QA = AP, QB = BP, FA = AS, FB = BS$ .

Сингулярное пространство  $Y_s$  разлагается в прямую сумму подпространств  $Y_s = Y_{s1} \dot{+} Y_{s2}$  таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{s1} \\ 0 \end{pmatrix} : X_s \rightarrow Y_{s1} \dot{+} Y_{s2}, \quad (5)$$

$$B_s = \begin{pmatrix} B_{s1} \\ B_{s2} \end{pmatrix} : X_s \rightarrow Y_{s1} \dot{+} Y_{s2},$$

где  $A_{s1} \in L(X_s, Y_{s1})$  имеет обратный оператор

$A_{s1}^{-1} \in L(Y_{s1}, X_s)$ . Обозначим через  $\tilde{F}_k : Y_s \rightarrow Y_{sk}$  проекторы на подпространства  $Y_{sk}$  и через

$F_k = \tilde{F}_k F : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_{sk}$ ,  $k = 1, 2$ , – расширения

операторов  $\tilde{F}_k$ ,  $F = F_1 + F_2$ ,  $F_1 F_2 = F_2 F_1 = 0$ ,  $A_{s1} = F_1 A|_{X_s}$ ,  $B_{sk} = F_k B|_{X_s}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $F_2 A = 0$ .

Пусть  $\lambda A_r + B_r$  – регулярный пучок индекса 1, т. е. выполнено ограничение

$$\exists C_1 > 0 \exists C_2 > 0 : \|(\lambda A_r + B_r)^{-1}\| \leq C_1, \quad |\lambda| \geq C_2. \quad (6)$$

Тогда существуют вещественные спектральные проекторы  $\tilde{P}_k : X_r \rightarrow X_k$ ,  $\tilde{Q}_k : Y_r \rightarrow Y_k$ ,  $k = 1, 2$ ,

которые могут быть вычислены контурным интегрированием и расщепляют пространства  $X_r, Y_r$

в прямые суммы подпространств  $X_r = X_1 \dot{+} X_2$ ,  $Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2$  [4]. Операторы

индуцированных пучков

$\lambda A_k + B_k = \lambda A_r + B_r : X_k \rightarrow Y_k$ ,  $k = 1, 2$  таковы, что

$A_2 = 0$ , существуют  $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$  и

$B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$ . Обозначим через

$P_k = \tilde{P}_k P : \mathbb{R}^n \rightarrow X_k$ ,  $Q_k = \tilde{Q}_k Q : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_k$

расширения проекторов  $\tilde{P}_k, \tilde{Q}_k$ ,  $k = 1, 2$ ,

$P = P_1 + P_2$ ,  $Q = Q_1 + Q_2$ , при этом для расширенных

проекторов сохраняются свойства исходных:  $Q_k A = A P_k$ ,  $Q_k B = B P_k$ ,  $k = 1, 2$ .

### 3. Постановка задачи и дополнительные построения

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t, x), \quad (7)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \geq 0), \quad (8)$$

где  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  –

непрерывная функция,  $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  – линейные операторы, которым соответствуют  $(m \times n)$ -матрицы  $A, B$ .

Влияние левой части уравнения (7) определяется

свойствами характеристического пучка операторов  $\lambda A + B$ . Предполагается, что сингулярный пучок  $\lambda A + B$  имеет ранг  $r(A, B) = n < m$ . Тогда пространства  $R^n$ ,  $R^m$  допускают разложения (см. п. 2)

$$\begin{aligned} R^n &= X_s \dot{+} X_r = X_s \dot{+} X_1 \dot{+} X_2, \\ R^m &= Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s1} \dot{+} Y_{s2} \dot{+} Y_r, \end{aligned} \quad (9)$$

такие, что пучок  $\lambda A + B$  расщепляется на сингулярную компоненту (3), операторы которой имеют блочные представления (5), и регулярную компоненту (4). Предполагается, что  $\lambda A_r + B_r$  – регулярный пучок индекса 1. Как в п. 2, вводятся проекторы из  $R^n$  и  $R^m$  на соответствующие подпространства в разложениях (9).

Относительно разложения (9) пространства  $R^n$  любой вектор  $x \in R^n$  единственным образом представим в виде суммы

$$\begin{aligned} x &= x_s + x_1 + x_2, \\ x_s &= Sx \in X_s, \quad x_k = P_k x \in X_k, \quad k=1,2. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим  $\dim X_s = q$ ,  $\dim X_1 = a$ ,  $\dim X_2 = d$ ,  $q + a + d = n$ . Пусть  $\{s_i\}_{i=1}^q$ ,  $\{p_i\}_{i=1}^a$ ,  $\{p_{a+i}\}_{i=1}^d$  – базисы подпространств  $X_s$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  соответственно. Базисы выбираются так, чтобы относительно них матрицы  $A_s$ ,  $B_s$  сингулярной компоненты пучка  $\lambda A + B$  имели вид (5). Объединение базисов подпространств  $X_s$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  является базисом пространства  $R^n = R^q \times R^a \times R^d$  и для любого вектора  $x \in R^n$  из разложения

$$x = \sum_{i=1}^q w_i s_i + \sum_{i=1}^a z_i p_i + \sum_{i=1}^d v_i p_{a+i}$$

по этому базису вытекает представление:  $x = \begin{pmatrix} w \\ z \\ v \end{pmatrix}$ ,

$$\text{где } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{pmatrix} \in R^q, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_a \end{pmatrix} \in R^a, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in R^d.$$

Указанное разложение вектора  $x$  определяет операторы  $S_q: R^q \rightarrow X_s$ ,  $P_a: R^a \rightarrow X_1$ ,  $P_d: R^d \rightarrow X_2$ , для которых, очевидно, существуют обратные операторы  $S_q^{-1}: X_s \rightarrow R^q$ ,  $P_a^{-1}: X_1 \rightarrow R^a$ ,  $P_d^{-1}: X_2 \rightarrow R^d$ , и компоненты вектора  $x$  в разложении (10) имеют вид

$$x_s = S_q w, \quad x_1 = P_a z, \quad x_2 = P_d v, \quad (11)$$

соответственно,  $w = S_q^{-1} Sx$ ,  $z = P_a^{-1} P_1 x$ ,  $v = P_d^{-1} P_2 x$ .

**Определение 1** [5]. *Аддитивным разложением единицы*  $E_Y$  в  $s$ -мерном линейном пространстве  $Y$  назовем любую систему одномерных проекторов  $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ ,  $\Theta_k: Y \rightarrow Y$  ( $\Theta_k^2 = \Theta_k$ ) таких, что  $\Theta_i \Theta_j = 0$

при  $i \neq j$  и  $E_Y = \sum_{k=1}^s \Theta_k$ .

**Определение 2** [5]. Оператор-функция  $\Phi(x): D \rightarrow L(X, Y)$ ,  $D \subset X$  называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u, v\}$  векторов  $u, v \in D$ , если для любого набора векторов  $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \text{conv}\{u, v\}$  и некоторого аддитивного разложения единицы  $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$  в  $s$ -мерном пространстве  $Y$  оператор  $\Lambda = \sum_{k=1}^s \Theta_k \Phi(\tilde{x}_k) \in L(X, Y)$  является обратимым так, что  $\Lambda^{-1} \in L(Y, X)$ .

Представим отображение  $\Phi(x): D \rightarrow L(X, Y)$  в виде матрицы в некоторых базисах  $s$ -мерных пространств  $X, Y$ :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \cdots & \Phi_{1s}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(x) & \cdots & \Phi_{ss}(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 2 может быть сформулировано следующим образом: оператор-функция  $\Phi(x)$  называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u, v\}$  векторов  $u, v \in D$ , если для любого набора векторов  $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset \text{conv}\{u, v\}$  обратим оператор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tilde{x}_1) & \cdots & \Phi_{1s}(\tilde{x}_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{s1}(\tilde{x}_s) & \cdots & \Phi_{ss}(\tilde{x}_s) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, из базисной обратимости оператор-функции  $\Phi(x)$  на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u, v\}$  следует обратимость в любой точке  $x \in \text{conv}\{u, v\}$  ( $x = \lambda v + (1-\lambda)u$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ). Обратное утверждение не верно, кроме случая, когда пространства  $X, Y$  одномерны. Приведем пример.

Пусть  $X = Y = R^2$ ,  $D = \text{conv}\{u, v\}$ ,  $u = (1, -1)^T$ ,  $v = (1, 1)^T$ ,  $x = (x_1, x_2)^T \in D$ ,  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & 1 \\ -1 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$ .

Для набора векторов  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} \subset \text{conv}\{u, v\}$  оператор  $\Lambda$  имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 & 1 \\ -1 & \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\forall x \in D: \det \Phi(x) = x_1^2 x_2^2 + 1 \neq 0$ , то  $\Phi(x)$  обратима на  $D$ . Однако оператор  $\Lambda$  необратим для  $\{\tilde{u}, \tilde{v}\} = \{u, v\}$  и, следовательно, функция  $\Phi(x)$  не является базисно обратимой на  $D$ . Если же взять  $u = (1, 0)^T$ , базисная обратимость будет иметь место.

#### 4. Основная теорема

Введем многообразие

$$L_0 = \{(t, x) \in [0, \infty) \times R^n : (F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0\}.$$

Здесь и далее используются проекторы и блочные

представления операторов пучка  $\lambda A + B$ , определенные в п. 2, 3.

**Теорема.** Пусть функция  $f(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  имеет непрерывную частную производную  $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$

всюду на  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ ,  $n < m$ , ранг пучка  $\lambda A + B$  равен  $n$ , регулярная компонента (4) удовлетворяет (6). Пусть

$$\forall t \geq 0 \exists x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in L_0, \quad (12)$$

и для любых  $u_k \in X_2$  таких, что  $(t, Sx + P_1x + u_k) \in L_0$ ,  $k = 1, 2$ , функция

$$\Phi(u) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, Sx + P_1x + u)) - B \right] P_2 \quad (13)$$

является базисно обратимым оператором ( $\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$ ) на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u_1, u_2\}$ . Предположим, что проекции  $F_1 f$ ,  $Q_1 f$  допускают представления:

$$\begin{aligned} F_1 f(t, x) &= K_1(t)Sx + K_2(t)P_1x + \psi_1(t, x) + g_1(t), \\ Q_1 f(t, x) &= D_1(t)Sx + D_2(t)P_1x + \psi_2(t, x) + g_2(t), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $K_1(t) \in C([0, \infty), L(X_s, Y_{s_1}))$ ,

$$K_2(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_{s_1})),$$

$$D_1(t) \in C([0, \infty), L(X_s, Y_1)),$$

$$D_2(t) \in C([0, \infty), L(X_1, Y_1)), \quad g_1(t) \in C([0, \infty), Y_{s_1}),$$

$$g_2(t) \in C([0, \infty), Y_1), \quad \psi_1(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_{s_1}),$$

$$\psi_2(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, Y_1), \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi_i(t, x), \quad i = 1, 2$$

непрерывны на  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ . Пусть существуют самосопряженные положительные операторы  $H_i = H_i^* > 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $H_1 \in L(X_s)$ ,  $H_2 \in L(X_1)$  и для каждого  $T > 0$  найдется число  $R_T > 0$  такое, что

$$\begin{aligned} (H_1 Sx, A_{s1}^{-1} \psi_1(t, x)) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} \psi_2(t, x)) &\leq 0, \\ \forall (t, x) \in L_0 : 0 \leq t \leq T, \|Sx + P_1 x\| &\geq R_T. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда для любой начальной точки  $(t_0, x_0) \in L_0$  существует единственное решение  $x(t)$  задачи Коши (7), (8) на  $t_0 \leq t < \infty$ .

Доказательство. Применяя к уравнению (7) проекторы  $F_k$ ,  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ , получаем эквивалентную систему четырех уравнений:

$$\frac{d}{dt} (F_1 A Sx) + F_1 B Sx = F_1 f(t, x), \quad (16)$$

$$F_2 [Bx - f(t, x)] = 0, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} (A P_1 x) + B P_1 x = Q_1 f(t, x), \quad (18)$$

$$Q_2 f(t, x) - B P_2 x = 0, \quad (19)$$

в которой уравнение (17) является тождеством в силу условий теоремы.

Сужая операторы из системы уравнений (16), (18), (19) на пространства соответственно  $X_s$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  из разложения (9) и учитывая (5), получаем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (A_{s1} x_s) + B_{s1} x_s = F_1 f(t, x), \\ \frac{d}{dt} (A_1 x_1) + B_1 x_1 = Q_1 f(t, x), \\ Q_2 f(t, x) - B_2 x_2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Умножая уравнения системы (20) слева на  $S_q^{-1} A_{s1}^{-1}$ ,  $P_a^{-1} A_1^{-1}$ ,  $P_d^{-1} B_2^{-1}$  соответственно и делая замену (11), получаем эквивалентную (20) систему:

$$\frac{dw}{dt} + S_q^{-1} A_{s1}^{-1} B_{s1} S_q w = S_q^{-1} A_{s1}^{-1} F_1 \tilde{f}(t, w, z, v), \quad (21)$$

$$\frac{dz}{dt} + P_a^{-1} A_1^{-1} B_1 P_a z = P_a^{-1} A_1^{-1} Q_1 \tilde{f}(t, w, z, v), \quad (22)$$

$$P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w, z, v) - v = 0, \quad (23)$$

где  $\tilde{f}(t, w, z, v) = f(t, S_q w + P_a z + P_d v)$ .

Рассмотрим отображение

$$\Psi(t, w, z, v) = P_d^{-1} B_2^{-1} Q_2 \tilde{f}(t, w, z, v) - v.$$

Оно непрерывно по совокупности переменных и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial \Psi(t, w, z, v)}{\partial (w, z)} = P_d^{-1} B_2^{-1} \frac{\partial Q_2 f(t, x)}{\partial x} (S_q P_a),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(t, w, z, v)}{\partial v} &= P_d^{-1} \left[ B_2^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - P_2 \right] P_d = \\ &= P_d^{-1} B_2^{-1} \Phi(P_d v) P_d, \end{aligned}$$

где  $\Phi(P_d v) = \Phi(u)$  – оператор-функция (13),  $u = P_d v \in X_2$ .

Поскольку функция  $\Phi(u)$  является базисно обратимым оператором на  $\text{conv}\{u_1, u_2\}$  для любых  $u_i \in X_2$  таких, что  $(t, x_s + x_1 + u_i) \in L_0$ ,  $i = 1, 2$ , существует аддитивное разложение единицы  $\{\Theta_k\}_{k=1}^d$  в  $Y_2$  такое, что оператор

$\Lambda_1 = \sum_{k=1}^d \Theta_k \Phi(\tilde{u}_k) \in L(X_2, Y_2)$  является обратимым

для любого набора векторов  $\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^d \subset \text{conv}\{u_1, u_2\}$ . С помощью обратимого оператора  $N = P_d^{-1} B_2^{-1} : Y_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  введем в  $\mathbb{R}^d$  систему одномерных проекторов  $\hat{\Theta}_k = N \Theta_k N^{-1}$ , которые образуют аддитивное разложение единицы  $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^d$  в  $\mathbb{R}^d$ . Выберем любые  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$ ,  $\tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}$ ,  $k = \overline{1, d}$ , такие, что  $(t, w, z, v_i)$ ,  $i = 1, 2$ , принадлежат  $\tilde{L}_0 = \left\{ (t, w, z, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n : (F_2 + Q_2)[B(S_q w + P_a z + P_d v) - \tilde{f}(t, w, z, v)] = 0 \right\}$ .

Поскольку  $(t, w, z, v) \in \tilde{L}_0 \Leftrightarrow (t, x) \in L_0$  и для векторов  $u_i = P_d v_i$ ,  $\tilde{u}_k = P_d \tilde{v}_k$  обратим оператор  $\Lambda_1$ , то обратим и действующий в  $\mathbb{R}^d$  оператор

$$\Lambda_2 = \sum_{k=1}^d \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} \Psi(t, w, z, \tilde{v}_k) = N \Lambda_1 P_d.$$

Таким образом, для любых  $v_i$  таких, что  $(t, w, z, v_i) \in \tilde{L}_0$ ,  $i = 1, 2$ , функция

$$W(v) = \frac{\partial}{\partial v} \Psi(t, w, z, v) \text{ является базисно обратимым}$$

оператором на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{v_1, v_2\}$  и, следовательно, для любой точки  $(t, w, z, v) \in \tilde{L}_0$

$$\text{существует обратный оператор } \left[ \frac{\partial \Psi(t, w, z, v)}{\partial v} \right]^{-1}.$$

Из (12) следует, что для любого  $t$  можно выбрать  $w, z, v$  так, что  $(t, w, z, v) \in \tilde{L}_0$ .

Пусть  $t_*$  – некоторая точка из  $[0, \infty)$ . Выберем  $w_* \in \mathbb{R}^q$ ,  $z_* \in \mathbb{R}^a$ ,  $v_* \in \mathbb{R}^d$  так, чтобы  $(t_*, w_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$ . В силу теорем о неявной функции [6], существуют окрестности  $U_\varepsilon(v_*)$ ,

$U = U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(w_*) \times U_{\delta_3}(z_*)$  и единственная функция  $v = v(t, w, z) \in C(U, U_\varepsilon(v_*))$ , непрерывно дифференцируемая по  $(w, z)$ , такая, что  $\Psi(t, w, z, v(t, w, z)) = 0$ ,  $(t, w, z) \in U$  и  $v(t_*, w_*, z_*) = v_*$ . Данное утверждение выполнено для всех точек  $(t, w, z) \in [0, \infty) \times D_{wz}$  и  $v \in D_v$ , где области  $D_{wz} \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^a$ ,  $D_v \subset \mathbb{R}^d$  такие, что  $(S_q^{-1} S x_0, P_a^{-1} P_1 x_0) \in D_{wz}$ ,  $P_d^{-1} P_2 x_0 \in D_v$ . Определим глобальную функцию  $v = \eta(t, w, z) : [0, \infty) \times D_{wz} \rightarrow D_v$  в точке  $(t_*, w_*, z_*)$  как  $\eta(t_*, w_*, z_*) = v(t_*, w_*, z_*)$ .

Рассмотрим точки  $(t, w, z, v_i) \in \tilde{L}_0$ ,  $i = 1, 2$ , очевидно,  $\Psi(t, w, z, v_i) = 0$ . Для функции  $\Psi$  ее проекции  $\Psi_k(t, w, z, v) = \hat{\Theta}_k \Psi(t, w, z, v)$ ,  $k = \overline{1, d}$ , являются функциями со значениями в одномерных пространствах  $R_k = \hat{\Theta}_k \mathbb{R}^d$ , изоморфных  $\mathbb{R}$ . Согласно формуле конечных приращений [6]:

$$\Psi_k(t, w, z, v_2) - \Psi_k(t, w, z, v_1) = \frac{\partial}{\partial v} \Psi_k(t, w, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0, \tilde{v}_k \in \text{conv}\{v_1, v_2\}, k = \overline{1, d}, \text{ следовательно,}$$

$$\hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} \Psi_k(t, w, z, \tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0, k = \overline{1, d}, \text{ откуда}$$

$$\text{получаем: } \Lambda_2(v_2 - v_1) = 0, \text{ значит, } v_2 = v_1 \text{ и}$$

$$\forall (t, w, z) \in [0, \infty) \times D_{wz} \exists! v \in D_v : \Psi(t, w, z, v) = 0. \quad (24)$$

Так как в некоторой окрестности каждой точки  $(t_*, w_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_{wz}$  существует единственное решение  $v = v(t, w, z)$  неявного уравнения (23), непрерывное по совокупности переменных  $t, w, z$  вместе со своими частными производными по  $w, z$ , то функция  $v = \eta(t, w, z)$  в этой окрестности совпадает с  $v(t, w, z)$  и является решением уравнения (23) с соответствующими свойствами гладкости.

Покажем, что функция  $v = \eta(t, w, z)$  единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция  $v = \mu(t, w, z)$ , обладающая в некоторой точке  $(t_*, w_*, z_*) \in [0, \infty) \times D_{wz}$  теми же свойствами, что и  $v = \eta(t, w, z)$ , то, в силу (24),  $\eta(t_*, w_*, z_*) = \mu(t_*, w_*, z_*) = v_*$ , следовательно,  $\eta(t, w, z) = \mu(t, w, z)$  на  $[0, \infty) \times D_{wz}$ .

Подставим  $v = \eta(t, w, z)$  в (21), (22) и получим:

$$\frac{dw}{dt} = S_q^{-1} A_{sl}^{-1} [-B_{sl} S_q w + F_1 \tilde{f}(t, w, z, \eta(t, w, z))], \quad (25)$$

$$\frac{dz}{dt} = P_a^{-1} A_1^{-1} [-B_1 P_a z + Q_1 \tilde{f}(t, w, z, \eta(t, w, z))]. \quad (26)$$

Запишем систему (25), (26) в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1 [-N_2 \omega + G(t, \omega)], \quad (27)$$

$$\text{где } \omega = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} S_q^{-1} A_{sl}^{-1} & 0 \\ 0 & P_a^{-1} A_1^{-1} \end{pmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} B_{sl} S_q & 0 \\ 0 & B_1 P_a \end{pmatrix}, \quad \text{обозначение для } \eta$$

сохраняется, т.е.  $\eta(t, \omega) = \eta(t, w, z)$ , и

$$G(t, \omega) = \begin{pmatrix} F_1 \tilde{f}(t, \omega, \eta(t, \omega)) \\ Q_1 \tilde{f}(t, \omega, \eta(t, \omega)) \end{pmatrix}.$$

В силу свойств функций  $F_1 f$ ,  $Q_1 f$  вида (14) и  $\eta$ , функция  $G(t, \omega)$  непрерывна по совокупности переменных  $t, \omega$  и непрерывно дифференцируема по  $\omega$  на  $[0, \infty) \times D_{wz}$ . Следовательно, на некотором интервале  $t_0 \leq t < \varepsilon$  существует единственное решение  $\omega(t)$  задачи Коши для уравнения (27) с начальным условием

$$\omega(t_0) = \omega_0, \quad \omega_0 = (w_0, z_0)^T, \quad (28)$$

$(t_0, w_0, z_0, \eta(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$ . Заметим, что если начальная точка  $(t_0, x_0) \in L_0$  и  $x_0 = S_q w_0 + P_a z_0 + P_d \eta(t_0, w_0, z_0)$ , то начальная точка  $(t_0, w_0, z_0, \eta(t_0, w_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$ .

Обозначим

$$\hat{\Psi}_i(t, \omega) = \Psi_i(t, (S_q, P_a) \omega + P_d \eta(t, \omega)), \quad i = 1, 2,$$

$$e(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad N_3(t) = \begin{pmatrix} K_1(t) S_q & K_2(t) P_a \\ D_1(t) S_q & D_2(t) P_a \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Psi}(t, \omega) = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1(t, \omega) \\ \hat{\Psi}_2(t, \omega) \end{pmatrix}.$$

Для произвольного фиксированного числа  $T \in (0, \infty)$  введем срезку функции  $\hat{\Psi}(t, \omega)$  по переменной  $t$ :

$$\hat{\Psi}_T(t, \omega) = \begin{cases} \hat{\Psi}(t, \omega), & 0 \leq t \leq T \\ \hat{\Psi}(T, \omega), & t > T \end{cases}. \quad \text{С учетом новых}$$

обозначений и представления (14) уравнение (27) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = N_1 [(N_3(t) - N_2) \omega + e(t) + \hat{\Psi}_T(t, \omega)]. \quad (29)$$

Рассмотрим функцию

$$V(x_s + x_1) = \frac{1}{2}[(H_1 x_s, x_s) + (H_2 x_1, x_1)] = \\ = \frac{1}{2}[(H_1 S_q w, S_q w) + (H_2 P_a z, P_a z)] = \frac{1}{2}(\hat{H}\omega, \omega) = \hat{V}(\omega),$$

где  $\hat{H} = \begin{pmatrix} S_q^* H_1 S_q & 0 \\ 0 & P_a^* H_2 P_a \end{pmatrix}$  и  $H_1, H_2$  – операторы из

(15). Ясно, что  $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$ . Градиент функции  $\hat{V}$  равен  $\text{grad}\hat{V}(\omega) = \hat{H}\omega$ .

Из (15) следует, что для каждого  $T > 0$  найдется число  $\hat{R}_T > 0$  такое, что

$$(\hat{H}\omega, N_1 \hat{\psi}(t, \omega)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|\omega\| \geq \hat{R}_T. \quad (30)$$

Так как  $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$ , то существуют  $\hat{H}^{-1}$  и легко показать, что  $\|\omega\|^2 \leq \|\hat{H}^{-1}\|(\hat{H}\omega, \omega)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \left| (\hat{H}\omega, N_1 [N_3(t) - N_2] \omega) \right| \leq \\ & \leq \|\hat{H}\| \|N_1\| \|N_3(t) - N_2\| \|\hat{H}^{-1}\| (\hat{H}\omega, \omega). \end{aligned}$$

Выбирая  $\hat{R}_T \geq \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}$ , получаем оценку:

$$\left| (\hat{H}\omega, N_1 e(t)) \right| \leq \|\hat{H}\|^{1/2} \|N_1\| \|e(t)\| (\hat{H}\omega, \omega), \quad \|\omega\| \geq \hat{R}_T.$$

Увеличивая, если необходимо, радиус  $\hat{R}_T$  в условии (30) так, чтобы выполнялось неравенство  $\hat{R}_T \geq \sqrt{\|\hat{H}^{-1}\|}$ , получаем оценку для производной функции  $\hat{V}(\omega)$  в силу системы (29) [7], которая выполнена при всех  $\omega$  таких, что  $\|\omega\| \geq \hat{R}_T$  и всех  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}_{(29)} &= (\hat{H}\omega, N_1 [(N_3(t) - N_2)\omega + e(t) + \hat{\psi}_T(t, \omega)]) \leq \\ &\leq (\hat{H}\omega, N_1 [N_3(t) - N_2]\omega) + (\hat{H}\omega, N_1 e(t)) \leq \\ &\leq \|N_1\| \left( \|\hat{H}\| \|N_3(t) - N_2\| \|\hat{H}^{-1}\| + \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right) (\hat{H}\omega, \omega) = \\ &= k(t) \hat{V}(\omega), \end{aligned}$$

где  $k(t) = 2\|N_1\| \left( \|\hat{H}\| \|N_3(t) - N_2\| \|\hat{H}^{-1}\| + \|\hat{H}\|^{1/2} \|e(t)\| \right)$  – непрерывная функция при  $t \geq 0$ . Так как неравенство  $\dot{v} \leq G(t, v)$ ,  $t \geq 0$ , где  $G(t, v) = k(t)v$ , не имеет ни одного положительного решения  $v(t)$  с конечным временем определения, то по лемме 3.1 из [7] каждое решение  $\omega(t) = (w(t), z(t))^T$  уравнения (27) неограниченно продолжаемо. Проверим, что каждое локальное решение  $\omega(t)$ ,  $t \in [t_0, \varepsilon)$  ( $t_0 \geq 0$ ) уравнения (27) допускает единственное продолжение на всю временную полуось  $t_0 \leq t < \infty$ . Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение  $\omega(t)$  задачи Коши (27), (28) единственно на некотором интервале

$t_0 \leq t < \varepsilon$ . Предположим, что решение не единственно на  $t_0 \leq t < \infty$ . Тогда существует  $t_* \geq \varepsilon$  и два различных неограниченно продолжаемых решения  $\omega(t)$ ,  $\hat{\omega}(t)$  с общим значением  $\omega_* = \omega(t_*) = \hat{\omega}(t_*)$ . Возьмем точку  $(t_*, \omega_*)$  в качестве начальной (в силу свойств функции  $\eta$  точка  $(t_*, w_*, z_*, \eta(t_*, w_*, z_*)) \in \tilde{L}_0$ ), тогда на некотором интервале  $t_* \leq t < \varepsilon_1$  должно существовать единственное решение уравнения (27) с начальным значением  $\omega(t_*) = \omega_*$ , что противоречит предположению.

Найденные непрерывно дифференцируемые компоненты  $w(t)$ ,  $z(t)$  глобального решения  $\omega(t)$  уравнения (27) однозначно определены на всей полуоси  $t_0 \leq t < \infty$ . Следовательно, функция  $x(t) = S_q w(t) + P_a z(t) + P_d \eta(t, w(t), z(t))$  будет единственным решением уравнения (7) на  $[t_0, \infty)$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** По построению гладкость решения  $x(t)$  следующая: компоненты  $Sx(t)$ ,  $P_1 x(t)$  непрерывно дифференцируемы, а  $P_2 x(t)$  – непрерывна.

**Замечание 2.** Условие базисной обратимости оператор-функции  $\Phi(u)$  (13) на любой выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u_1, u_2\}$  можно заменить на требование обратимости в любой точке  $(t, Sx + P_1 x + u) \in L_0$ , если вместо условия (12) потребовать, чтобы  $\forall t \geq 0 \exists x_s \in X_s \exists x_1 \in X_1 \exists! u \in X_2 : (t, x_s + x_1 + u) \in L_0$ .

## 5. Пример

Рассмотрим систему из трех уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 - x_2 = I(t) - x_1^3 + x_2^3, \quad (31)$$

$$x_1 + x_2 = I(t), \quad (32)$$

$$2x_2 = x_1^3 - x_2^3, \quad (33)$$

векторная форма которой имеет вид (7), где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} I(t) - x_1^3 + x_2^3 \\ I(t) \\ x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad I(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}).$$

Ранг пучка  $\lambda A + B$  равен 2.

Анализируя решение уравнения (1), находим пространства  $X_s = \text{Lin}\{s\}$ ,  $X_r = \text{Lin}\{p\}$ ,  $Y_s = Y_{s_1} + Y_{s_2} = \text{Lin}\{g_i\}_{i=1}^2$ ,  $Y_{s_1} = \text{Lin}\{g_1\}$ ,  $Y_{s_2} = \text{Lin}\{g_2\}$ ,  $Y_r = \text{Lin}\{q\}$ ,  $X_2 = X_r$ ,  $Y_2 = Y_r$ ,  $X_1 = \{0\}$ ,  $Y_1 = \{0\}$  из разложений (9), где

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем введенные в п. 2 проекторы  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow X_s$ ,



с заданными токами  $I(t)$ ,  $I_1(t)$ , которая описывает модель электрической цепи двухполосника.

Запишем уравнения Кирхгофа и связей на элементах цепи:  $I = I_{r_4} + I_{\varphi_1} + I_L$ ,  $I_L = I_1 + I_2$ ,  $I_1 = I_C + I_g + I_h$ ,

$$I_{r_1} = I - I_1, U_C = U_{r_1} + U_{r_2}, U_{r_1} = r_1 I_{r_1}, U_{r_2} = r_2 I_2,$$

$$U_{r_3} = r_3 I_L, U_{\varphi_1} = \varphi_1(I_{\varphi_1}), U_{\varphi_3} = \varphi_3(I_L),$$

$$U_L + U_{r_3} + U_{\varphi_3} + U_{r_2} = U_{\varphi_1}, I_{r_4} = q U_{\varphi_1}, q = 1/r_4,$$

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}, I_C = C \frac{dU_C}{dt}, I_g = g U_C, I_h = h(U_C).$$

Здесь индуктивность  $L$ , емкость  $C$ , линейные сопротивления  $r_k$ ,  $k = \overline{1,4}$  и проводимость  $g$  являются положительными вещественными параметрами, непрерывно дифференцируемые на  $\mathbb{R}$  скалярные функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_3$  и  $h$  характеризуют нелинейные сопротивления и проводимость, заданные токи  $I(t)$ ,  $I_1(t)$  являются непрерывными при  $t \geq 0$  скалярными функциями.

Выполнив элементарные преобразования из приведенных уравнений, получим систему с переменными  $x_1 = I_L$ ,  $x_2 = U_C$ ,  $x_3 = I_{\varphi_1}$ , описывающую модель цепи на рисунке:

$$L \frac{dx_1}{dt} + (r_2 + r_3)x_1 = r_2 I_1(t) + \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1), \quad (35)$$

$$C \frac{dx_2}{dt} + g x_2 = I_1(t) - h(x_2), \quad (36)$$

$$x_2 - r_2 x_1 = r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t), \quad (37)$$

$$x_1 + x_3 = I(t) - q \varphi_1(x_3). \quad (38)$$

Векторная форма системы (35)-(38) имеет вид (7), где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ,

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} r_2 I_1(t) + \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) \\ r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t) \\ I(t) - q \varphi_1(x_3) \end{pmatrix}.$$

Ранг пучка  $\lambda A + B$  равен 3.

Анализ решений уравнения (1) показывает, что при  $L \neq C(r_2 + r_3)/g$  пространства из разложений (9) имеют вид:

$$X_r = \text{Lin}\{p\}, X_s = \text{Lin}\{s_i\}_{i=1}^2,$$

$$Y_s = Y_{s_1} + Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_i\}_{i=1}^3, Y_{s_1} = \text{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2,$$

$$Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_3\}, Y_r = \text{Lin}\{d\}, X_2 = X_r, Y_2 = Y_r,$$

$$X_1 = \{0\}, Y_1 = \{0\},$$

где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

при  $L = C(r_2 + r_3)/g$ :  $X_r = X_1 + X_2 = \text{Lin}\{p_i\}_{i=1}^2$ ,

$$X_1 = \text{Lin}\{p_1\}, X_2 = \text{Lin}\{p_2\}, X_s = \text{Lin}\{s\},$$

$$Y_s = Y_{s_1} + Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_i\}_{i=1}^2, Y_{s_1} = \text{Lin}\{l_1\},$$

$$Y_{s_2} = \text{Lin}\{l_2\}, Y_r = Y_1 + Y_2 = \text{Lin}\{d_i\}_{i=1}^2,$$

$$Y_1 = \text{Lin}\{d_1\}, Y_2 = \text{Lin}\{d_2\},$$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 g \\ r_2 + r_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим подробно случай, когда  $L \neq C(r_2 + r_3)/g$ .

Выпишем введенные в п. 2 проекторы  $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_s$ ,

$$P: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_r, Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_r, F: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_s,$$

$$F_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_{s_k}, P_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow X_k, Q_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow Y_k, k = 1, 2,$$

в координатных базисах пространств  $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = F_1 + F_2,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = Q, P_2 = P, Q_1 = 0, P_1 = 0.$$

Оператор  $A_{s1} = F_1 A|_{X_s}: X_s \rightarrow Y_{s_1}$  из представления

(5) имеет обратный  $A_{s1}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$ . В

координатных базисах пространств  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  матрицы

$A_{s1}, A_{s1}^{-1}$  одноименных операторов принимают вид:

$$A_{s1} = A, A_{s1}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как в приведенном выше примере проверяем, что пучок  $\lambda A_r + B_r$  (4) регулярен и удовлетворяет (6).

Проекция вектора  $x$ :

$$x_s = Sx = (x_1, x_2, -x_1)^T = (a, b, -a)^T,$$

$$P_1 x = 0, u = P_2 x = (0, 0, x_1 + x_3)^T = (0, 0, v),$$

$$a = x_1, b = x_2, v = x_1 + x_3 \in \mathbb{R}.$$

Уравнение  $(F_2 + Q_2)[Bx - f(t, x)] = 0$  эквивалентно системе двух уравнений (37), (38) и легко проверить, что условие (12) теоремы выполнено.

С учетом новых обозначений систему (37), (38) можно переписать в виде

$$b - r_2 a = r_1 I(t) - (r_1 + r_2) I_1(t), \quad (39)$$

$$v = I(t) - q\varphi_1(v - a). \quad (40)$$

Учитывая, что  $\forall t \geq 0 \forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}$  такое, что выполнено (39), то  $\forall t \geq 0 \forall a \in \mathbb{R} \forall v \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющих (40), найдется  $b \in \mathbb{R}$  такое, что выполнена система (39), (40).

Найдем 
$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x)) - B \right] P_2 = -(q\varphi_1'(x_3) + 1)W,$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1'(x_3) = \frac{d\varphi_1(x_3)}{dx_3}, \text{ и рассмотрим}$$

оператор-функцию

$$\hat{\Phi}(\tilde{u}) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t, x_s + \tilde{u})) - B \right] P_2 = -(q\varphi_1'(\tilde{v} - a) + 1)W,$$

$\tilde{u} = (0, 0, \tilde{v})^T$ ,  $\tilde{v}, a \in \mathbb{R}$ , где  $\tilde{u} \in \text{conv}\{u_1, u_2\}$  и  $u_1, u_2 \in X_2$  удовлетворяют (40). Поскольку  $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$ , сужение  $\Lambda$  оператора  $\hat{\Lambda} = \hat{\Phi}(\tilde{u})$  на одномерное подпространство  $X_2$  является обратимым оператором из  $X_2$  в  $Y_2$ , если  $q\varphi_1'(\tilde{v} - a) \neq -1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Действительно, при выполнении последнего условия из равенства  $\hat{\Lambda}u = 0$ ,  $u \in X_2$ , следует  $u = 0$ . Следовательно, для любых  $u_1, u_2 \in X_2$ , удовлетворяющих (40), функция (13) является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке  $\text{conv}\{u_1, u_2\} \subset X_2$ .

Представим проекцию  $F_1 f(t, x)$  ( $Q_1 f(t, x) = 0$ ) в виде (14):

$$K_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad F_1 f(t, x) = \psi_1(x) + g_1(t),$$

$$\psi_1(t, x) \equiv \psi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1) \\ -h(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(t) = \begin{pmatrix} r_2 I_1(t) \\ I_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем  $H_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}$ . Очевидно, что  $H_1 = H_1^* > 0$ ,

$$(H_1 Sx, A_{s1}^{-1} \psi_1(x)) = 2x_1 [\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] - x_2 h(x_2).$$

Найдем ограничение, при котором для любого конечного интервала  $0 \leq t \leq T$  найдется  $R_T > 0$  такое, что если  $\|Sx + P_1 x\| = \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$  и выполнено (37), (38), то  $(H_1 Sx, A_{s1}^{-1} \psi_1(x)) \leq 0$ . В этом случае выполняется условие (15) теоремы.

Обозначив  $M_T = \max_{t \in [0, T]} |I(t)|$ , учитывая (38), получим искомое ограничение:

$$\forall T \geq 0 \exists R_T > 0: 2[M_T |\varphi_1(x_3)| - x_3 \varphi_1(x_3) - q\varphi_1^2(x_3) - x_1 \varphi_3(x_1)] - x_2 h(x_2) \leq 0 \quad (41)$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^3$  таких, что  $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$  и выполнено (37), (38).

Итак, по теореме 1 для всякой начальной точки  $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющей системе уравнений (37), (38), существует единственное решение  $x(t)$  задачи Коши (7), (8) на полуоси  $t_0 \leq t < \infty$ , если:

1)  $L \neq C(r_2 + r_3)/g$ ;  $\varphi_1'(\tilde{v} - a) \neq -r_4$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) при любом  $\tilde{u} \in \text{conv}\{u_1, u_2\}$  и любых  $u_1, u_2 \in X_2$ , удовлетворяющих (40); выполнено условие (41) для всех  $x \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих (37), (38) и таких, что  $\sqrt{2x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$ ;

2)  $L = C(r_2 + r_3)/g$ ;  $\forall t \geq 0 \exists x_3 \in \mathbb{R}$ : 
$$x_3 + q\varphi_1(x_3) = I(t); \quad (42)$$

$\varphi_1'(\tilde{x}_3) \neq -r_4$  при любом  $\tilde{u} = (0, 0, \tilde{x}_3)^T \in \text{conv}\{u_1, u_2\}$  и любых  $u_1, u_2 \in X_2$ , удовлетворяющих (42);

$$\forall T \geq 0 \exists R_T > 0: (3r_2 x_1 - x_2)[\varphi_1(x_3) - \varphi_3(x_1)] + (r_2 x_1 - x_2)(r_2 + r_3)(r_2 g)^{-1} h(x_2) \leq 0$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющих (37), (42) и таких, что  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq R_T$ .

Рассмотрим частные случаи при  $L \neq C(r_2 + r_3)/g$ . Пусть

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2k-1}, \quad \varphi_3(y) = \alpha_2 y^{2j-1}, \quad h(y) = \alpha_3 y^{2r-1}, \quad k, j, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (43)$$

Заметим, что подобные нелинейные сопротивления и проводимости встречаются в реальных радиотехнических системах. Легко проверить, что для нелинейных функций вида (43) выполнены условия теоремы, как и для функций

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{\frac{1}{2k+1}}, \quad \varphi_3(y) = \alpha_2 y^{\frac{1}{2j+1}}, \quad h(y) = \alpha_3 y^{\frac{1}{2r+1}}, \quad k, j, r \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

## 7. Заключение

Доказана теорема о существовании и единственности глобального решения дифференциально-алгебраического уравнения с сингулярным характеристическим пучком операторов в случае, когда соответствующая система дифференциально-алгебраических уравнений переопределена.

Рассмотрена модель двухполюсного радиотехнического фильтра с нелинейными элементами. Исходя из условий исследуемой задачи (см. п. 6), модель электрической цепи двухполюсника описывается переопределенной системой дифференциально-алгебраических уравнений. Найдены ограничения, при выполнении которых полученная система уравнений глобально разрешима. Приведены частные случаи с нелинейными функциями, которые не являются глобально липшицевыми и удовлетворяют условиям теоремы. Анализ задачи показывает, что требования теоремы физически обеспечиваемы и практическая проверка ее условий является достаточно эффективной в реальных практических приложениях.

Для определенных классов нелинейных радиотехнических систем установлено, что теорема гарантирует существование и единственность глобальных решений соответствующих уравнений динамики.

**Литература:** 1. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 273 с. 2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с. 3. *Руткас А. Г.* Разрешимость полулинейных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Украинский математический журнал. 2008. Т. 60, № 2. С. 225-239. 4. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения  $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$  // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996-2010. 5. *Руткас А. Г., Филипковская М. С.* Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2013. № 1 (111). С. 135-145. 6. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 822 с. 7. *Филипковская М. С.*

Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2012. № 1015, Вип. 19. С. 306-319. 8. *Ляпунов Ж.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.

Поступила в редколлегию 10.03.2014

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Руткас А.Г.

**Филипковская Мария Сергеевна**, аспирантка кафедры математического моделирования и программного обеспечения ХНУ им. В. Н. Каразина. Научные интересы: дифференциально-алгебраические и дифференциально-операторные уравнения, спектральная теория операторов, математическое моделирование. Адрес: Украина, 61121, Харьков, тел.: +380 097 7179551, e-mail: [fmarias@mail.ru](mailto:fmarias@mail.ru).



УДК 629.783:527.6

**ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ПРИРОДЕ  
ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

*РЫБИН В.В.*

Рассматривается электромагнитная природа гравитационного взаимодействия на примере системы, состоящей из двух электронов. Электрон в первом приближении представляется объемным вихрем с однонаправленным вращением электромагнитной массы внутри ограниченного объема. Стабилизация массы и размера такого вихря происходит за счет внутренней энергии электрона, которая пополняется посредством энергообмена с внешней средой. Процесс стабилизации сопровождается пульсацией массы (объема) и излучением электромагнитной энергии в радиальных направлениях. Далее электрон рассматривается как элементарный изотропный сферический излучатель. Отмечается целесообразность проведения экспериментальной проверки предложенной гипотезы.

**1. Введение**

Об актуальности поднимаемой темы свидетельствует тот факт, что многие выдающиеся физики ставили вопросы о связи гравитационных и электромагнитных явлений. В частности, Ричард Фейнман в популярных лекциях [1] писал: "До сих пор никому не удалось представить тяготение и электричество как два разных проявления одной и той же сущности ...". До сих пор проблема единой теории поля не решена. В данной работе сделана попытка построения физической модели явления гравитации, исходя из предположения об электромагнитной природе гравитационного взаимодействия элементарных электрических частиц.

*Цель работы* состоит в выявлении электромагнитной природы гравитационного взаимодействия и представлении тяготения и электричества одной и той же сущностью на примере системы, состоящей из двух взаимодействующих электронов.

Сила гравитационного взаимодействия двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  описывается зависимостью [1]:

$$F_H = k\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2},$$

где  $[k] = \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} = 10^{-3} \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  - коэффициент размерности;  $R$  - расстояние между тяготеющими массами;  $\gamma = 6.67259 \cdot 10^{-8}$  - безразмерный коэффициент, характеризующий интенсивность взаимодействия тяготеющих масс.

**2. Электромагнитная природа гравитационного взаимодействия**

Электрон, порожденный турбулентностью движения непрерывной электромагнитной материи (ЭММ), в первом приближении представляется объемным вихрем с однонаправленным вращением ЭММ внутри ограниченного объема. Стабилизация массы и размера такого вихревого образования происходит за счет внутренней энергии электрона, которая пополняется посредством энергетического обмена с окружающей ЭММ. Процесс стабилизации сопровождается пульсацией массы (объема) и излучением электромагнитной энергии в радиальных направлениях. Далее неподвижный электрон рассматривается как элементарный изотропный сферический излучатель.

Энергия излучения каждого из статически взаимодействующих электронов за секунду определяется в соответствии с гипотезой Планка выражением:

$$E_{\text{изл.}} = k_1 \cdot h \cdot f_n = m_e c^2, \quad (1)$$

где  $h = 6.6260755 \cdot 10^{-27}$  - постоянная Планка,

$$[k_1] = \text{см}^2 \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-1} = 10^{-7} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1},$$

$f_n$  - частота пульсаций массы электрона,  $\text{с}^{-1}$ ;  $m_e$  - масса электрона;  $c$  - скорость распространения непрерывной части ЭММ.

Из (1) следует, что частота пульсаций (излучений) и соответствующая ей длина волны пульсаций  $\lambda_n$  определяются следующим образом:

$$f_n = \frac{m_e c^2}{h} \cong 1.23559 \cdot 10^{20} \text{с}^{-1},$$

$$\left( \lambda_n = \frac{h}{m_e c} = \frac{c}{f_n} \cong 2.42631 \cdot 10^{-10} \text{см} \right). \quad (2)$$

Излучаемая электроном энергия воздействия на другой электрон определяется как

$$E_{\text{вз.1}} = \frac{m_e c^2}{4\pi \cdot R^2}, \text{ при } R = 1 \text{ см } E_{\text{вз.1}} \cong \frac{m_e c^2}{4\pi}. \quad (3)$$

Представим электрон в виде системы автоматического регулирования (стабилизации) его параметров - массы, объема и, в соответствии с выражением (1), его частоты пульсаций. В высокоточной системе авторегулирования запаздывание стабилизирующего воздействия  $t_{\text{зап.}}$  как отклика на возникающее отклонение стабилизируемого параметра должно быть меньше характерного времени нестационарности - в рассматриваемом случае периода пульсаций с указанной частотой  $f_n$ . Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось условие:  $t_{\text{зап.}} \cdot f_n \ll 1$ .

Учитывая, что запаздывание определяется размером электрона (обозначим некий эффективный диаметр электрона  $d_{эф.е}$ ) и длина волны пульсаций связана с их периодом соотношением  $T_{п} = \lambda_{п} / c$ , получаем  $t_{зап.} / T_{п} = d_{эф.е} / \lambda_{п} \ll 1$ .

По аналогии с выражением для полной мощности, излучаемой диполем Герца, примем, что для величины массы излучаемой ЭММ допустимо выражение:

$$M_{изл.} = m_e \frac{\pi}{3} \left( \frac{d_{эф.е}}{\lambda_{п}} \right)^2.$$

В системе, состоящей из двух электронов, расположенных на расстоянии  $R = 1$  см и обменивающихся массами, "излученная" масса одного из электронов в области локализации другого равна

$$M'_{изл.} = \frac{M_{изл.}}{4\pi R^2} = \frac{M_{изл.}}{4\pi}.$$

Далее, поскольку  $M'_{изл.} = 0.5 \cdot (d_{эф.е} / \lambda_{п})^2 \cdot m_e / 6$ , масса ЭММ, излучаемой двумя электронами и обеспечивающей взаимодействие, равна  $M = 2M'_{изл.} = (d_{эф.е} / \lambda_{п})^2 \cdot m_e / 6$ . Поскольку коэффициенты  $(d_{эф.е} / \lambda_{п})^2 / 6$  и  $\gamma$  в законе всемирного тяготения характеризуют интенсивность взаимодействия, то можно предположить следующее равенство:

$$\gamma = \frac{1}{6} \left( \frac{d_{эф.е}}{\lambda_{п}} \right)^2. \quad (4)$$

Тогда  $M'_{изл.} = 0.5 \cdot \gamma m_e$ , что подтверждается и законом всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения запишем следующим образом (положив  $R = 1$  см):

$$F_H = k \frac{\gamma}{2} \cdot m_{e1} \cdot m_{e2} + k \frac{\gamma}{2} \cdot m_{e2} \cdot m_{e1}, \quad (5)$$

где  $m_{e1} = m_{e2} = m_e$  – массы гравитирующих электронов.

Из (5) можно предположить, что гравитационное воздействие каждого из электронов друг на друга происходит за счет "излучения" массы, равной  $0.5\gamma \cdot m_e$ . Суммарная же масса, расходуемая на осуществление взаимодействия  $m_{сум.} = \gamma \cdot m_e$ , характеризуется энергией  $E_{вз.} = m_e c^2 / 2\pi$  в соответствии с (3). Тогда имеем:

$$\gamma \cdot m_e \cdot v_{гр.}^2 = \frac{1}{2\pi} m_e c^2,$$

отсюда можно найти величину скорости квантов гравитационного поля, распространяющихся в радиальных направлениях от электрона:

$$v_{гр.} = c / \sqrt{2\pi\gamma} \cong 4.63 \cdot 10^{11} \text{ м/с}. \quad (6)$$

Энергия, излучаемая первым электроном с эквивалентной массой  $0.5 \cdot \gamma m_e$ , воздействует на второй электрон. Используя концепцию диполя Герца, можно записать для воспринимаемой вторым электроном массы ЭММ  $M'$ :

$$(0.5 \cdot \gamma m_e) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{6} \left( \frac{d_{эф.е}}{\lambda_{гр.}} \right)^2, \quad (7)$$

где  $\lambda_{гр.} = v_{гр.} / f_{п} = \lambda_{п} (v_{гр.} / c)$  – длина волны гравитационного излучения.

С учетом последнего выражение (7) можно записать в виде:

$$M' = (0.5 \cdot \gamma m_e) \cdot \frac{\gamma \cdot c^2}{2 v_{гр.}^2} = \frac{\pi \cdot \gamma^3}{2} \cdot m_e, \quad (7')$$

В течение 1 с электрон излучает кванты ЭММ с массой, равной  $4\pi \cdot (\gamma/2) \cdot m_e$ . По аналогии: масса, воспринимаемая вторым электроном, равная  $0.5 \cdot \pi \cdot \gamma^3 m_e$ , "излучает" по направлению воздействующей массы кванты ЭММ с массой, равной

$$M = 2\pi\gamma \cdot \frac{\pi \cdot \gamma^3}{2} \cdot m_e.$$

Полная энергия этой излученной массы, распространяющейся со скоростью гравитационного взаимодействия, равна  $E = M \cdot v_{гр.}^2$  или, расписывая:

$$E = 2\pi\gamma \cdot \frac{\pi \cdot \gamma^3}{2} \cdot m_e \cdot \frac{c^2}{2\pi\gamma} = \frac{\pi \cdot \gamma^3}{2} m_e c^2.$$

Воспользуемся полученным результатом для выяснения величины энергии электростатического взаимодействия электронов, используя известное соотношение силового взаимодействия электронов электростатического и гравитационного:

$$\frac{F_K}{F_H} \cong 4.16688 \cdot 10^{42}.$$

Электрон излучает в 1 с кванты с массой, равной  $2\pi\gamma \cdot m_e$ , и эквивалентной энергией, равной  $m_e c^2$ . Поскольку масса электрона больше массы квантов излучения в  $(2\pi\gamma)^{-1}$  раз, то его энергия, очевидно, во столько же раз больше величины  $m_e c^2$ , внутреннюю энергию электрона можно оценить из выражения:

$$E_{\text{вн.}} = \frac{m_e c^2}{2\pi\gamma} = m_e v^2 \approx 2.3852 \cdot 10^6 \cdot m_e c^2$$

Примем энергию электростатического воздействия одного электрона на другой равной

$$E = k_1 \cdot m_e c^2,$$

где  $k_1$  – безразмерный коэффициент.

Тогда, поскольку в соответствии с (7) первый и второй электроны для силового воздействия используют массу величиной  $M'$ , можно записать:

$$\frac{k_1 \cdot m_e c^2}{M' c^2} = \frac{2k_1}{\pi\gamma^3} = \sqrt{\frac{F_K}{F_H}}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что  $k_1 = 0.952596$ , тогда  $E \cong 0.952596 \cdot m_e c^2$ .

Взаимная потенциальная энергия системы, состоящей из двух электронов при расстоянии между их центрами, равном  $R = d_{\text{эф.е}}$ , определяется выражением [2]:

$$E_{\text{п.}} = F_K d_{\text{эф.е}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d_{\text{эф.е}}}.$$

С другой стороны,  $E_{\text{п.}} = 2 \cdot E$ , тогда имеем

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d_{\text{эф.е}}} \approx 2 \cdot 0.952596 \cdot m_e c^2.$$

Отсюда получаем

$$d_{\text{эф.е}} = 1.4795 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad r_{\text{эф.е}} = d_{\text{эф.е}} / 2 \approx 0.739775 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Определенное из выражения  $\gamma = (d_{\text{эф.е}} / \lambda_{\text{п}})^2 / 6$  значение эффективного диаметра  $d_{\text{эф.е}} = 1.5352 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  близко полученному выше, что указывает на физическую допустимость полученных результатов.

Далее, баланс энергии электрона осуществляется в течение периода пульсаций со скоростью "света". Объемная плотность окружающей электромагнитной среды должна быть не менее:

$$\rho_{\text{всп.}} = \frac{m_{\text{кв.}}}{v} \cong 5.1645468 \cdot 10^{-26} \text{ г/см}^3,$$

где  $m_{\text{кв.}} = 4\pi \cdot \gamma m_e / (2f_{\text{п}}) \cong 3.09 \cdot 10^{-54} \text{ г}$  – масса кванта;  $v = (4/3) \cdot \pi \lambda_{\text{п}}^3 \cong 5.9831 \cdot 10^{-29} \text{ см}^3$  – объем.

Можно предположить, что фотоны, диаметр которых  $d_{\text{фот.}} = \lambda_{\text{гр.}} / \pi$ , возможно, способны осуществлять резонансное взаимодействие с квантами гравитационного поля. Здесь мы уподобляем фотоны сферическим отражателям [3].

В связи с важностью рассматриваемой научной и мировоззренческой проблемы целесообразно провести экспериментальную проверку предложенной в статье гипотезы. Эксперимент мог бы содержать такие пункты: 1) имитация массы путем генерации излучения с частотой  $f_{\text{гр.}} = 1.23559 \cdot 10^{20} \text{ Гц}$ ; 2) измерение скорости распространения ЭММ в диапазоне частот  $10^{13} \dots 1.5 \cdot 10^{20} \text{ Гц}$ ; 3) измерение затухания гравитационного поля в различных материалах; 4) проверка ослабления гравитационного поля потоком фотонов (с эквивалентными диаметрами  $d_{\text{фот.}} = \lambda_{\text{гр.}} / \pi \cong 1.1928 \cdot 10^{-7} \text{ см}$ ) с частотой следования  $f_{\text{сл.ф.}} > 10^{14} \text{ Гц}$ .

### 3. Выводы

Гравитационное взаимодействие имеет электромагнитную природу, из чего можно предположить, что скорость распространения квантов гравитационного поля превышает скорость света.

Тяготение и электромагнитные взаимодействия суть два разных проявления одной и той же сущности, что, в частности, подтверждает близость вычисленных значений эффективного радиуса, полученных на основании дипольной концепции и электростатического взаимодействия.

Высокая проникаемость квантов гравитационного поля объясняется высокой скоростью распространения квантов  $v_{\text{гр.}} / c \gg 1$ : процессы в "препятствиях" происходят со скоростью, не превышающей скорость света.

Выражаю благодарность доц. Сороке А.С. за обсуждение материалов статьи и помощь в ее подготовке.

**Литература:** 1. Фейнман Р. Характер физических законов / М.: Наука, 1987. 168 с. 2. Савельев И. В. Курс общей физики. Уч. пос. Т.2 / М.: Наука, 1968. 455 с. 3. Финкельштейн М. И. Основы радиолокации / М.: Сов. радио, 1973. 496 с.

Поступила в редколлегию 11.03.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Хажмурадов М.А.

**Рыбин Виктор Вячеславович**, инженер. Научные интересы: теоретическая и практическая радиолокация, теоретическая физика. Адрес: Украина, 61204, Харьков, пр. Победы, 72, кв. 299. тел. (057)-336-21-72.



УДК 624.396.2

**АВТОМАТИЗАЦИЯ  
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА  
ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ  
ПЛАНИРОВАНИИ СЕТЕЙ МОБИЛЬНОЙ  
СВЯЗИ**

*ЧЕБОТАРЁВА Д.В., БЕЗРУК В.М.*

Рассматриваются методы многокритериальной оптимизации, которые могут быть использованы при планировании сетей мобильной связи. Описываются практические аспекты выбора оптимальных проектных решений с использованием созданного программного средства для выбора оптимального варианта с учетом совокупности показателей качества.

**Введение**

В процессе планирования сети мобильной связи (СМС) необходимо учитывать противоречивые технико-экономические требования оператора. Для этого используется совокупность показателей качества, что определяет необходимость применения методов многокритериальной оптимизации при выборе оптимальных проектных решений. Многокритериальный подход в проектировании систем достаточно развит в различных технических отраслях. Однако в существующих методах и программных средствах планирование СМС не рассматривается как задача многокритериальной оптимизации [1-3]. Это определяет актуальность исследования таких вопросов. Кроме того, актуальной задачей является также автоматизация проектирования, включающая создание программных средств для реализации методов многокритериального выбора оптимальных проектных вариантов СМС. При этом удовлетворяются требования сокращения сроков и затрат на планирование СМС.

В данной статье приведены некоторые результаты исследования особенностей решения задач многокритериальной оптимизации проектных решений при планировании СМС. Рассмотрены практические аспекты выбора оптимальных проектных решений с использованием созданного программного средства.

**1. Методы выбора оптимальных проектных вариантов с учетом совокупности показателей качества**

Часто вследствие плохих исходных представлений об оптимальности проектных вариантов невозможно в формализованном виде установить скалярный

критерий оптимальности для выбора единственного проектного решения  $\phi^{(o)}$ . Поэтому на начальных этапах планирования ценность проектных вариантов характеризуют не одним, а совокупностью показателей качества и связанной с ними векторной целевой функцией

$$\vec{k}(\phi) = (k_1(\phi), k_2(\phi), \dots, k_m(\phi)). \quad (1)$$

Показатели качества системы могут быть трёх типов: нейтральные, согласованные между собой и конкурирующие между собой (антагонистические). В первых двух случаях оптимизация сети может быть выполнена отдельно по каждому показателю качества. В третьем случае достижение потенциально возможного значения каждого показателя качества в отдельности может оказаться невозможным. При этом может быть достигнут лишь согласованный оптимум противоречивых между собой целевых функций (оптимум по критерию Парето). Такой оптимум подразумевает, что достигается потенциально возможное значение каждого показателя качества в отдельности без ухудшения других показателей качества сети. При этом дальнейшее улучшение показателей качества может быть достигнуто только за счёт ухудшения других показателей качества. Согласованному оптимуму значений показателей качества соответствуют недоминируемые по критерию Парето варианты системы.

Наиболее популярным является метод дискретного выбора подмножества Парето, при котором формализованная процедура получения подмножества Парето-оптимальных проектных вариантов в критериальном пространстве  $V = \vec{k}(\Phi_a)$  определяется путем дискретного перебора и сравнения вариантов согласно соотношению [4]

$$P(V) = (\vec{k}(\phi^o) \in V | \forall \vec{k}(\phi): \vec{k}(\phi) \geq \vec{k}(\phi^o)). \quad (2)$$

Отсюда следует, что подмножество Парето-оптимальных проектных вариантов включает недоминируемые варианты, для которых отсутствуют варианты, предпочтительные по бинарному отношению нестрогого предпочтения – безусловному критерию Парето.

Выбор подмножества Парето-оптимальных проектных вариантов с учетом совокупности показателей качества – это задача многокритериальной (векторной) оптимизации. Как правило, найденное в результате решения подмножество Парето содержит не один вариант, а некоторое множество несравнимых между собой оптимальных проектных вариантов.

Потенциально возможные значения показателей качества, соответствующие согласованному оптимуму по Парето, представляют собой многомерные потенциальные характеристики проектируемой системы. В критериальном пространстве показателей качества совокупность Парето-оптимальных значений представляет собой Парето-оптимальную поверхность и связанные с ней многомерные диаграммы обмена выбранных показателей качества системы.

Нахождение оптимальных по критерию Парето проектных вариантов системы может осуществляться либо непосредственно согласно (2) на множестве допустимых вариантов  $\Phi_d$ , либо с использованием специальных методов, например, весового метода, метода рабочих характеристик, метода последовательных уступок [4,5].

Формальная модель задачи Парето-оптимизации не содержит информации для выбора единственного варианта. Множество допустимых проектных вариантов сужается лишь к подмножеству Парето-оптимальных решений путем исключения безусловно худших вариантов по безусловному критерию предпочтения – критерию оптимальности Парето.

В принципе каждый вариант из подмножества Парето-оптимальных проектных вариантов может быть выбран для дальнейших этапов проектирования системы, поскольку они являются несравнимыми по безусловному критерию Парето. Если для последующих этапов проектирования и реализации должен быть выбран только один вариант системы, возникает необходимость сужения подмножества Парето-оптимальных решений до единственного проектного варианта. Для этого должна быть использована некоторая дополнительная информация о предпочтениях заказчика системы. Эта информация становится доступной после всестороннего анализа Парето-оптимальных проектных вариантов, в частности, структуры и параметров системы, рабочих характеристик полученных вариантов системы, относительной важности показателей качества. Полученная дополнительная информация используется для формирования условного критерия предпочтения в виде скалярной целевой функции, оптимизация которой приводит к выбору из подмножества Парето единственного проектного варианта системы.

Выбор единственного проектного варианта из подмножества Парето может быть выполнен с помощью любого из существующих методов, основанных на скалярной функции ценности, на теории

размытых множеств, на лексикографических отношениях [4,5]. В основу разработанного программного средства лег метод выбора единственного проектного варианта из подмножества Парето с использованием скалярной функции ценности. Это один из наиболее часто используемых методов сужения подмножества Парето-оптимальных решений до единственного проектного варианта. Он основан на формировании скалярной функции ценности  $F(k_1, \dots, k_m)$   $m$  переменных. Выбирается такая функция, значениям которой соответствует бинарное отношение  $\succ$  в случае, если для произвольных оценок  $\bar{k}', \bar{k}'' \in V$  неравенство  $F(\bar{k}') > F(\bar{k}'')$  выполняется тогда и только тогда, когда выполняется бинарное отношение  $\bar{k}' \succ \bar{k}''$ . Функция ценности может иметь вид

$$F(k_1, \dots, k_m) = \sum_{j=1}^m c_j f_j(k_j), \quad (3)$$

где  $c_j$  коэффициенты, определяющие относительную важность соответствующих показателей качества,  $f_j(k_j)$  одномерные функции ценности, которые являются оценками ценности варианта системы  $\phi$  с точки зрения показателя качества  $k_j(\phi)$ .

## 2. Результаты исследования методов многокритериального выбора при планировании СМС

Процесс выбора оптимальных проектных вариантов при планировании радиосети СМС с учетом совокупности показателей качества выполняется в несколько этапов:

- задание набора исходных данных для допустимых проектных вариантов СМС, включающих: радиостандарт, занимаемую полосу частот, число активных абонентов, площадь покрытия, секторизацию и высоту антенн, мощности передатчиков базовых станций, параметры затухания радиоволн;
- определение множества допустимых проектных вариантов с учетом ограничений на структуру и параметры СМС;
- задание показателей качества СМС и вычисление их значений для допустимых проектных вариантов;
- выбор подмножества Парето-оптимальных проектных вариантов СМС в критериальном пространстве оценок значений показателей качества;
- анализ полученных Парето-оптимальных проектных вариантов, многомерных потенциальных ха-

рактических и многомерных диаграмм обмена показателей качества СМС;

– формирование условного критерия предпочтения с привлечением полученной дополнительной информации и выбор единственного проектного варианта СМС.

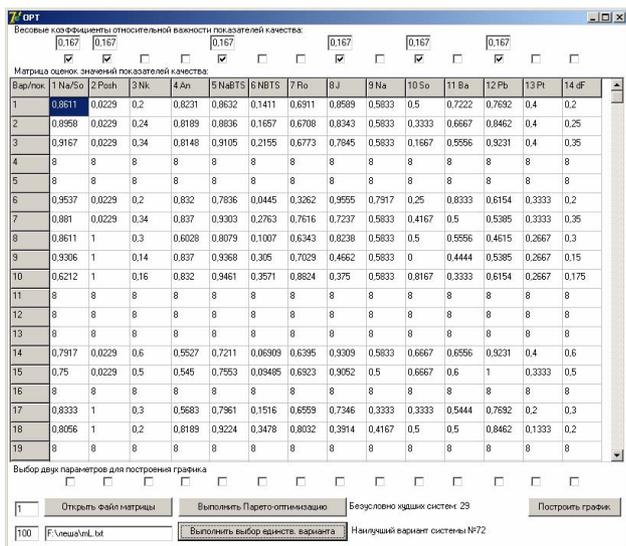
Указанные процедуры реализованы в виде специального программного комплекса, состоящего из двух частей [5].

Первая часть программного комплекса реализована в среде MathCad. Она решает следующие задачи: задание исходных данных для всех допустимых вариантов сетей, расчет основных параметров СМС, нормирование и приведение данных к стандартному виду, составление таблицы оценок совокупности показателей качества для допустимого множества вариантов СМС.

Результаты всех расчетов программа транспортирует в текстовый файл «mL.txt», который используется второй частью программного комплекса.

Вторая часть программного комплекса реализована в среде Delphi. Она производит выбор подмножества Парето-оптимальных вариантов СМС в критериальном пространстве и сужение множества Парето до единственного варианта построения сети.

На рисунке для иллюстрации представлена часть интерфейса программы выбора оптимальных проектных вариантов сотовых сетей мобильной связи с учетом совокупности показателей качества.



Интерфейс программы многокритериального выбора оптимальных проектных вариантов СМС

С помощью этой программы можно решить следующие задачи: открыть текстовый файл mL.txt для получения таблицы рассчитанных значений показателей качества, приведенных к стандартному

виду, выбрать необходимые для оптимизации показатели качества, выполнить Парето-оптимизацию, задать весовые коэффициенты относительной важности показателей качества, выполнить выбор единственного варианта СМС, построить диаграммы обмена для выбранных показателей качества.

Созданный программный комплекс выбора оптимальных проектных вариантов СМС с учетом совокупности показателей качества был использован для решения задачи оптимизации СМС на номинальном этапе планирования радиосети стандарта GSM [5].

В первой части программы было сформировано множество из 100 допустимых вариантов СМС, отличающихся разными исходными данными: планируемым количеством абонентов в сети, размером площади покрытия, активностью абонентов в час наибольшей нагрузки, занимаемой полосой частот, размерами кластеров; возможной вероятностью блокировки вызовов и процентом времени ухудшения качества связи. Были найдены оценки значений всех возможных показателей качества, выполнено их нормирование и приведение к сопоставимому виду. Множество вариантов было представлено в критериальном пространстве оценок введенных показателей качества. Перечень всех параметров СМС, которые могут быть использованы как показатели качества, представлен в табл. 1. При исследованиях применялись разные наборы показателей качества из указанного перечня. В частности, при решении одной из задач оптимизации СМС были выбраны следующие показатели качества:  $k_1, k_2, k_5, k_8, k_{10}, k_{12}$ .

С помощью второй части программы по критерию Парето (2) было выделено подмножество, включающее 71 вариант сети, т.е. исключено из рассмотрения 29 безусловно худших вариантов. Из условия минимума условного критерия предпочтения (3) из подмножества Парето выбран единственный вариант (№ 72). Он характеризуется следующими данными: количество абонентов - 30000; площадь обслуживания - 320 км<sup>2</sup>; активность абонентов - 0,025 Эрл; занимаемая полоса частот - 4 МГц; возможная вероятность блокировки вызова - 0,01; процент времени ухудшения качества связи - 0,07; плотность обслуживания - 94 активных абонентов на км<sup>2</sup>; размер кластера - 7 сот; количество базовых станций в сети - 133; количество абонентов, обслуживаемых одной базовой станцией - 226; телефонная нагрузка - 3,326 Эрл; вероятность ошибки -  $5,277 \cdot 10^{-7}$ .

Таблица 1

Параметры СМС	Показатели качества
$N_a / S_0$ - плотность обслуживаемых абонентов	$k_1$
$P_{\text{ош}}$ - допустимая вероятность ошибки	$k_2$
$N_k$ - общее количество частотных каналов в сети	$k_3$
$A$ - допустимая телефонная нагрузка	$k_4$
$N_{\text{a BTS}}$ - число абонентов, обслуживаемых одной BTS	$k_5$
$N_{\text{BTS}}$ - необходимое количество базовых станций	$k_6$
$R$ - радиус соты	$k_7$
$\gamma$ - эффективность использования радиочастотного спектра	$k_8$
$N_a$ - число обслуживаемых абонентов	$k_9$
$S_0$ - площадь обслуживаемой территории	$k_{10}$
$\beta$ - активность одного абонента в час наибольшей нагрузки	$k_{11}$
$P_{\text{бл}}$ - допустимая вероятность блокирования вызова	$k_{12}$
$P_t$ - процент времени, в течение которого допускается, чтобы отношение сигнал/помеха на входе приемника мобильной станции было меньше защитного отношения	$k_{13}$
$\Delta F_C$ - полоса частот базовых станций на передачу	$k_{14}$

Кроме того, с помощью разработанного программного комплекса исследованы результаты многокритериальной оптимизации СМС для разных наборов показателей качества. Эти результаты приведены в табл. 2, в которой указаны количество и тип показателей качества, а также соответствующее им число безусловно худших и Парето-оптимальных вариантов из рассматриваемых 100 допустимых вариантов СМС.

Таблица 2

Количество показателей качества	Совокупность показателей качества	Число безусловно худших вариантов	Число Парето-оптимальных вариантов
5	$k_1, k_2, k_5, k_8, k_{12}$	52	48
5	$k_4, k_6, k_7, k_9, k_{14}$	64	36
3	$k_4, k_5, k_{11}$	84	16
3	$k_6, k_9, k_{12}$	86	14
3	$k_4, k_{10}, k_{14}$	87	13
2	$k_4, k_8$	90	10
2	$k_2, k_{12}$	96	4
2	$k_1, k_8$	96	4
2	$k_4, k_5$	97	3

По результатам исследований сделан следующий вывод. Чем меньше заданное количество показателей качества, с учетом которых проводится оптимизация сетей, тем больше число безусловно худших вариантов и, соответственно, меньше число Парето-оптимальных вариантов СМС.

Были проведены также исследования многокритериального выбора единственного варианта из подмножества Парето с использованием условного критерия предпочтения (3) при различных значениях весовых коэффициентов относительной важности показателей качества (табл. 3).

Таблица 3

№ опы-та	Показатели качества						Номер лучшего варианта
	$k_1$	$k_2$	$k_5$	$k_8$	$k_{10}$	$k_{12}$	
1	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	№ 72
2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,3	№ 82
3	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2	№ 72
4	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5	0,1	№ 59
5	0,1	0,1	0,5	0,1	0,1	0,1	№ 63
6	0,2	0,3	0,05	0,05	0,2	0,2	№ 82
7	0,1	0,25	0,25	0,1	0,1	0,2	№ 47

Из табл. 3 видно, что большое влияние на результат оптимизации оказывает выбор весовых коэффициентов относительной важности показателей качества. При одной и той же совокупности показателей качества, но различных значениях весовых коэффициентов, выбираемый разный единственный вариант.

Значения весовых коэффициентов относительной важности показателей качества задаются с использованием дополнительной субъективной информации от экспертов с применением специальных методов: метода экспертного оценивания, метода Саати. [5].

### Выводы

Методы многокритериального выбора оптимальных проектных решений реализованы в созданном программном комплексе, который может быть использован для автоматизации проектирования СМС на этапе номинального планирования радиосети.

С помощью разработанного программного комплекса исследованы особенности решения многокритериальной задачи оптимизации на этапе номинального планирования сетей мобильной связи.

**Литература:** 1. *Mishra A.R.* Advanced Cellular Network Planning and Optimisation. 2G/2.5G/3G Evolution TO 4G. /Edited by Ajay R. Mishra. UK: John Wiley & Sons Ltd, 2007. 542 p. 2. *Granat J., Wierzbicki A.P.* Multicriteria analysis in telecommunications // Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on System Sciences. 2004. P. 1-6. 3.

UMTS Radio Network Planning, Optimization and QoS Management. For Practical Engineering Tasks / Edited by J. Lempinen and M. Manninen. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. 343 p. **4. Ногин, В.Д.** Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 176с. **5. Чеботарёва Д.В., Безрук В.М.** Многокритериальная оптимизация проектных решений при планировании сотовых сетей мобильной связи. Х.: Компания СМИТ, 2013. 148с.

Поступила в редколлегию 10.03.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Баранник В.В.

**Чеботарёва Дарья Васильевна**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Сети связи» ХНУРЕ. Научные интересы: планирование и проектирование сетей мобильной связи, многокритериальная оптимизация сетей связи. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14. E-mail: [dasha-che@ukr.net](mailto:dasha-che@ukr.net). Контактный телефон: +380-57-702-14-29.

**Безрук Валерий Михайлович**, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Сети связи» ХНУРЕ. Научные интересы: статистические методы обработки и распознавания сигналов, автоматизация проектирования сетей связи, многокритериальная оптимизация сложных технических систем, математическое моделирование и оптимизация сетей связи. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14. E-mail: [bezruk@kture.kharkov.ua](mailto:bezruk@kture.kharkov.ua). Контактный телефон: +380-67-722-31-18.



УДК 517.9:532.5

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ, УСЛОЖНЕННЫХ МАССООБМЕНОМ (ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ)

КОЛОСОВА С.В., ЛАМТЮГОВА С.Н.,

СИДОРОВ М.В.

Рассматривается применение методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина к расчету задач внешнего обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью, усложненных массообменом.

### 1. Введение

*Актуальность исследования.* Задачи расчета вязких течений, усложненных массообменом, применяются в теплоэнергетике, химической и пищевой технологиях, гео- и астрофизических исследованиях, охране окружающей среды. Так, многие процессы химической технологии связаны с движением жидкости в технологическом оборудовании. При подготовке реагентов и выделении продуктов реакции такие операции, как выщелачивание, абсорбция, экстракция и перегонка, играют важную роль. Законы гидродинамики, тепло- и массопередачи существенны для всего технологического процесса. Процессы тепло- и массообмена также являются одними из основных в энергетике, а также в целом ряде технологических процессов металлургической и других отраслей промышленности. Кроме того, задачи массообмена тел с равномерным вязким потоком лежат в основе расчета многих технологических процессов, связанных с растворением, экстракцией, испарением, осаждением коллоидов [1].

В общем случае задача о стационарном массообмене тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения гидродинамического обтекания поверхности и уравнения для концентрации с соответствующими краевыми условиями на поверхности тела и вдали от него. Точно учесть геометрию области, а также краевые условия (в том числе и условие на бесконечности) можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2].

Метод R-функций в задачах гидродинамики использовался в работах [3–8], но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [3] или же вязкой в ограниченных областях [4–7], или при наличии винтовой симметрии [8].

Метод R-функций для задач внешнего обтекания тел вязкой жидкостью использовался в работах [9,10], но задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью, усложненные массообменом, с исполь-

зованием метода R-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования и численного анализа внешних стационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости с учетом массообмена методом R-функций является актуальной научной проблемой.

Эта работа опирается на метод R-функций акад. В.Л. Рвачева [2] и его применение к расчету стационарных течений жидкости в бесконечных односвязных областях сложной геометрии [11].

*Цели и задачи исследования.* Целью данного исследования является разработка нового метода численного анализа задачи массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком. Этот метод основан на совместном применении метода последовательных приближений, структурного метода R-функций и проекционного метода Галеркина. В данной работе не обсуждается степень строгости, условия применимости использованных уравнений движения жидкости, они рассматриваются как математические модели, подлежащие численной алгоритмизации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- на основании методов теории R-функций построить полную структуру решения нелинейной краевой задачи для функции тока;
- заменить исходную нелинейную задачу последовательностью линейных краевых задач;
- для решения линейных задач на каждом шаге итерационного процесса разработать численный алгоритм на основании метода Галеркина;
- на основании методов теории R-функций построить полную структуру решения линейной краевой задачи для концентрации;
- для решения линейной задачи для концентрации разработать численный алгоритм на основании метода Галеркина.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим массообмен тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости. Считаем, что в пространстве введена декартова система координат  $(x, y, z)$ , а обтекаемое тело образовано вращением вокруг оси  $Oz$  фигуры  $\Omega$ , лежащей в плоскости  $Oxz$  (фигура  $\Omega$  односвязная, конечная и симметричная относительно оси  $Oz$ ). Кроме того, предположим, что поток жидкости равномерный, его скорость равна  $U_\infty$  вдали от тела и он сонаправлен с осью  $Ox$ . Такие течения удобно рассматривать в сферической системе координат. В осесимметричных задачах в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  все величины не зависят от координаты  $\varphi$  и третья компонента скорости жидкости равна нулю:  $v_\varphi = 0$ . Тогда остальные две

компоненты скорости жидкости можно представить в виде [1, 12]

$$v_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (1)$$

где  $\psi = \psi(r, \theta)$  – функция тока.

Процесс массопереноса описывается уравнением для концентрации [1]

$$\Delta c = \text{Pe}(\bar{v} \cdot \nabla)c, \quad (2)$$

здесь  $c = c(r, \theta)$  – концентрация;  $\text{Pe}$  – число Пекле – безразмерный параметр, характеризующий меру отношения конвективного переноса растворенного в жидкости вещества к диффузионному переносу,

$$\Delta c = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right),$$

$$(\bar{v} \cdot \nabla)c = v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta}.$$

Подставив (1) в (2), для концентрации  $c = c(r, \theta)$  получим следующую задачу:

$$\Delta c = \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \text{вне } \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$c|_{\partial \Omega} = c_0, \quad (4)$$

$$c \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где  $c_0$  – заданная концентрация на границе  $\partial \Omega$  обтекаемого тела.

Функцию тока  $\psi(r, \theta)$  можно найти, например, как решение следующей нелинейной задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью [13]:

$$v E^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial E \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E \psi}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) E \psi \text{вне } \bar{\Omega}, \quad (6)$$

$$\psi|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial \Omega} = 0, \quad (7)$$

$$\psi \sim \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2 \theta \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где  $E \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$ ,  $E^2 \psi = E(E \psi)$ ,

$\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial \Omega$  нормаль;  $v = \text{Re}^{-1}$ ;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса.

Итак, решение задачи (3) – (5) состоит из двух этапов:

1) нахождение функции тока как решения задачи (6) – (8);

2) решение задачи (3) – (5) для концентрации.

Для решения поставленных задач воспользуемся методом R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2]: с помощью конструктивных средств теории R-функций построим структуры решения краевых задач, т.е. пучки функций, точно удовлетворяющих краевым условиям.

### 3. Метод решения задачи для функции тока

Пусть вне  $\bar{\Omega}$  известна достаточно гладкая функция  $\omega(r, \theta)$ , обладающая следующими свойствами:

1)  $\omega(r, \theta) > 0$  вне  $\bar{\Omega}$ ;

2)  $\omega(r, \theta) = 0$  на  $\partial \Omega$ ;

3)  $\frac{\partial \omega(r, \theta)}{\partial \mathbf{n}} = -1$  на  $\partial \Omega$ ,

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial \Omega$ .

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию  $y = f_M(x)$  [11], удовлетворяющую следующим условиям:

а)  $f_M(0) = 0$ ;

б)  $f'_M(0) = 1$ ;

в)  $f'_M(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ ;

г)  $f_M(x) \equiv 1 \quad \forall x \geq M$  ( $M = \text{const} > 0$ ).

Условиям а) – г) удовлетворяет, например, функция

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp \frac{Mx}{x - M}, & 0 \leq x < M; \\ 1, & x \geq M. \end{cases}$$

Ясно, что такая  $f_M(x) \in C^\infty[0, +\infty)$ .

Обозначим

$$\omega_M(r, \theta) = f_M[\omega(r, \theta)]. \quad (9)$$

Функция  $\omega_M(r, \theta)$  удовлетворяет условиям 1) – 3). Кроме того,  $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$ , если  $\omega(r, \theta) \geq M$ . Это условие означает, что если функция  $\omega(r, \theta)$  монотонно возрастает при удалении от  $\partial \Omega$ , то функция  $\omega_M(r, \theta)$  вида (9) отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области  $\{0 \leq \omega(r, \theta) < M\}$ , содержащейся во внешности  $\bar{\Omega}$  и прилегающей к  $\partial \Omega$ .

В работе [9] показано, что при любом выборе достаточно гладких функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  ( $\Phi_1 \cdot r^{-2} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ ) краевым условиям (7) и условию на бесконечности (8) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2, \quad (10)$$

где  $\psi_0 = \frac{1}{4} U_\infty (r - R)^2 \left( 2 + \frac{R}{r} \right) \sin^2 \theta$  – решение Стокса для задачи обтекания сферы радиуса  $R$  (считаем, что сфера радиуса  $R$  целиком лежит внутри обтекаемого тела  $\bar{\Omega}$ ).

Для решения задачи (6) – (8) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть начальное приближение  $\psi^{(0)}$  задано. В качестве начального приближения  $\psi^{(0)}$  можно взять, например, решение соответствующей линеаризованной задачи (приближение Стокса) [10].

Если  $i$ -е приближение  $\psi^{(i)}$  построено, то новое  $(i+1)$ -е приближение  $\psi^{(i+1)}$  находим как решение линейной задачи:

$$\nu E^2 \psi^{(i+1)} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \theta} \frac{\partial E \psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} \frac{\partial E \psi^{(i)}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \theta} \right) E \psi^{(i)} \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (11)$$

$$\psi^{(i+1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(i+1)}}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (12)$$

$$\psi^{(i+1)} \sim \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

В соответствии с (10) структура решения задачи (11) – (13) имеет вид

$$\psi^{(i+1)} = \omega_M^2 \Phi_1^{(i+1)} + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2^{(i+1)}.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент  $\Phi_1^{(i+1)}$  и  $\Phi_2^{(i+1)}$  воспользуемся методом Галеркина [14].

Известно [12, 15], что общее решение уравнения  $E^2 \psi = 0$  при отсутствии в физической постановке сингулярностей может быть записано в виде

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n} \right) J_n(\cos \theta), \quad (14)$$

где  $A_n, B_n, C_n, D_n$  – произвольные постоянные;  $J_n(\zeta)$  – функции Гегенбауэра первого рода. Представлением (14) воспользуемся для выбора координатных последовательностей.

Для аппроксимации неопределенной компоненты  $\Phi_1^{(i+1)}$  воспользуемся функциями системы

$$\left\{ r^{-1} J_2(\cos \theta), r^{-1} J_4(\cos \theta), r^{-2} J_3(\cos \theta), r^{-2} J_5(\cos \theta), \dots, r^{-n} J_{n+1}(\cos \theta), r^{-n} J_{n+3}(\cos \theta), \dots \right\}, \quad (15)$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты  $\Phi_2^{(i+1)}$  воспользуемся функциями системы

$$\left\{ J_3(\cos \theta), r J_2(\cos \theta), r^2 J_2(\cos \theta), r^4 J_2(\cos \theta), r^3 J_3(\cos \theta), r^5 J_3(\cos \theta), \dots, r^n J_n(\cos \theta), r^{n+2} J_n(\cos \theta), \dots \right\}. \quad (16)$$

Итак, функции  $\Phi_1^{(i+1)}$  и  $\Phi_2^{(i+1)}$  представим в виде

$$\Phi_1^{(i+1)} \approx \Phi_{1, m_1}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n^{(i+1)} \tau_n,$$

$$\Phi_2^{(i+1)} \approx \Phi_{2, m_2}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_{n+m_1}^{(i+1)} \tau_{n+m_1},$$

где  $\tau_1, \dots, \tau_{m_1}$  – первые  $m_1$  функций системы (15), а  $\tau_{m_1+1}, \dots, \tau_{m_1+m_2}$  – первые  $m_2$  функций системы (16).

Тогда

$$\psi^{(i+1)} \approx \psi_N^{(i+1)} = \omega_M^2 \Psi_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_n^{(i+1)} \varphi_n, \quad (17)$$

где  $N = m_1 + m_2$ ,

$$\varphi_1 = \omega_M^2 \tau_1, \dots, \varphi_{m_1} = \omega_M^2 \tau_{m_1},$$

$$\varphi_{m_1+1} = \omega_M^2 (1 - \omega_M) \tau_{m_1+1}, \dots,$$

$$\varphi_N = \omega_M^2 (1 - \omega_M) \tau_{m_1+m_2}.$$

Таким образом, построенные функции  $\varphi_n$  образуют координатную последовательность.

Коэффициенты  $\alpha_1^{(i+1)}, \dots, \alpha_N^{(i+1)}$  найдем из условия ортогональности невязки, полученной после подстановки функции (17) в уравнение (11), к системе функций

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots;\}$$

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots;\}$$

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r J_2(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta) J_3(\cos \theta),\}$$

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r^j J_j(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta) r^{j+2} J_j(\cos \theta), j = 2, 3, \dots\}.$$

Это приводит к необходимости решения системы линейных уравнений относительно  $\alpha_1^{(i+1)}, \dots, \alpha_N^{(i+1)}$ .

Итерации следует прекратить, когда  $\|\psi^{(i+1)} - \psi^{(i)}\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  – малое число.

#### 4. Метод решения задачи для концентрации

Подставив найденную функцию тока в уравнение (3), решим задачу (3) – (5) также методом R-функций.

Нами доказана следующая теорема.

**Теорема.** При любом выборе достаточно гладких функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  ( $\Psi_1 \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ ) краевым условиям (4) и (5) точно удовлетворяет функция вида

$$c = c_0 (1 - \omega_M) + \omega_M \Psi_1 + \omega_M (1 - \omega_M) \Psi_2.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  также воспользуемся методом Галеркина [14].

Для аппроксимации неопределенной компоненты  $\Psi_1$  воспользуемся функциями полной системы частных решений уравнения Лапласа относительно области  $\{\omega(r, \theta) > 0\}$ :

$$\left\{ r^n P_n^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots \right\}, \quad (18)$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты  $\Psi_2$  воспользуемся функциями полной системы

частных решений уравнения Лапласа относительно области  $\{\omega(r, \theta) < M\}$ :

$$\{r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (19)$$

где  $P_n^m(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра.

Итак, функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  представим в виде

$$\Psi_1 \approx \Psi_{1, m_3} = \sum_{k=1}^{m_3} \beta_k \gamma_k,$$

$$\Psi_2 \approx \Psi_{2, m_4} = \sum_{k=1}^{m_4} \beta_{k+m_3} \gamma_{k+m_3},$$

где  $\gamma_1, \dots, \gamma_{m_3}$  – первые  $m_3$  функций системы (18),

а  $\gamma_{m_3+1}, \dots, \gamma_{m_3+m_4}$  – первые  $m_4$  функций системы (19).

Тогда

$$c \approx c_K = c_0 (1 - \omega_M) + \sum_{k=1}^K \beta_k \phi_k, \quad (20)$$

где  $K = m_3 + m_4$ ,

$$\phi_1 = \omega_M \gamma_1, \dots, \phi_{m_3} = \omega_M \gamma_{m_3},$$

$$\phi_{m_3+1} = \omega_M (1 - \omega_M) \gamma_{m_3+1}, \dots,$$

$$\phi_K = \omega_M (1 - \omega_M) \gamma_{m_3+m_4}.$$

Коэффициенты  $\beta_1, \dots, \beta_K$  найдем из условия ортогональности невязки, полученной после подстановки функции (20) в уравнение (3), к первым  $m_3$  функциям системы (18) и к первым  $m_4$  функциям системы (19).

Это приводит к необходимости решения системы линейных уравнений относительно  $\beta_1, \dots, \beta_K$ .

Таким образом, мы получим приближенное решение задачи (3) – (5).

### 5. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  и эллипсоида

вращения  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  при  $c_0 = 1, M=5$ , раз-

ных числах Рейнольдса и Пекле. На рис. 1 – 6 приведены линии концентрации для сферы, на рис. 7 – 12 – для эллипсоида вращения.

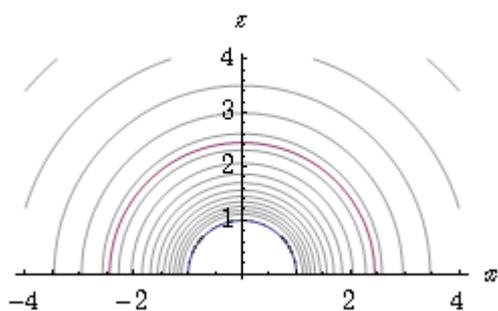


Рис. 1. Линии концентрации для сферы для  $Re = 0$  и  $Pe = 0$

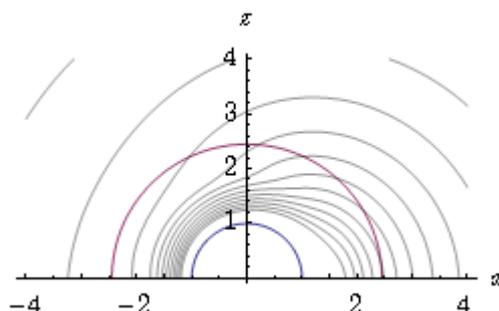


Рис. 2. Линии концентрации для сферы для  $Re = 0$  и  $Pe = 10$

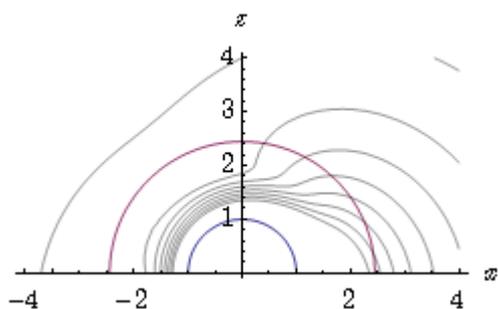


Рис. 3. Линии концентрации для сферы для  $Re = 0$  и  $Pe = 20$

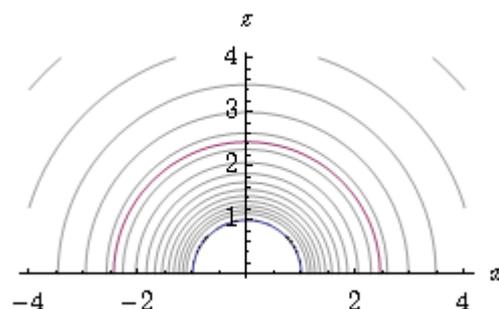


Рис. 4. Линии концентрации для сферы для  $Re = 25$  и  $Pe = 0$

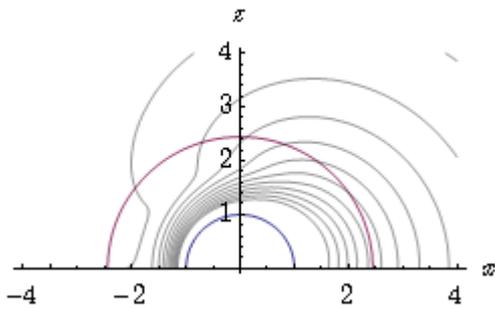


Рис. 5. Линии концентрации для сферы для  $Re = 25$  и  $Pe = 10$

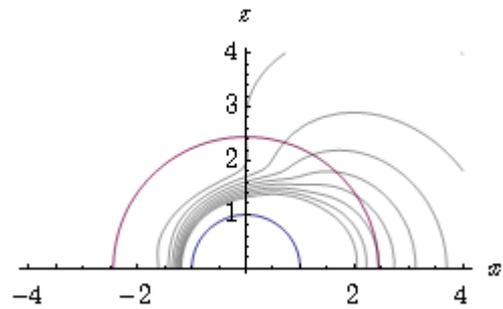


Рис. 6. Линии концентрации для сферы для  $Re = 25$  и  $Pe = 20$

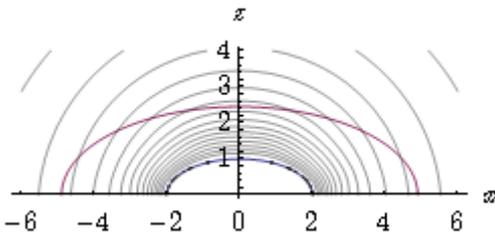


Рис. 7. Линии концентрации для эллипсоида для  $Re = 0$  и  $Pe = 0$

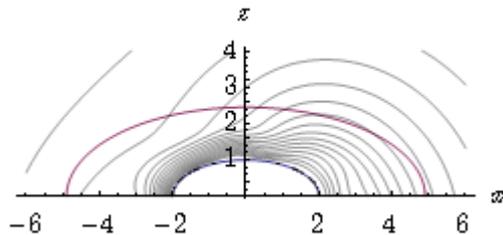


Рис. 8. Линии концентрации для эллипсоида для  $Re = 0$  и  $Pe = 10$

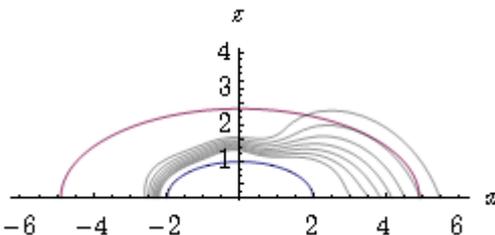


Рис. 9. Линии концентрации для эллипсоида для  $Re = 0$  и  $Pe = 20$

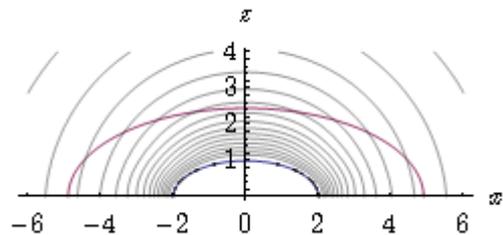


Рис. 10. Линии концентрации для эллипсоида для  $Re = 30$  и  $Pe = 0$

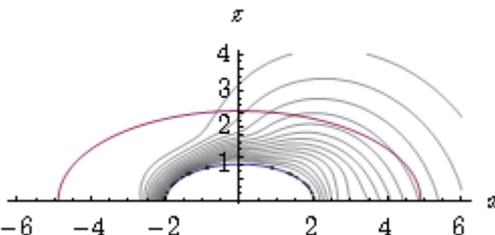


Рис. 11. Линии концентрации для эллипсоида для  $Re = 30$  и  $Pe = 10$

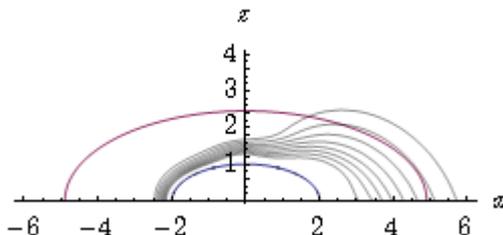


Рис. 12. Линии концентрации для эллипсоида для  $Re = 30$  и  $Pe = 20$

## Выводы

Впервые предложен численный метод расчета массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком, основанный на совместном применении методов последовательных приближений, R-функций и Галеркина, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает все краевые условия задачи, в том числе и условие на бесконечности. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных технологических и физико-механических процессов.

Сказанное выше и определяет *научную новизну и практическую значимость* полученных результатов.

**Литература:** 1. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. Химическая гидродинамика: Спр. пос. М.: Квантум, 1996. 336 с. 2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 3. Колосова С.В. Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 Вычислительная математика. Харьков: ХИРЭ, 1972. 85 с. 4. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61 – 67.

5. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. № 31. С. 141 – 148. 6. Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2. С. 50 – 57. 7. Суворова И.Г., Кравченко О.В., Баранов И.А. Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода R-функций // Мат. методы та фіз.-мех. поля. 2011. 54, № 2. С. 139 – 149. 8. Максименко-Шейко К.В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // Доп. НАН України. 2005. № 9. С. 41 – 46. 9. Ламтюгова С.М., Сидоров М.В. Застосування методу R-функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини // Відбір та обробка інформації. 2012. № 36 (112) С. 56 – 62. 10. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. №1. С. 112 – 122. 11. Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л. Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. 1972. № 9. С. 837 – 839. 12. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с. 13. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с. 14. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 420 с. 15. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

Поступила в редколлегию 14.03.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

**Колосова Светлана Васильевна**, канд. физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы математической физики. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

**Ламтюгова Светлана Николаевна**, аспирантка каф. прикладной математики ХНУРЭ, ассистентка каф. высшей математики ХНУГХ им. А.Н. Бекетова. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

**Сидоров Максим Викторович**, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

## МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

*СТАДНИКОВА А.В.*

Рассматривается применение методов  $R$ -функций и Ритца к численному анализу квазистационарного перемешивания вязкой несжимаемой жидкости в плоской многосвязной области. Решение задачи перемешивания разбивается на две части: определение поля скоростей течения жидкости и исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости.

### Введение

*Актуальность исследования.* Необходимость численного анализа течений вязких жидкостей возникает во многих прикладных задачах, в частности в задачах перемешивания. Эта проблема связана, в частности, с многочисленными применениями в химической, фармацевтической и пищевой промышленности [3, 12, 18]. Кроме того, перемешивание жидкостей является фундаментальной научной проблемой, связанной с современными концепциями хаотической и регулярной динамики [2, 17]. Однако большинство методов, используемых при моделировании таких процессов, не обладают свойством универсальности и их сложно применять для «непримитивных» областей. В работах [4, 8, 10, 12] решалась задача перемешивания для таких простых областей, как круг, полукруг, круговой сектор и т.д., однако для изучения процесса перемешивания в более сложных областях, в частности, многосвязных, предложенный ими математический аппарат, не работает. Точно учесть геометрическую информацию, входящую в постановку задачи, можно, используя конструктивный аппарат теории  $R$ -функций, предложенный акад. НАН Украины В.Л. Рвачевым [13]. Таким образом, разработка новых методов численного анализа задачи перемешивания в многосвязных областях, основанных на применении метода  $R$ -функций, является актуальной научной проблемой.

*Цели и задачи исследования.* Целью данного исследования является разработка нового метода численного анализа квазистационарного процесса перемешивания вязкой несжимаемой жидкости в многосвязной области методами  $R$ -функций и Ритца. Решение задачи перемешивания состоит из двух этапов:

- 1) определение поля скоростей течения жидкости (формализм Эйлера);
- 2) исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости (формализм Лагранжа).

Для решения первой части задачи перемешивания необходимо разработать приближенно-аналитический метод, основанный на принципе суперпозиции и методе  $R$ -функций (разбить исходную краевую задачу на более простые, построить структуру решения каждой из полученных краевых

задач, разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты структуры методом Ритца). Для решения второй части задачи перемешивания необходимо составить и решить (используя численные методы решения задачи Коши) систему уравнений движения лагранжевой частицы. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [6].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоское квазистационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области  $\Omega$ . Пусть область  $\Omega$  является  $(n+1)$ -связной и её граница  $\partial\Omega$  состоит из внешнего контура  $\partial\Omega_0$  и внутренних контуров  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \dots, \partial\Omega_n$ ;  $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^n \partial\Omega_i$ , причем  $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n$ , т.е. многосвязность вызывается внесением препятствия в поток. Будем считать, что граница  $\partial\Omega$  твердая, а течение в области вызвано попеременным движением внешней и внутренних границ с заданными скоростями.

Решение первой части задачи перемешивания заключается в получении поля скоростей  $(v_x, v_y)$  в области течения  $\Omega$ . Будем считать, что рассматриваемое течение относится к ползущим и нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь, т.е. можно ограничиться рассмотрением приближения Стокса [9].

Плоское квазистационарное стоксово течение будем описывать с помощью функции тока  $\psi(x, y, t)$ , вводимой соотношениями [9]

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для функции тока  $\psi(x, y, t)$  можно поставить следующую краевую задачу:

$$\Delta^2\psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_1} = c_1(t), \dots, \psi|_{\partial\Omega_n} = c_n(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ g_n(t) & \text{на } \partial\Omega_n, \end{cases} \quad (3)$$

где  $c_1(t), \dots, c_n(t)$  – некоторые неизвестные заранее функции времени  $t$ ;  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ ;  $\Delta^2$  – бигармонический оператор,

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Функции  $g_0(t), g_1(t), \dots, g_n(t)$  задаются, исходя из заданных скоростей жидкости на  $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$  соответственно [14].

Для определения  $c_1(t), \dots, c_n(t)$  нужно привлечь дополнительные соображения. Так,  $c_1(t), \dots, c_n(t)$  можно найти из условий однозначности давления,

которые имеют вид [15]

$$\int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\mathbf{n}} ds = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

## 2. Решение первой части задачи перемешивания

Для решения задачи (1) – (4) воспользуемся принципом суперпозиции, методом  $R$ -функций [13, 15] и методом Ритца [11].

Решение задачи (1) – (4) можно представить в виде

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(x, y, t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) \cdot \psi_k(x, y), \quad (5)$$

где  $\psi_0(x, y, t)$  – решение задачи

$$\Delta^2 \psi_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (6)$$

$$\psi_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ g_n(t) & \text{на } \partial\Omega_n, \end{cases} \quad (7)$$

а  $\psi_k(x, y)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – решение задачи

$$\Delta^2 \psi_k = 0 \text{ в } \Omega, \quad (8)$$

$$\psi_k|_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_k} = 0, \quad \psi_k|_{\partial\Omega_k} = 1, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Если решения задач (6) – (9) найдены, то подставив (5) в (4), получим, что  $c_1(t)$ , ...,  $c_n(t)$  являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k(t) \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial\mathbf{n}} ds = - \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial\mathbf{n}} ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Единственность решения системы (10) доказывается по схеме, аналогичной той, которая была использована в [1] для доказательства обобщения теоремы Стокса.

Решение задачи (6), (7) сведем к решению стационарных задач. Представим функцию  $\psi_0(x, y, t)$  в виде

$$\psi_0(x, y, t) = \sum_{j=0}^n g_j(t) \sigma_j(x, y), \quad (11)$$

где  $\sigma_j(x, y)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , – решение задачи

$$\Delta^2 \sigma_j = 0 \text{ в } \Omega, \quad (12)$$

$$\sigma_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_j}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{на } \partial\Omega_j, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_j, \end{cases} \quad (13)$$

В соответствии с методом  $R$ -функций [13] построим структуры решения краевых задач (12), (13) и (8), (9), т.е. пучки функций, точно удовлетворяющие соответствующим краевым условиям.

Известно [14], что структура решения задачи Стокса

$$\Delta^2 \psi = F \text{ в } \Omega,$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega,$$

имеет вид

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi,$$

где  $f = EC\tilde{f}$ ,  $g = EC\tilde{g}$  – продолжения функций  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$  в  $\Omega$ , оператор  $D_1$  определяется равенством

$$D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y},$$

$\Phi$  – неопределенная компонента структуры, а функция  $\omega(x, y)$  обладает свойствами

а)  $\omega = 0$  на  $\partial\Omega$ ;

б)  $\omega > 0$  в  $\Omega$ ;

в)  $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$  на  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

Пусть  $\omega(x, y) = 0$ ,  $\omega_0(x, y) = 0$ , ...,  $\omega_n(x, y) = 0$  – нормализованные уравнения  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_0$ , ...,  $\partial\Omega_n$  соответственно, т.е. функции  $\omega(x, y)$ ,  $\omega_0(x, y)$ , ...,  $\omega_n(x, y)$  удовлетворяют условиям

$$\omega = 0 \text{ на } \partial\Omega; \quad \omega > 0 \text{ в } \Omega; \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega,$$

$$\omega_0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_0; \quad \omega_0 > 0 \text{ в } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_0);$$

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_0,$$

$$\dots \dots \dots \omega_n = 0 \text{ на } \partial\Omega_n; \quad \omega_n > 0 \text{ в } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_n);$$

$$\frac{\partial\omega_n}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_n,$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

Функции  $\omega(x, y)$ ,  $\omega_0(x, y)$ , ...,  $\omega_n(x, y)$  с указанными свойствами могут быть построены с помощью  $R$ -функций для достаточно широкого класса областей [13].

Тогда структура решения задачи (12), (13) имеет вид

$$\sigma_j = -\omega \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i \left( \sum_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i \right)^{-1} + \omega^2 \Phi_j, \quad (14)$$

$$j = 0, 1, \dots, n,$$

а структура решения задачи (7), (8) имеет вид

$$\psi_k = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} - \omega D_1 \left( \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} \right) + \omega^2 \Upsilon_k, \quad (15)$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\Phi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\Upsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – неопределенные компоненты структур.

Для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах (14), (15) воспользуемся методом Ритца [11].

В каждой из задач (8), (9) сделаем замену

$$\Psi_k = p_k + u_k, \quad (16)$$

$$\text{где } p_k = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} - \omega D_1 \left( \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} \right), \quad u_k = \omega^2 \Phi_k -$$

новая неизвестная функция,  $k = 1, \dots, n$ . После подстановки (16) в (8), (9) для функций  $u_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , получим задачи с однородными краевыми условиями:

$$\Delta^2 u_k = -\Delta^2 p_k \text{ в } \Omega, \quad (17)$$

$$u_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (18)$$

С краевыми задачами (17), (18) свяжем оператор  $A$  этих краевых задач, действующий по правилу

$$A = \Delta^2$$

на области определения

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Можно доказать [11], что такой оператор будет положительно определенным. Закрыв множество  $D_A$  в норме, порожденной скалярным произведением

$$[u, v] = \iint_{\Omega} \Delta u \Delta v dx dy,$$

получим энергетическое пространство  $H_A$ . Тогда по теореме о функционале энергии [11] обобщенное решение задач (17), (18) может быть найдено как

$$u_k = \arg \inf_{u \in H_A} \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 + 2\Delta u \Delta p_k] dx dy, \quad k = 1, \dots, n.$$

Согласно методу Ритца [11] приближенные решения этих вариационных задач будем искать в виде

$$u_k = \omega^2 \Phi_k \approx u_{k, N} = \omega^2 \Phi_{k, N} = \omega^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(k)} \tau_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(k)} \varphi_i,$$

где  $k = 1, \dots, n$ ,  $\{\tau_i\}$  – полная в  $L_2(\Omega)$  система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.п.),  $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$ .

По построению последовательность  $\{\varphi_i\}$  является координатной:

- 1)  $\varphi_i \in D_A \quad \forall i$ ;
- 2)  $\forall N \quad \varphi_1, \dots, \varphi_N$  линейно-независимы;
- 3)  $\{\varphi_i\}$  полна в  $H_A$ .

Тогда для определения неизвестных чисел  $\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_N^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , необходимо решить систему Ритца

$$\sum_{i=1}^N [\varphi_i, \varphi_j] \alpha_i^{(k)} = -(\Delta p_k, \Delta \varphi_j),$$

$$j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, n.$$

Из теорем сходимости метода Ритца [11] следует, что при  $N \rightarrow \infty$  последовательности функций  $u_{k, N}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , сходятся к единственным обобщенным решениям краевых задач (17), (18) как в норме  $L_2(\Omega)$ , так и в норме  $H_A$ . Это значит, что последовательности функций  $\Psi_{k, N} = p_k + u_{k, N}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , сходятся в норме  $L_2(\Omega)$  к единственным обобщенным решениям задач (8), (9). Условия применимости описанного численного метода формулируются в виде условий  $\Delta p_k \in L_2(\Omega)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Аналогично метод Ритца применим для решения задач (12), (13).

В каждой из задач (12), (13) сделаем замену

$$\sigma_j = q_j + v_j, \quad (19)$$

$$\text{где } q_j = -\omega \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i}, \quad v_j = \omega^2 \Upsilon_j - \text{ новая}$$

неизвестная функция,  $j = 0, 1, \dots, n$ . После подстановки (19) в (12), (13) для функций  $v_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , получим задачи с однородными краевыми условиями:

$$\Delta^2 v_j = -\Delta^2 q_j \text{ в } \Omega, \quad (20)$$

$$v_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (21)$$

По теореме о функционале энергии [11] обобщенное решение задач (20), (21) может быть найдено как

$$v_j = \arg \inf_{v \in H_A} \iint_{\Omega} [(\Delta v)^2 + 2\Delta v \Delta q_j] dx dy, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Согласно методу Ритца [11] приближенные решения этих вариационных задач будем искать в виде

$$v_j = \omega^2 \Upsilon_j \approx v_{j, M} = \omega^2 \Upsilon_{j, M} = \omega^2 \sum_{i=1}^M \beta_i^{(j)} \tau_i = \sum_{i=1}^M \beta_i^{(j)} \varphi_i,$$

где  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\{\tau_i\}$  – полная в  $L_2(\Omega)$  система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.п.),  $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$ .

Тогда для определения неизвестных чисел  $\beta_1^{(j)}, \dots, \beta_M^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , необходимо решить систему Ритца

$$\sum_{i=1}^M [\varphi_i, \varphi_k] \alpha_i^{(j)} = -(\Delta q_j, \Delta \varphi_k),$$

$$k = 1, \dots, M, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Из теорем сходимости метода Ритца [11] следует, что при  $M \rightarrow \infty$  последовательности функций

$v_{j, M}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , сходятся к единственным обобщенным решениям краевых задач (20), (21) как в норме  $L_2(\Omega)$ , так и в норме  $H_A$ . Это значит, что последовательности функций  $\sigma_{j, M} = q_j + v_{j, M}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , сходятся в норме  $L_2(\Omega)$  к единственным обобщенным решениям задач (12), (13), а последовательность функций  $\psi_{0, M} = \sum_{j=0}^n g_j(t)\sigma_{j, M}$  сходится в норме  $L_2(\Omega)$  к единственному обобщенному решению задачи (6), (7). Условия применимости описанного численного метода формулируются в виде условий  $\Delta q_j \in L_2(\Omega)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

### 3. Решение второй части задачи перемешивания

Для решения второй части задачи перемешивания нужно составить и решить (с использованием численных методов решения задачи Коши) систему уравнений движения лагранжевой частицы:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V_x \equiv \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} &= V_y \equiv -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, полученные траектории движения необходимо исследовать на наличие и характер хаотического поведения с помощью методов нелинейной динамики (найти и проанализировать стационарные точки, построить фазовые портреты, исследовать эволюции линейного и плоского элементов). Тем самым, качественный анализ системы (22) позволяет выделить зоны эффективного перемешивания, что иллюстрируется результатами вычислительного эксперимента.

Результаты работы были доложены на трёх международных конференциях: Международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Харьков-Херсон, 10 – 15 июня 2013 г.) [5]; Международная молодёжная научная конференция «XL Гагаринские чтения» (Москва, «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 7 – 11 апреля 2014) [7]; XVIII Международный молодежный форум «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, ХНУРЭ, 14 – 16 апреля 2014) [16].

### Выводы

Впервые предложен и обоснован метод численного анализа задачи перемешивания вязкой жидкости в многосвязной области. При этом, благодаря использованию метода  $R$ -функций, приближенное выражение для функции тока получается в аналитическом виде, что выделяет наш метод среди остальных методов решения задач этого типа. Ещё одним преимуществом предложенного метода является то, что решение может быть получено для достаточно сложной области, что делает его универсальным. Решение второй части задачи перемешивания позволяет моделировать процесс переме-

шивания, анализировать его эффективность, основываясь на изучении поведения отдельных частиц. Этим и определяется *научная новизна и практическая значимость* работы.

**Литература:** 1. *Алексидзе М.А.* Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М.: Наука, 1987. 336 с. 2. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3 – 45. 3. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 3 – 34. 4. *Ареф Х.* Развитие хаотической адвекции // Нелинейная динам. 2006. Т. 2, № 1. С. 111 – 133. 5. *Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стадникова А.В.* Математическое моделирование процессов перемешивания в многосвязных областях // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Харьков-Херсон, 10 – 15 июня 2013 г.). С. 132 – 135. 6. *Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стадникова А.В.* Численный анализ процессов перемешивания методом  $R$ -функций // Радиоэлектроника и информатика. 2012. № 3. С. 28 – 34. 7. *Гибкина Н.В., Стадникова А.В.* Численный анализ процессов перемешивания в многосвязных областях // Научные труды Международной молодёжной научной конференция «XL Гагаринские чтения» в 9 томах (Москва, «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 7 – 11 апреля 2014). Т. 5. С. 86 – 88. 8. *Дунаева Т.А., Гуржий А.А., Мелешко В.В.* Перемешивание вязкой жидкости в полукруге при малых числах Рейнольдса // Прикладная гидромеханика. 2001. Т. 3, № 2. С. 15 – 24. 9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. 10. *Мелешко В. В., Краснополянская Т. С.* Смешивание вязких жидкостей. // Нелинейная динам. 2005. Т.1, №1. С. 69 – 109. 11. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. 12. *Оттино Дж. М.* Перемешивание жидкостей // В мире науки. 1989. № 3. С. 34 – 44. 13. *Рвачев В.Л.* Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 14. *Сидоров М.В.* О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 39 – 42. 15. *Сидоров М.В.* Приближенный метод расчета многосвязных вязких течений // Радиоэлектроника и информатика. 2003. № 1. С. 42 – 44. 16. *Стадникова А.В.* Метод  $R$ -функций в задаче математического моделирование процессов перемешивания в многосвязных областях // Материалы XVIII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». Харьков: ХНУРЭ. 14 – 16 апреля 2014. Т. 7. С. 152 – 153. 17. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320с. 18. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под ред. А.В. Борисова, И.С. Мамаева и М.А. Соколовского. Москва-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003. 704 с.

Поступила в редколлегию 11.03.2014

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

**Стадникова Анна Викторовна**, ассист. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, теория  $R$ -функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Предлагается квази Ф-функция для пары неориентированных сфероконусов. Данная функция позволяет записать условия взаимного непересечения объектов в виде набора систем неравенств, левые части которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

### Введение

На сегодняшний день наименее исследованными в классе задач размещения геометрических объектов являются задачи размещения трехмерных объектов, которые допускают непрерывные повороты. В то же время данные задачи являются востребованными как с научной, так и с практической точек зрения [1-3].

Для построения адекватных математических моделей таких задач необходимо выполнить аналитическое описание взаимоотношений (касание, пересечение и непересечение) размещаемых геометрических объектов. Однако в связи с отсутствием конструктивных средств математического моделирования этих отношений для класса неориентированных (допускающих непрерывные повороты) трехмерных объектов существует проблема применения известных методов локальной и глобальной оптимизации для поиска решения рассматриваемых задач. Решить эту проблему позволяет подход, основанный на методе Ф-функций [4].

На данный момент в классе неориентированных трехмерных геометрических объектов построены Ф-функции для многогранников [5] и для многогранника и шара [6].

Данная статья расширяет множество трехмерных неориентированных объектов, для которых может быть построена математическая модель задачи оптимальной упаковки.

*Целью* данной работы является математическое моделирование взаимодействия неориентированных сфероконусов.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи: построить квази Ф-функцию и псевдонормализованную квази Ф-функцию для сфероконусов.

### 1. Постановка задачи

В качестве сфероконуса в работе рассматривается выпуклый геометрический объект  $sK_i = G_{1i} \cup F_i \cup G_{2i}$  (рис. 1), где  $F_i$  – усеченный конус высоты  $2h_i$  радиуса верхнего и нижнего оснований  $r_{1i}$  и  $r_{2i}$  соответственно,  $r_{1i} \geq r_{2i}$ ;  $G_{1i}$  – верхний сферический сегмент высоты  $w_{1i}$  и радиуса основания  $r_{1i}$ ;  $G_{2i}$  – нижний сферический сегмент высоты  $w_{2i}$  и радиуса основания  $r_{2i}$ . При этом  $G_{ki}$  получены из шаров  $S_{ki}$  радиусов

$$\rho_{ki} = \frac{r_{ki}^2 + w_{ki}^2}{2w_{ki}}, k = 1, 2.$$

Обозначим также

$$\tau_{ki} = \rho_{ki} - w_{ki}, k = 1, 2.$$

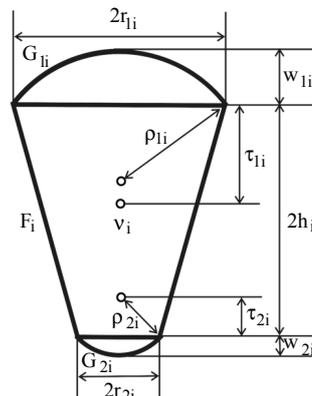


Рис. 1. Сфероконус

Условия выпуклости сфероконуса записываются в виде условий на его метрические характеристики:

$$\tau_{1i} + \frac{r_{1i}(r_{1i} - r_{2i})}{2h_i} \geq 0, \tau_{2i} + \frac{r_{2i}(r_{2i} - r_{1i})}{2h_i} \geq 0.$$

В работе рассматриваются сфероконусы, для которых  $\tau_{1i} \geq 0$ .

Пусть вектор  $\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i})$  задает метрические характеристики сфероконуса  $sK_i$ . Изменяя значения вектора  $\mu_i$ , можно получить следующие геометрические объекты: конус ( $\mu_i = (h_i, r_{1i}, 0, 0, 0)$ ); усеченный конус ( $\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, 0, 0)$ ); круговой цилиндр ( $\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, 0, 0), r_{1i} = r_{2i}$ ); сфероцилиндр ( $\mu_i = (h_i, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i}), r_{1i} = r_{2i}$ ); сферический сегмент ( $\mu_i = (0, r_{1i}, 0, w_{1i}, 0)$ ); сферический диск ( $\mu_i = (0, r_{1i}, r_{2i}, w_{1i}, w_{2i}), r_{1i} = r_{2i}$ ).

Сфероконус допускает аффинные преобразования трансляции и поворота. В работе сфероконус  $sK_i$  является объектом вращения вокруг оси  $Oz$ , поэтому его ориентация задается углами  $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$  вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Зададим матрицу поворота  $R(\theta_i) = (R_x(\theta_i), R_y(\theta_i), R_z(\theta_i))$ , где

$$R_x(\theta_i) = (\cos \beta_i, \sin \alpha_i \sin \beta_i, -\cos \alpha_i \sin \beta_i)^T,$$

$$R_y(\theta_i) = (0, \cos \alpha_i, \sin \alpha_i)^T,$$

$$R_z(\theta_i) = (\sin \beta_i, -\sin \alpha_i \cos \beta_i, -\cos \alpha_i \cos \beta_i)^T.$$

Сфероконус  $sK_i$ , транслированный на вектор  $v_i = (x_i, y_i, z_i)$  и повернутый на углы  $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ , обозначим  $sK_i(u_i)$ , где  $u_i = (v_i, \theta_i)$  – вектор движения сфероконуса.

В работе [7] в целях описания в аналитическом виде условий непересечения выпуклых объектов введено понятие квази Ф-функции. Эта функция зави-

сит не только от параметров размещения объектов, но и от некоторых дополнительных переменных  $Y_{ij}$ , количество  $k$  которых зависит от размерности пространства, в котором заданы геометрические объекты.

**Определение 1.** Квази  $\Phi$ -функцией  $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$  для  $\phi$ -объектов [8]  $O_i(u_i)$  и  $O_j(u_j)$  называется непрерывная всюду определённая функция, для которой выполняются следующие свойства:

$$\max_{Y_{ij} \in R^k} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) < 0, \text{ если } \text{int } O_i(u_i) \cap \text{int } O_j(u_j) \neq \emptyset$$

$$\max_{Y_{ij} \in R^k} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = 0, \text{ если } \text{int } O_i(u_i) \cap \text{int } O_j(u_j) = \emptyset,$$

$$\text{fr } O_i(u_i) \cap \text{fr } O_j(u_j) \neq \emptyset;$$

$$\max_{Y_{ij} \in R^k} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) > 0, \text{ если } O_i(u_i) \cap O_j(u_j) = \emptyset.$$

Таким образом, функция

$$\Phi(u_i, u_j, Y_{ij}) = \max_{Y_{ij} \in R^k} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$$

является  $\Phi$ -функцией для объектов  $O_i(u_i)$  и  $O_j(u_j)$ .

**Определение 2.** Квази  $\Phi$ -функция  $Q_{ij}^{d_{ij}}(u_i, u_j, Y_{ij})$  называется псевдонормализованной квази  $\Phi$ -функцией для  $\phi$ -объектов  $O_i(u_i)$  и  $O_j(u_j)$ , если для некоторого фиксированного значения  $d_{ij} \geq 0$  она удовлетворяет следующим условиям:

$$\max_{Y_{ij} \in R^k} Q_{ij}^{d_{ij}}(u_i, u_j, Y_{ij}) < 0, \text{ если } \rho(O_i(u_i), O_j(u_j)) < d_{ij};$$

$$\max_{Y_{ij} \in R^k} Q_{ij}^{d_{ij}}(u_i, u_j, Y_{ij}) = 0, \text{ если } \rho(O_i(u_i), O_j(u_j)) = d_{ij};$$

$$\max_{Y_{ij} \in R^k} Q_{ij}^{d_{ij}}(u_i, u_j, Y_{ij}) > 0, \text{ если } \rho(O_i(u_i), O_j(u_j)) > d_{ij},$$

где  $\rho(O_i(u_i), O_j(u_j))$  – евклидово расстояние между объектами  $O_i(u_i)$  и  $O_j(u_j)$ .

Легко видеть, что условие  $Q_{ij}^{d_{ij}}(u_i, u_j, Y_{ij}) \geq 0$  обеспечивает нахождение объектов на расстоянии не меньшем, чем  $d_{ij}$ .

## 2. Построение квази $\Phi$ -функции для двух сфероконусов

Рассмотрим полупространство

$$H_s^-(Y_s) = \{X = (x, y, z) \in R^3 : f(X, Y_s) \leq 0\},$$

отделяемое плоскостью  $\Lambda_s = \text{fr } H_s^-(Y_s)$ , которая задаётся уравнением

$$f(X, Y_s) = a(\psi_s)x + b(\phi_s, \psi_s)y + c(\phi_s, \psi_s)z + d_s = 0,$$

$$a(\psi_s) = \sin \psi_s, b(\phi_s, \psi_s) = -\sin \phi_s \cos \psi_s,$$

$$c(\phi_s, \psi_s) = \cos \phi_s \sin \psi_s, Y_s = (\phi_s, \psi_s, d_s).$$

**Замечание.** Заметим, что

$$\|n_s(Y_s)\| = \|(a(\psi_s), b(\phi_s, \psi_s), c(\phi_s, \psi_s))\| = 1,$$

поэтому величина  $|f(X^0, Y_s)|$  равна расстоянию от произвольной точки  $X^0 \in R^3$  до плоскости  $\Lambda_s$ .

Вначале построим  $\Phi$ -функцию для сферического сегмента  $G_{li} \subset sK_i$  и полупространства  $H_s^-(Y_s)$ .

**Теорема 1.** Нормализованная  $\Phi$ -функция для сферического сегмента  $G_{li}(u_i)$  и полупространства

$H_s^-(Y_s)$  может быть представлена в виде

$$\Phi^{11}(u_i, Y_s) = \max\{F_{is}^1(u_i, Y_s), g_{3is}^1(u_i, Y_s)\},$$

где

$$F_{is}^1(u_i, Y_s) = \min\{g_{1is}^1(u_i, Y_s), g_{2is}^1(u_i, Y_s)\},$$

$$g_{1is}^1(u_i, Y_s) = f(v_i, Y_s) + h_i q(\theta_i, Y_s) - r_{li} \sqrt{1 - q(\theta_i, Y_s)^2},$$

$$g_{2is}^1(u_i, Y_s) = f(v_i, Y_s) + \left(h_i + \frac{r_{li}^2}{\tau_{li}}\right) q(\theta_i, Y_s),$$

$$g_{3is}^1(u_i, Y_s) = f(v_i, Y_s) + (h_i - \tau_{li}) q(\theta_i, Y_s) - \rho_{li},$$

$$q(\theta_i, Y_s) = \langle R_z(\theta_i), n_s(Y_s) \rangle.$$

Доказательство. Сегмент  $G_{li}$  представляется, как пересечение шара  $S_{li}$  радиуса  $\rho_{li}$  и конуса  $K_{li}$

высоты  $\frac{r_{li}^2}{\tau_{li}}$  и радиуса основания  $r_{li}$ , образующие

которого касаются шара  $S_{li}$  в точках окружности  $\{X \in R^3 : x^2 + y^2 + (z + h_i - \tau_{li})^2 - r_{li}^2 = 0, z - h_i = 0\}$ .

Обозначим ближайшую к плоскости  $\Lambda_s$  точку основания конуса  $K_{li}$  через  $A_{i1}$ , вершину этого конуса –  $A_{i2}$ , а точку шара  $S_{li}$ , ближайшую к  $\Lambda_s$  – через  $A_{i3}$  (рис. 2).

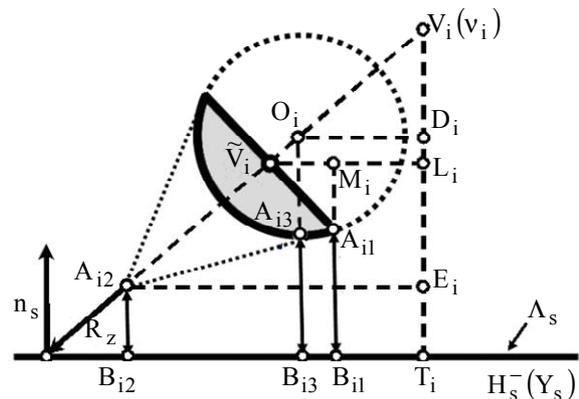


Рис. 2. Отклонения контрольных точек сегмента

Вычислим отклонение точки  $A_{i1}$  от плоскости  $\Lambda_s$ .

Имеем,  $A_{i1}B_{i1} = V_iT_i - V_iL_i - M_iA_{i1}$ , т.е.

$f(A_{i1}, Y_s) = f(v_i, Y_s) + h_i \cos \omega - r_{li} \sin \omega$ , откуда, учитывая, что  $\omega$  – угол между единичными векторами  $n_s(Y_s)$  и  $R_z(\theta_i)$ , получаем

$f(A_{i1}, Y_s) = f(v_i, Y_s) + h_i q(\theta_i, Y_s) - r_{1i} \sqrt{1 - q(\theta_i, Y_s)^2}$ .  
Отклонение точки  $A_{i2}$  от плоскости  $\Lambda_s$  равно  $A_{i2}B_{i2} = V_i T_i - V_i E_i$ , т.е.

$$f(A_{i2}, Y_s) = f(v_i, Y_s) - V_i A_{i2} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует

$$f(A_{i2}, Y_s) = f(v_i, Y_s) + \left(h_i + \frac{r_{1i}^2}{\tau_{1i}}\right) q(\theta_i, Y_s).$$

И, наконец, отклонение точки от плоскости равно

$$A_{i3}B_{i3} = V_i T_i - O_i D_i, \text{ т.е.}$$

$$f(A_{i3}, Y_s) = f(v_i, Y_s) - V_i O_i \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - O_i A_{i3}, \text{ откуда}$$

$$\text{да } f(A_{i3}, Y_s) = f(v_i, Y_s) - (h_i - \tau_{1i}) q(\theta_i, Y_s) - \rho_{1i}.$$

Очевидно, что  $G_{1i}(u_i) \cap \text{int} H_s^-(Y_s) = \emptyset$ , если выполнено хотя бы одно из условий: 1)  $f(A_{i1}, Y_s) \geq 0$ ,  $f(A_{i2}, Y_s) \geq 0$ ; 2)  $f(A_{i3}, Y_s) \geq 0$ .

Обозначим  $g_{tis}^1(u_i, Y_s) = f(A_{it}, Y_s)$ ,  $t = 1, 2, 3$ .

Поэтому, если  $\Phi^{11}(u_i, Y_s) > 0$ , то  $F_{is}(u_i, Y_s) > 0$  или  $g_{3is}^1(u_i, Y_s) > 0$ , а значит  $G_{1i}(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \emptyset$ . Если  $\Phi^{11}(u_i, Y_s) = 0$ , то  $F_{is}^1(u_i, Y_s) = 0$  или  $g_{3is}^1(u_i, Y_s) = 0$ , откуда  $\text{int} G_{1i}(u_i) \cap \text{int} H_s^-(Y_s) = \emptyset$  и  $\text{fr} G_{1i}(u_i) \cap \text{fr} H_s^-(Y_s) \neq \emptyset$ . Если же  $\Phi^{11}(u_i, Y_s) < 0$ , то  $F_{is}(u_i, Y_s) < 0$  и  $g_{3is}^1(u_i, Y_s) < 0$ , из чего следует, что  $\text{int} G_{1i}(u_i) \cap \text{int} H_s^-(Y_s) \neq \emptyset$ .

Заметим, что  $A_{i2} \notin G_{1i}$ . Покажем, что или  $\Phi^{11}(u_i, Y_s) = g_{1is}^1(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s) = g_{3is}^1(u_i, Y_s)$ , или  $\Phi^{11}(u_i, Y_s) \neq g_{2is}^1(u_i, Y_s)$ .

Действительно, если

$$F_{is}(u_i, Y_s) = \min\{g_{1is}^1(u_i, Y_s), g_{2is}^1(u_i, Y_s)\} = g_{1is}^1(u_i, Y_s),$$

то  $\Phi^{11}(u_i, Y_s) \neq g_{2is}^1(u_i, Y_s)$ .

Иначе, пусть  $F_{is}(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s)$ , т.е.  $g_{2is}^1(u_i, Y_s) \leq g_{1is}^1(u_i, Y_s)$ . Тогда получаем

$$q(\theta_i, Y_s) \leq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}. \text{ Если } g_{3is}^1(u_i, Y_s) > g_{2is}^1(u_i, Y_s), \text{ то}$$

$$\Phi^{11}(u_i, Y_s) \neq g_{2is}^1(u_i, Y_s).$$

В ином случае, если  $g_{3is}^1(u_i, Y_s) \leq g_{2is}^1(u_i, Y_s)$ , т.е.

$$\Phi^{11}(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s), \text{ имеем } q(\theta_i, Y_s) \geq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}.$$

Таким образом, с одной стороны,  $q(\theta_i, Y_s) \leq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$ , а

с другой —  $q(\theta_i, Y_s) \geq -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$ . Отсюда

$q(\theta_i, Y_s) = -\frac{\tau_{1i}}{\rho_{1i}}$ . Подставляя это значение в

$g_{1is}^1(u_i, Y_s)$ ,  $g_{2is}^1(u_i, Y_s)$  и  $g_{3is}^1(u_i, Y_s)$ , получаем

$$\Phi^{11}(u_i, Y_s) = g_{1is}^1(u_i, Y_s) = g_{2is}^1(u_i, Y_s) = g_{3is}^1(u_i, Y_s).$$

Поскольку функции  $g_{tis}^1(u_i, Y_s)$ ,  $t = 1, 2, 3$ , всюду определены и непрерывны, то и функция  $\Phi^{11}(u_i, Y_s)$  всюду определена и непрерывна. Поэтому функция  $\Phi^{11}(u_i, Y_s)$ , с учётом замечания, является нормализованной  $\Phi$ -функцией сфероконуса  $sK_i(u_i)$  и полупространства  $H_s^-(Y_s)$ . Теорема 1 доказана.

Аналогично, нормализованная  $\Phi$ -функция для сферического сегмента  $G_{2i}(u_i)$  и полупространства  $H_s^-(Y_s)$  может быть записана, как

$$\Phi^{12}(u_i, Y_s) = \max\{F_{is}^2(u_i, Y_s), g_{3is}^2(u_i, Y_s)\},$$

где

$$F_{is}^2(u_i, Y_s) = \min\{g_{1is}^2(u_i, Y_s), g_{2is}^2(u_i, Y_s)\},$$

$$g_{1is}^2(u_i, Y_s) = f(v_i, Y_s) - h_i q(\theta_i, Y_s) - r_{2i} \sqrt{1 - q(\theta_i, Y_s)^2},$$

$$g_{2is}^2(u_i, Y_s) = f(v_i, Y_s) - \left(h_i + \frac{r_{2i}^2}{\tau_{2i}}\right) q(\theta_i, Y_s),$$

$$g_{3is}^2(u_i, Y_s) = f(v_i, Y_s) - (h_i - \tau_{2i}) q(\theta_i, Y_s) - \rho_{2i}.$$

Поскольку сфероконус является выпуклым множеством, то  $sK_i(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \emptyset$ , если  $G_{1i}(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \emptyset$  и  $G_{2i}(u_i) \cap H_s^-(Y_s) = \emptyset$ . Поэтому функция

$$\Phi_{is}^1(u_i, Y_s) = \min\{\Phi_{is}^{11}(u_i, Y_s), \Phi_{is}^{12}(u_i, Y_s)\}$$

является нормализованной  $\Phi$ -функцией для сфероконуса  $sK_i(u_i)$  и полупространства  $H_s^-(Y_s)$ .

Заметим, что для случаев, когда сфероконус принимает форму конуса, усечённого конуса или цилиндра,  $\Phi$ -функция  $\Phi_{is}^1(u_i, Y_s)$  принимает вид

$$\Phi_{is}^1(u_i, Y_s) = \min\{g_{1is}^1(u_i, Y_s), g_{2is}^1(u_i, Y_s)\}.$$

Аналогичным образом, нормализованная  $\Phi$ -функция для сфероконуса  $sK_j(u_j)$  и полупространства

$$H_s^+(\bar{Y}_s) = \{X \in R^3 : f(X, \bar{Y}_s) = -f(X, Y_s) \leq 0\},$$

$\bar{Y}_s = (\phi_s, \pi + \psi_s, -d_s)$ , может быть записана в виде

$$\Phi_{js}^2(u_j, \bar{Y}_s) = \min\{\Phi_{js}^{21}(u_j, \bar{Y}_s), \Phi_{js}^{22}(u_j, \bar{Y}_s)\},$$

где  $\Phi_{js}^{2k}(u_j, \bar{Y}_s)$  — нормализованная  $\Phi$ -функция для сегмента  $G_{kj} \subset sK_j$ ,  $k = 1, 2$ , и полупространства  $H_s^+(\bar{Y}_s)$ . Для упрощения записи переобозначим

$Y_s = Y_{ij}$ . Таким образом, сфероконусы гарантированно не пересекаются (не имеют общих внутренних точек), если плоскость  $\Lambda_{ij}$  является разделяющей плоскостью этих объектов.

**Теорема 2.** *Квази  $\Phi$ -функция для сфероконусов  $sK_i(u_i)$  и  $sK_j(u_j)$  может быть представлена в*

$$\text{vide } Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = \min \left\{ \Phi_{ij}^1(u_i, Y_{ij}), \Phi_{ij}^2(u_j, \bar{Y}_{ij}) \right\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\max_{Y_{ij} \in R^3} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}^*) > 0.$$

Тогда  $\Phi_{ij}^1(u_i, Y_{ij}^*) > 0$  и  $\Phi_{ij}^2(u_j, Y_{ij}^*) > 0$ , следовательно, плоскость  $\Lambda_{ij}^*$  является разделяющей плоскостью сфероконусов, причём  $sK_i(u_i) \subset \text{int } H_{ij}^+(Y_{ij}^*)$  и  $sK_j(u_j) \subset \text{int } H_{ij}^-(Y_{ij}^*)$ .

Если  $\max_{Y_{ij} \in R^3} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) = Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}^*) = 0$ , то не существует такого  $Y_{ij}^{**} \in R^3$ , что  $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}^{**}) > 0$ . Значит,  $\Phi_{ij}^1(u_i, Y_{ij}^*) = 0$  и  $\Phi_{ij}^2(u_j, Y_{ij}^*) = 0$ , плоскость  $\Lambda_{ij}^*$  является опорной плоскостью сфероконусов  $sK_i(u_i)$  и  $sK_j(u_j)$ , причём  $\text{int } sK_i(u_i) \cap \text{int } sK_j(u_j) = \emptyset$  и  $\text{fr } sK_i(u_i) \cap \text{fr } sK_j(u_j) \neq \emptyset$ .

Если  $\max_{Y_{ij} \in R^3} Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) < 0$ , то для любого  $Y_{ij}^{**} \in R^3$  выполняется  $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}^{**}) < 0$ , а значит справедливо хотя бы одно из неравенств  $\Phi_{ij}^1(u_i, Y_{ij}^{**}) < 0$  или  $\Phi_{ij}^2(u_j, Y_{ij}^{**}) < 0$ . Следовательно, в пространстве  $R^3$  не существует плоскости, разделяющей сфероконусы  $sK_i(u_i)$  и  $sK_j(u_j)$ .

Функция  $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$  всюду определена и непрерывна в силу всюду определённости и непрерывности функций  $\Phi_{ij}^1(u_i, Y_{ij})$  и  $\Phi_{ij}^2(u_j, Y_{ij})$ . Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $d_{ij} \geq 0$ . Тогда функция

$$Q_{ij}^{d_{ij}}(u_i, u_j, Y_{ij}) = Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij}) - \frac{1}{2} d_{ij} \text{ является псевдонормализованной квази } \Phi\text{-функцией для сфероконусов } sK_i(u_i) \text{ и } sK_j(u_j).$$

### 3. Выводы

*Научная новизна.* Впервые построена квази  $\Phi$ -функция  $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$  для пары неориентированных сфероконусов.

*Научные и практические результаты.* Данная

функция позволяет записать условия взаимного непересечения объектов в виде набора систем неравенств, левые части которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Эта функция может быть использована для построения математической модели задач оптимальных упаковок неориентированных сфероконусов, сфероцилиндров, конусов, усеченных конусов, цилиндров, сферических сегментов и сферических дисков.

Функция  $Q_{ij}(u_i, u_j, Y_{ij})$  позволяет снизить вычислительные затраты при определении условий непересечения рассматриваемых трехмерных неориентированных объектов.

Кроме того, функция  $Q_{ij}^{d_{ij}}(u_i, u_j, Y_{ij})$  позволяет учитывать ограничения на кратчайшие расстояния между рассматриваемыми объектами.

**Литература:** 1. Williams S.R. Random packing of spheres and spherocylinders simulated by mechanical contraction / S.R. Williams and A.P. Philipse // Physics Review E. 2003. Vol. 67, Article ID 051301. P. 051301-1–051301-9. 2. Torquato S. Modeling of physical properties of composite materials / S. Torquato // Int. J. Solids Struct. 2000. Vol. 37, Issue 1-2. P. 411-422. 3. Yi Y.B. Compression of packed particulate systems: simulations and experiments in graphitic li-ion anodes / Y.B. Yi, C.W. Wang, A.M.Sastry // Journal of Engineering Materials and Technology. 2006. Vol. 128, Issue 1. P. 73-80. 4. Stoyan Yu.G.  $\Phi$ -function and its basic properties / Yu. G. Stoyan // Доп. НАН України. 2001. №8. С.112-117. 5. Stoyan Yu. G. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes / Yu. G. Stoyan, A.M. Chugay // Cybernetics and Systems Analysis. 2012. Vol. 46, №6. P. 837-845. 6. Стоян Ю.Г. Построение свободной от радикалов  $\Phi$ -функции для шара и неориентированного многогранника / Ю.Г. Стоян, А.М. Чугай // Доп. НАН України. 2011. №12. С. 44-50. 7. Панкратов О.В. Математичні моделі, методи та інформаційні технології розв'язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / О.В. Панкратов. Харків, 2013. 40 с. 8. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. К.: Наук. думка, 1986. 267 с.

Поступила в редколлегию 14.02.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук Гиль Н.И.

**Сёмкин Владимир Владимирович**, аспирант отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАНУ им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10, тел. раб. (0572) 349-47-77, тел. (095)188-45-86.

**Чугай Андрей Михайлович**, канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАНУ им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10, тел. раб. (0572) 349-47-77, тел. (068)319-12-54.

**Панкратов Александр Викторович**, д-р техн. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАНУ им. А.Н. Подгорного. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10, тел.: раб. (0572) 349-47-77, моб. (067)681-95-10.

# КОМПЬЮТЕРНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И ТЕХНИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА



УДК 658.512.011:681.326:519.713

## КИБЕРФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КАК ТЕХНОЛОГИИ КИБЕРУПРАВЛЕНИЯ (аналитический обзор)

*ХАХАНОВ В.И., ОБРИЗАН В.И., МИЩЕНКО А.С.,  
ФИЛИППЕНКО И.В.*

Предлагается технология киберуправления (human-free) социальными (кадры и финансы) ресурсами на основе двух облачных сервисов: 1) распределение государственных заказов и финансов между структурными подразделениями на основе соревнования матриц их компетенций по заданным метрикам; 2) распределение кадровых вакансий путем соревнования матриц компетенций претендентов по заданным метрикам. Киберсистема основана на использовании технологий: Internet of Things, Smart Everything, Big Data, параллельных виртуальных процессоров и ориентирована на обслуживание индивидуумов и университетских структур. Для каждого субъекта генерируются две уникальные метрики компетенций: 1) эталон лучших показателей по каждой номинации профессиональной деятельности; 2) текущие матрицы компетенций всех субъектов, заполняемые в процессе их жизнедеятельности, которые ранжируются путем метрического сравнения результатов конструктивной активности с эталонными значениями. Приводится аналитический обзор состояния проблемы.

### 1. Введение

Для качественной реализации определенных во времени и пространстве процессов, связанных с научной, образовательной, международной деятельностью университета, следует использовать пять системообразующих компонентов: 1) кадры, инфраструктуру, отношения, roadmap и управление. Все упомянутые компоненты подлежат измерению. Для этого существуют выработанные столетиями метрики качества работы ученых и научных институтов. Их следует использовать для генерирования прямых управляющих воздействий в целях морального и материального стимулирования деятельности ученых. Здесь интересны глобальные и непреходящие критерии оценки научно-образовательных результатов,

такие как: международные премии, цитирование публикаций, дипломы за выставочную продукцию, используемые учебники и монографии, рыночно ориентированная продукция, открытия и патенты, международные и локальные гранты, подготовленные научные кадры, разработанные востребованные учебные курсы.

Каждые четыре года локально меняется технология производства товаров и сервисов в определенном рыночном сегменте, которая требует переобучения кадров, смены инфраструктуры, системы управления и отношений, но главное – направления движения на рынке товаров и научно-образовательных услуг. Каждые 20 лет в передовых отраслях глобально меняются технологические уклады типовых производств, которые требуют миллиардных капиталовложений, неподъемных даже для лидеров в рыночных сегментах, формирующих основные капитал-индексы на Уолл-стрите. Это означает, что новый технологический уклад формируется только на основе взаимной кооперации тех компаний и стран, которые имеют свободные капиталы, подготовленные кадры и идеи, точно попадающие в “десятку” мишени рыночной моды следующего 20-летия. Именно сегодня компании и университеты третьих стран могут совершить технологический рывок на рынке товаров и услуг, включая самую модную тетраду (био- и нанотехнологии, искусственный интеллект и кибер-физическое пространство), формирующую важнейший киберсегмент Nasdaq-рынка на основе модных трендов: Internet of Things, Smart Everything, Cloud Computing, Big Data и сервисы для управления бизнесом и анализом данных, мобильные технологии и социальные медиа. Здесь имеется в виду, что Cyber Physical System (CPS) есть совокупность коммуникационно связанных реальных и виртуальных компонентов с выраженными функциями адекватного физического цифрового мониторинга и оптимального облачного компьютерного киберуправления для обеспечения качества жизни, продукции, процессов или сервисов в заданных условиях ограничений на время и ресурсы. Иначе, CPS включает компоненты: Cyber Control, Internet of Things or Cloud, Security, Intelligence, Big Data and Services, Digital Monitoring, Cyber Managing, Physical Smart Everything, Nature, Social, and Tech World. Регуляторные отношения (Relationship) между компонентами CPS формируются законами, уставами предприятий и организаций, морально-этическими правилами поведения внутри социальной группы. Направление движения RoadMap – Harmony of Human, Nature and Tech киберфизической системы че-

ловечества можно определить как достижение такого интегрального уровня развития всего многообразия киберфизических компонентов, который обеспечит гармонию жизни человека с природой и техникой (созданным миром – Created World). Гармония предполагает:

1) Создание киберинтеллекта, который к 2050 году в глобальном масштабе должен позиционироваться как мозг человечества (Humanity Brain).

2) Цифровая идентификация всех физических процессов, объектов и трехмерного пространства с помощью технологий Internet of Things, Smart Everything and Big Data.

3) Особое значение здесь приобретает достаточно новая парадигма Big Data как технологическая культура киберпространства, направленная на формирование динамически развивающейся **киберфизической экосистемы планеты** путем семантической структуризации больших потоков (объемов) гетерогенных данных на основе использования интеллектуальных специализированных мультипроцессоров (фильтров) параллельного мониторинга и метрического анализа информации для управления физическими и виртуальными процессами.

4) Полная замена человека-менеджера кибероблачными сервисами управления социальными группами, биологическими, техническими и виртуальными объектами. Главным отличием предлагаемой масштабируемой киберфизической системы является отсутствие человеческого фактора в блоке управления (Cyber), что делает ее, при конструктивном и гуманном законотворчестве, справедливой, эффективной, оптимальной, надежной и защищенной от субъективных ошибок менеджера.

Третьи страны мира должны присоединиться кадровым потенциалом к научно-технологической гонке евро-американо-азиатских компаний стран-лидеров, чтобы занять в будущем призовое место на пьедестале экономического роста планеты. Например, потенциал Украины составляет: кадры – 135 000 ученых, территория – 576 604 кв.км, научно-образовательная культура – 325 университетов, 1 700 000 студентов, 66 500 IT-компаний, 280 000 IT-работников, или 12 % от занятого населения. Для его использования в модном рыночном Cyber-Physical-направлении должна быть выработана политическая воля – система управляющих воздействий от парламента, создающая условия для формирования современной научно-технологической культуры.

Основная идея менеджментской инновации для третьих стран – создать масштабируемую облачную

киберсистему управления материальными, кадровыми и финансовыми ресурсами, в которой не должно быть места чиновникам – носителям субъективизма, авторитаризма и коррупции. Иерархия приоритетов регулирования киберсистемы должна иметь вертикаль доминирования: 1) Морально-этические ценности человечества, уважительно объединяющие историю и культуру. 2) Конституции и законы, вырабатываемые парламентами профессиональных экспертов. 3) Киберсистемы управления, функционирующие по законам, которые регламентируют жизнедеятельность человека и социальных групп. В данной структуре нет места авторитаризму чиновников, которые субъективно интерпретируют моральные ценности и законы, фактически всегда нарушая их в части перераспределения времени, средств и кадров на основе коррупционных схем.

Рыночно-привлекательные глобальные проекты сегодня выполняются под эгидой объединения физического и виртуального пространства в единое целое. Кибер-физическое пространство (Cyber Physical Space) – метрика телекоммуникационного взаимодействия физических, биологических и социальных объектов, процессов и явлений с виртуальными или облачными (компьютерными) технологиями мониторинга и управления на основе использования Internet of Things & Smart Everything для достижения социально значимых целей. Оно призвано интегрировать наиболее перспективные киберфизические технологические решения: 1) Встроенный интерфейс непосредственной связи мозга человека с компьютером и/или киберпространством путем замены последовательных языковых интерфейсов на параллельные образные отношения. 2) Создание искусственного интеллекта для самообучения и самосовершенствования киберфизических структур, программ и процессов. 3) Нановыращивание компьютера путем аддитивного структурирования атомов. 4) Самое интересное решение связано с неотвратимостью естественного отказа человечества от функций управления биологическими, социальными и техническими объектами и процессами в пользу беспристрастных киберфизических систем!

Стадии эволюционирования киберпространства планеты иллюстрируют последовательные периоды перехода научно-технологической моды от пассивного мониторинга (отображения) физических, биологических и социальных процессов к активному киберуправлению на основе взаимодействия реальных и виртуальных структур: 1) 1980-е годы – формирование парка персональных компьютеров; 2) 1990-е го-

ды – внедрение Интернет-технологий в производственные процессы и быт человека; 3) 2000-е годы – повышение качества жизни за счет повсеместного использования мобильных устройств и облачных сервисов; 4) 2010-е годы – создание цифровой инфраструктуры мониторинга, управления и взаимодействия между собой стационарных и движущихся объектов, включая воздушный, морской, наземный транспорт и роботов; 5) 2015-е годы – создание глобальной цифровой инфраструктуры киберпространства, где все процессы и явления идентифицируются во времени и в трехмерном пространстве, постепенно превращаясь в интеллектуальные компоненты мониторинга и управления киберфизического пространства (Internet of Things, Smart Everything, Cyber-Physical Systems). При этом достаточно ясно прослеживается процесс интеллектуализации и интеграции физических и виртуальных систем: Embedded Systems – Networked Embedded Systems – Cyber Physical Systems – Internet of Things, Data and Services для решения научных, технологических, экономических, политических и социальных проблем. Интересна статистика структуры Internet of Things: 2010 – 12,5 млрд гаджетов имеют доступ к интернету; 2015 – 25 млрд; 2020 – 50 млрд. Конкретно, под структурно-технологическую дикцию киберфизических систем подпадают следующие отрасли: автомобильная промышленность, медицина, энергетика, автоматизация производства, мобильная связь, локация и навигация, сельское хозяйство, транспортная логистика, создание умных городов, зданий и домов, социальные сети и сообщества, организация дорожного движения, управление государственными структурами, экономическими, политическими, социальными, физическими и виртуальными процессами.

## 2. Состояние проблемы

Существующие мировые аналоги управления ресурсами (время, материалы, кадры и финансы). Анализ современных публикаций по теме проекта выявил определенные закономерности, которые можно оформить в следующие выводы. 1) Киберфизические системы – самая актуальная и перспективная технология активного совершенствования планеты в части точного цифрового мониторинга и адекватного управления ресурсами для улучшения качества жизни каждого человека и изменения экономики и экологии планеты в сторону озеленения. Данной технологии посвящены тысячи публикаций в приоритетных зарубежных источниках, прежде всего в IEEE Xplore. Наблюдается особая активность ученых из Китая, Германии и США. Наиболее близкие по теме

проекта статьи представлены в источниках [1-12], которые посвящены созданию киберфизического пространства планеты, но имеют один общий недостаток, связанный с наличием в системе управления человека, который всегда субъективно принимает ключевые решения. 2) Русскоязычные публикации не отличаются от англоязычных по существу, но их количество определяется десятками, что свидетельствует о наличии серьезной проблемы недостаточного внимания и мониторинга современных мировых трендов со стороны ученых славянского происхождения. 3) Сегодня уже активно работает европейская комиссия (Communications Networks, Content and Technology, European Commission Directorate General) по массовому созданию CPS на основе встроенных систем и умных датчиков интернета, что является приоритетным направлением политики практически всех ведущих компаний планеты для изменения экономики, производства и общества благодаря нарождающейся культуре киберуправления. 4) Что касается аналогов CPS, то серьезные рыночно-ориентированные разработки имеются в следующих компаниях: EIT ICT Labs, Lynntech, Intel, Robert Bosch Centre. Они рассматривают CPS как интеллектуальные технологические средства для выполнения физических операций на основе использования умных встроенных датчиков мониторинга и сбора данных от технологических процессов. Структуры CPS позволяют программным приложениям напрямую взаимодействовать с процессами в физическом мире, например, для измерения и коррекции артериального давления или пиков в потреблении электроэнергии, а в общем случае – для решения всех проблем реального мира. 5) Будущее CPS компании связывают с их внедрением: в систему охраны здоровья, управления обществом, ресурсами, транспортными средствами, возобновляемую зеленую энергетику. Также киберсистемы отождествляются с “умными” фабриками, домами и городами, критическими инфраструктурами, защитой информации и частной собственности, авиацией и космонавтикой. 6) Компании имеют интересных партнеров в университетской среде по созданию Cyber-Physical Systems: Budapest University of Technology and Economics, DFKI, Ericsson FBK, BMW, Fortiss, Royal Institute of Technology KTH, SICS, Siemens, Technical University of Berlin, Technical University of Munich, TNO, University of Bologna, University of Trento and VTT, Kaiserslautern Illinois, West Virginia, California, Berkeley, Oslo, Texas, Carnegie Mellon, Colorado. 7) Тем не менее, следует отметить, что прямые разработки, направленные на соз-

дание киберсистем управления ресурсами, финансами и кадрами без участия человека, практически отсутствуют. Имеются также публикации [13-17] авторов проекта, которые посвящены разработке теории и практики киберфизических систем активного интеллектуального управления транспортными средствами и ресурсами (время, деньги и кадры) на основе облачного мониторинга автомобильных гаджетов.

Интерес представляют официальные сайты компаний, которые анонсируют технологии решения проблем управления персоналом [18-25]. Например, IBM имеет сегодня Cognos Workforce Performance Talent Analytics – управление кадровым потенциалом для набора персонала, повышения квалификации, обеспечения преемственности и удержания кадров. Сервис, приобретенный компанией IBM за 1,3 миллиарда долларов, позволяет трудоустраивать граждан, оптимально использовать сотрудников, принимать обоснованные решения об улучшении их квалификации, искать и привлекать наиболее талантливых для формирования управленческого аппарата и стратегических планов, прогнозировать будущие потребности в персонале, материально и адекватно стимулировать работников с соответствии с HR-метрикой каждого из них. Как показал опрос 2013 года, 77% HR-менеджеров не представляют как влияют кадры на производительность труда компании, в то время как 44 процента руководителей используют потенциал талантов для принятия правильных решений. На рынке продуктов управления рабочей силой выступают компании SAP, Oracle and Big Blue, которые предлагают платформы: Talent Management Cloud, Human Capital, HR Analytics and Peoplesoft Human Capital Management, Workday, ADP, Ultimate, Infor (Lawson), CornerstoneOnDemand, Silkroad, SumTotal, Lumesse, Halogen, PeopleFluent, Saba, Kenexa (owned by IBM). Сегодня более 60% компаний делают инвестиции в технологии Big Data, Cloud Services и аналитические продукты, чтобы иметь data-driven киберуправление кадровыми ресурсами. Порядка 60% компаний в мире, по оценкам журнала Форбс, готовы купить программные системы управления персоналом. Компании замотивированы семью аргументами: продукты взрослеют и умнеют, их становится легко купить, появился удобный пользовательский интерфейс, системы способны интегрировать многочисленные программные средства компании, Big Data реально позволяет управлять кадрами – путем playing “Moneyball” with their people data, облачные технологии позволяют легко переключаться на новые сервисы управления кадрами, а талант стал навсегда стра-

тегическим товаром и главным вопросом каждого руководителя. Человеческий капитал, по оценке журнала Форбс, имеет индекс важности для решения проблем компании, организации, государства – 2,44; управление и выполнение операций 2,10; инновации 1,99; остальные 7 имеют индексы: отношения с потребителями 1,72; глобальная политика 1,68; правительственное регулирование 1,55; глобальная экспансия 1,31; корпоративный бренд и репутация 0,92; устойчивость 0,82 и вера в бизнес 0,46. Дуализм управления на основе Big Data и Cloud Services включает детерминизм – технологии управляют нами и волюнтаризм – мы управляем технологиями. Оба варианта в своем комплексном развитии приводят рынок облачных технологий управления к детерминизму на основе использования концепции киберфизических систем, где фигурируют огромные массивы данных, не всегда достоверной информации. Но умная аналитика движков по Big Data пространствам должна научиться формировать правильное решение. Leon Trotsky: “Tell me anyway – maybe I can find the truth by comparing the lies”. Скажи мне, что ты думаешь, в любой форме, а я сумею найти правду сравнением даже ложных высказываний. По данным журнала Форбс технология Big Data сгенерирует в 2015 году 3,7 триллиона прибыли в продуктах и сервисах, что означает появление на рынке 4,4 миллиона новых рабочих мест. Если учесть, что во всех компаниях мира заработная плата составляет 40% доходов, то управление персоналом сегодня есть самая важная проблема бизнеса. Главный вывод из сказанного – человечество настолько гениально и одновременно несовершенно, что оно не может объективно управлять самим собой! Человек гениален в творчестве и бездарен в самоуправлении. Таким образом, мировой рынок безальтернативно приходит к необходимости использования кибероблачного управления ресурсами и кадрами без участия человека.

Фундаментальная научно-технологическая проблема – «Создание киберфизического пространства цифрового мониторинга социально-технологических процессов и оптимального киберуправления ресурсами для достижения общественно значимых целей». Ресурсы: физические (материалы, кадры, ископаемые, растительный и животный мир, техника, инфраструктура) и виртуальные (время, финансы, технологии, информация, киберпространство) ценности, используемые для решения социально значимых проблем человечества.

Технология киберуправления ресурсами включает два облачных сервиса: 1) распределение государст-

венных заказов и финансов между структурами, предприятиями и организациями на основе соревнования матриц их компетенций по заданным метрикам; 2) распределение кадровых вакансий в масштабируемых социальных группах путем соревнования матриц компетенций претендентов по заданным метрикам. Метрика компетенций – способ измерения расстояния между объектами или процессами на основе вектора параметров, формирующего пространство или матрицу компетенций человека или социальной группы в реальном времени. Матрица компетенций – модель интегральной деятельности и умений человека или социальной группы на заданной метрике и временном интервале.

Цель исследования – создание масштабируемой киберфизической системы human-free управления виртуальными и физическими ресурсами – Resource Cyber Physical Systems (RCPS) – как облачного сервиса для социальных групп, государственных структур и частных компаний на основе цифрового мониторинга технологических процессов упомянутых субъектов в реальном времени для достижения общественно значимых целей и тотального устранения коррупции.

Задачи исследования:

1. Разработка модели киберфизического пространства на основе телекоммуникационного взаимодействия цифрового мониторинга социально-технологических процессов и оптимального облачного управления ресурсами для достижения социально значимых целей при использовании технологий Big Data & Services, Internet of Things & Smart Everything.
2. Разработка киберсистемы управления виртуальными и физическими ресурсами (RCPS) в виде масштабируемого облачного сервиса, предоставляемого социальным группам, государственным структурам, частным компаниям на основе цифрового мониторинга технологических процессов упомянутых субъектов в реальном времени для достижения общественно значимых целей.
3. Создание структуры масштабируемой киберфизической системы облачного управления персоналом на основе использования накопительного мониторинга всех видов активности человека или социальной группы, формирующего в реальном времени матрицу компетенций, для адекватного морального и материального стимулирования сотрудников.

### 3. Заключение

1. Основная идея – создание киберфизической системы гуманного, точного, цифрового управления человеческими, временными и материальными ресурсами, которая способна заменить деструктивное управ-

ление государственных чиновников и полностью исключить коррупцию, как систему отношений между людьми, уничтожающую морально-этические ценности человечества. Структура киберсистемы имеет два масштабируемых компонента: 1) точного наблюдения за результативной активностью персонала для формирования матрицы компетенций и 2) оптимального human-free управления ресурсами, которое способно ранжировать всех сотрудников и подразделения по результатам их деятельности для выработки адекватных моральных и материальных стимулирующих воздействий. Киберуправление ресурсами в масштабируемых субъектах осуществляется путем соревнования показателей матриц компетенций по заданным метрикам. Метрика компетенций – способ измерения расстояния между объектами или процессами на основе вектора параметров, формирующего пространство или матрицу компетенций человека или социальной группы в реальном времени. Матрица компетенций – модель интегральной деятельности и умений человека или социальной группы на заданной метрике и временном интервале. Предложен соревновательный подход к решению четырех актуальных рыночных задач для оптимального киберуправления ресурсами на основе построения матриц компетенций.

2. Киберфизическая система мониторинга и управления результативно и выигрышно масштабируется практически на все сферы человеческой деятельности, связанные с экономикой, политикой, социологией, наукой, образованием, энергетикой, охраной здоровья, управлением обществом, ресурсами, транспортными средствами. Киберфизические системы отождествляются с созданием “умных” фабрик, университетов, домов, городов и стран, критических инфраструктур, защитой информации и частной собственности, управлением авиацией и космонавтикой. Все перечисленное есть неполный перечень самых актуальных, для рынка, ведущих компаний и университетов мира, вопросов киберуправления физическими объектами и процессами.

3. Предложена новая модель управления университетом Cyber Physical System – Smart Cyber University, которая включает компоненты: 1) квалифицированные кадры, 2) умную инфраструктуру, 3) киберуправление и мониторинг без участия человека, 4) морально-этические отношения (законы, устав, приказы, деловой этикет), 5) направление движения – Roadmap (European Smart Cyber University) с выделенными внешними ресурсами (абитуриенты, время и деньги) для достижения цели – обеспечение высо-

кого качества жизни сотрудников и подготовка валидных для рынка специалистов.

4. Рыночная привлекательность киберсистемы – государственные структуры и частные предприятия стран мира, которые желают оптимально human-free управлять временными, человеческими и финансовыми ресурсами в строгом соответствии с законами государства. Социальная значимость киберсистемы направлена на: 1) тотальное уничтожение коррупции в действиях руководителей всех уровней государственных структур путем устранения субъективизма в управлении кадровыми и финансовыми ресурсами на основе передачи упомянутых функций чиновников независимому облачному киберсервису; 2) экономические, политические и социальные преобразования в сторону существенного улучшения морально-этических отношений, улучшения экологии планеты и повышения качества жизни граждан за счет оптимального киберуправления государственными ресурсами. Экономическая значимость внедрения умного киберуправления в масштабах страны – как минимум, 30%-е увеличение ВВП.

5. Перспективы дальнейшего развития киберфизических систем связаны с повсеместным внедрением точного цифрового мониторинга и активного (без участия человека) оптимального управления всеми физическими, биологическими, социальными, экономическими, технологическими, финансовыми, научно-образовательными процессами на планете, в странах, городах, организациях, предприятиях, социальных группах и домах.

**Литература:** 1. *Ahmed, S.H., Gwanghyeon Kim, Dongkyun Kim.* Cyber Physical System: Architecture, applications and research challenges. *Wireless Days, 2013 IFIP Conference:* 13-15 Nov. 2013. P. 1 – 5. 2. *Hoang, Dat Duc, Hye-Young Paik, and Chae-Kyu Kim.* Serviceoriented middleware architectures for cyber-physical systems // *International Journal of Computer Science and Network Security.* 2012. P. 79-87. 3. *Wu, Fang-Jing, Yu-Fen Kao, and Yu-Chee Tseng.* From wireless sensor networks towards cyber physical systems // *Pervasive and Mobile Computing.* 2011. P. 397-413. 4. *Sanislav, Teodora, and Liviu Miclea.* Cyber-Physical Systems-Concept, Challenges and Research Areas // *Journal of Control Engineering and Applied Informatics.* 2012. P. 28-33. 5. *Wan, J., Yan, H., Liu, Q., Zhou, K., Lu, R. and Li, D.* Enabling cyber-physical systems with machine-to-machine technologies // *Int. J. Ad Hoc and Ubiquitous Computing.* 2012. Vol. 9, No. 3/4. P.1-9. 6. *Insup Lee, Sokolsky. O.* Health Cyber Physical Systems, // 47th ACM/IEEE Design Automation Conference, Anaheim, 2010. P.13-18. 7. *Cheolgi Kim, Mu Sun, Sibin Mohan, Heechul Yun, Lui Sha, Tarek F. Abdelzاهر.* A Framework for the Safe Interoperability of Health Devices in the Presence of Network Failures // *Proceedings of the 1st ACM/IEEE International Confer-*

*ence on Cyber-Physical Systems, Stockholm, 2010. P. 149-158.* 8. *Yizheng Wang, Lefei Li, Liuqing Yang.* Cyber-Physical Social Systems. Intelligent Human Resource Planning System in a Large Petrochemical Enterprise. *Intelligent Systems, IEEE.* Volume: 28. Issue 4. 2013. P. 102–106. 9. *Zhong Liu; Dong-Sheng Yang; Ding Wen; Wei-Ming Zhang; Wenji Mao.* Cyber-Physical-Social Systems for Command and Control. *Intelligent Systems, IEEE.* Volume: 26, Issue. 4. 2011. P. 92 – 96. 10. *El-Tawab, S.; Olariu, S.; Almalag, M. Friend:* A cyber-physical system for traffic flow related information aggregation and dissemination. *World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM), 2012 IEEE International Symposium.* 2012. P. 1-6. 11. <http://controlengrussia.com/programmnye-sredstva/vstraivaemye-sistemy-upravleniya/> 12. *Ariane Hellinger, Heinrich Seeger.* Cyber-Physical Systems. Driving force for innovation in mobility, health, energy and production. *Acatech: 2011.* 47 p. 13. *Hahanov V., Mischenko A., Michele Mercaldi, Andrea D'Oria, Davide Murru, Hai-Ning Liang, Ka Lok Man, Eng Gee Lim.* Internet of things: a practical implementation based on a wireless sensor network approach // *Proc. of IEEE East-West Design and Test Symposium. Kharkov, Ukraine. 14-17 September, 2012. P. 486 - 488.* 14. *Hahanov V., Hahanova I., Guz O., Abbas M.A.* Quantum models for data structures and computing // *International Conference on Modern Problems of Radio Engineering Telecommunications and Computer Science (TCSET).* 2012. P. 291. 15. *Hahanov V.I., Guz O.A., Ziarmand A.N., Ngene Christopher Umerah, Areffev A.* Cloud Traffic Control System // *Proc. of IEEE East-West Design and Test Symposium. Rostov-on-Don, Russia.– 27-30 September, 2013. P.72-76.* 16. *Hahanov V., Gharibi W., Baghdadli Ammar Awni Abbas, Chumachenko S., Guz O., Litvinova E.* Cloud traffic monitoring and control // *Proc. of the IEEE 7th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS). Berlin, Germany. September 12-14, 2013. P. 244-248.* 17. *Afolabi D., Ka Lok Man, Hai-Ning Liang, Eng Gee Lim, Zhun Shen, Lei C.-U., Krilavicius T., Yue Yang, Cheng L., Hahanov V., Yemelyanov I.* A WSN approach to unmanned aerial surveillance of traffic anomalies: Some challenges and potential solutions // *East-West Design & Test Symposium.* 2013. P.1-4. 18. <http://www-01.ibm.com/software/analytics/solutions/operational-analytics/hr-analytics/>. 19. <http://www-03.ibm.com/software/products/ru/workforce-talent-analytics>. 20. [https://www14.software.ibm.com/webapp/iwm/web/signup.do?source=swg-BA\\_WebOrganic&S\\_PKG=ov15450&S\\_TACT=101KR64W&dynform=2981&lang=en\\_US](https://www14.software.ibm.com/webapp/iwm/web/signup.do?source=swg-BA_WebOrganic&S_PKG=ov15450&S_TACT=101KR64W&dynform=2981&lang=en_US). 21. <http://www.citeworld.com/article/2137364/big-data-analytics/how-hr-analytics-can-transform-the-workplace.html>. 22. <http://www.forbes.com/sites/joshbersin/2013/10/07/big-data-in-human-resources-a-world-of-haves-and-have-nots/>. 23. <http://www.forbes.com/sites/joshbersin/2013/02/17/bigdata-in-human-resources-talent-analytics-comes-of-age/>. 24. <http://www.hrzone.com/feature/technology/analysing-analytics-what-does-big-data-mean-hr/142802>. 25. *Ariane Hellinger, Ariane Hellinger, Heinrich Seeger.* Cy-

ber-Physical Systems. Driving force for innovation in mobility, health, energy and production. Acatech. National Academy of Science and Engineering. 2011. 48p.

Поступила в редколлегию 11.03.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

**Хаханов Владимир Иванович**, декан факультета КИУ, д-р техн. наук, профессор кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: проектирование и тестирование вычислительных систем, сетей и программных продуктов. Увлечения: баскетбол, футбол, теннис, горные лыжи. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +380 57 70-21-326, E-mail: [hahanov@kture.kharkov.ua](mailto:hahanov@kture.kharkov.ua).

**Обризан Владимир Игоревич**, старший преподаватель кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: облачные технологии, программирование мобильных платформ. Увлечения: путешествия. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +380 57 70-21-326, E-mail: [Volodymyr.obrizan@gmil.com](mailto:Volodymyr.obrizan@gmil.com).

**Мищенко Александр Сергеевич**, аспирант кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: облачные технологии, web-программирование. Увлечения: путешествия. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +380 57 70-21-326, E-mail: [santific@gmail.com](mailto:santific@gmail.com)

**Филиппенко Инна Викторовна**, канд. техн. наук, доцент кафедры АПВТ, зам. Декана факультета КИУ ХНУРЭ. Научные интересы: проектирование микропроцессорных устройств. Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +380 57 70-21-326, E-mail: [kiu@kture.kharkov.ua](mailto:kiu@kture.kharkov.ua).



УДК 004.093

## ОБРАБОТКА ВИДЕОЯРДА СПОРТИВНЫХ ИГР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРА ГАБОРА

ДУБРОВИН В.И., ТВЕРДОХЛЕБ Ю.В.,  
ПАНЧЕНКО Д.В.

Рассматриваются методы реализации автоматического постматчевого анализа, основанные на обработке видеоряда спортивной игры. Проводится анализ существующих методов распознавания объектов на игровом поле, а также методов фильтрации изображений. Разрабатывается эффективный метод обнаружения игроков на видеокадре.

### 1. Введение

На сегодняшний день статистическая аналитика в спорте играет важную роль. С помощью автоматического анализа можно существенно повысить эффективность тренировок, найти нужных команде игроков и повысить общий уровень игры.

Ключевую роль в автоматическом послематчевом анализе играет распознавание образов игроков и мяча на видеоизображении. Общий алгоритм распознавания включает следующие этапы [1]:

- фильтрация, в процессе которой происходит удаление помех и выделение наиболее значимых точек изображения;
- логическая обработка, включающая контурный анализ, морфологический анализ либо анализ по устойчивым признакам;
- обучение системы автоматического детектирования объектов в видеопотоке.

### 2. Анализ существующих методов распознавания объектов на игровом поле

Обычно распознавание объектов на поле производится по цветовым признакам [2] либо по признакам формы [3].

Метод, предложенный в [4], основывается на слежении за всеми объектами на сцене и принимает за мяч объект, который отслеживается продолжительнее всего. Этот метод даёт сбои, когда в кадр длительное время попадают линии поля.

Метод, предложенный в [5], позволяет обнаружить мяч по траектории и размеру.

В работе [6] описан метод, основанный на преобразовании Хафа, для идентификации расположения окружностей на изображении, который позволяет определять округлую форму мяча в кадре.

В работе [7] цветовые признаки, признаки формы и размера комбинируются для определения мяча в кадре.

В работе [8] предложен подход для разделения в кадре игроков и линий на поле на основании динамического фильтра Калмана.

В работе [9] предлагается метод обнаружения мяча и игроков, включающий 4 этапа. На первом этапе применяется алгоритм избавления от покрытия. Далее игроки и мяч выделяются с помощью оператора Собеля. Выделение линий поля производится на третьем этапе с использованием преобразования Хафа. На последнем этапе отсеиваются не удовлетворяющие различным критериям объекты. В результате последовательного выполнения всех этапов метод (рис. 1) даёт точные визуальные контуры игроков, но отсутствует какая-либо логическая информация о распознанных объектах.



Рис. 1. Метод обнаружения мяча и игроков

В предлагаемой работе исходными данными являются изображения большого масштаба, на которых мяч достаточно маленького размера и не всегда имеет округлую форму, игроки и мяч часто могут накладываться с линиями на поле и друг с другом. Поэтому стоит задача разработки эффективного метода обнаружения игроков на поле с извлечением логической информации об их взаимном расположении. Предлагается метод, состоящий из трёх этапов. На первом этапе производится фильтрация исходного изображения. На втором - ненужные объекты отбрасываются с помощью различных порогов. Третий этап включает в себя оконтуривание полученных объектов на изображении и определение геометрических центров игроков.

Наиболее важным этапом обнаружения игроков на поле является фильтрация исходного изображения.

### 3. Методы фильтрации изображений

3.1. *Бинаризация по порогу.* Существуют задачи [1], в которых самый простой метод фильтрации – это бинаризация по порогу. Для формата RGB изображений и изображений в градациях серого порогом является значение цвета. На рис. 2 представлен пример автоматического выделения предметов на белом листе бумаги.

Выбор порога, по которому происходит бинаризация, во многом определяет процесс самой бинаризации. В данном случае, изображение было бинаризовано по среднему цвету. Обычно бинаризация осуществляется с помощью

алгоритма, который адаптивно выбирает порог. Таким алгоритмом может быть выбор математического ожидания или моды порогового значения.

Отметим, что данный метод неприменим к задаче выделения игроков на изображениях из-за невозможности в большинстве случаев выбрать эффективный порог бинаризации.

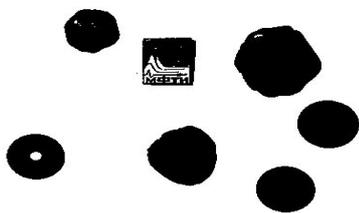
3.2. *Двумерное преобразование Фурье.* В задачах фильтрации изображений перспективно применение быстрого преобразования Фурье (БПФ) [10], в частности, его двумерной формы:

$$G_{uv} = \frac{1}{NM} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} x_{mn} e^{-2\pi j \left[ \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right]},$$

где  $N, M$  – размерность изображения;  $u$  и  $v$  – пространственные частоты;  $j = \sqrt{-1}$ .



а



б

Рис. 2. Бинаризация изображения: а – изображение до фильтрации; б – результат бинаризации исходного изображения

Обратное двумерное преобразование Фурье имеет вид:

$$x_{mn} = \sum_{u=1}^{N-1} \sum_{v=1}^{M-1} G_{uv} e^{2\pi j \left[ \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right]}.$$

На практике обычно используется свойство преобразования Фурье, согласно которому произведение образов функций в частотной области эквивалентно свертке этих функций во временной области. Для вычисления свертки необходимо преобразовать исходные данные в частотную область, т.е. вычислить преобразование Фурье, перемножить результаты преобразования и выполнить обратное преобразование Фурье, восстановив исходное представление. Такой способ занимает существенно меньше времени:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v),$$

где  $G$  – Фурье-образ результата свертки;  $H$  – Фурье-образ фильтра, а  $F$  – Фурье-образ исходного изображения.

Следовательно, в частотной области двумерная свертка заменяется поэлементным перемножением образов исходного изображения и соответствующего фильтра.

3.3. *Фильтры Гаусса.* При обработке изображений широко используется семейство фильтров на основании вещественной функции Гаусса [11]. Двумерный низкочастотный фильтр Гаусса выглядит следующим образом:

$$H(u, v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}},$$

а двумерный высокочастотный фильтр:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}},$$

$$\text{где } D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{N}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{M}{2}\right)^2}.$$

Применение низкочастотной фильтрации Гаусса для сглаживания зашумленного изображения показано на рис. 3, 4 [12].

Применение высокочастотной фильтрации Гаусса для выделения контуров на зашумленном изображении представлено на рис. 3, 5 [12].

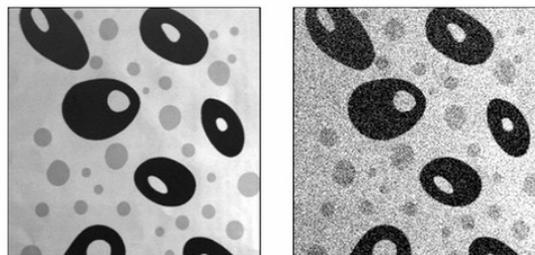


Рис. 3. Исходное (слева) и слабо зашумленное изображение (справа)

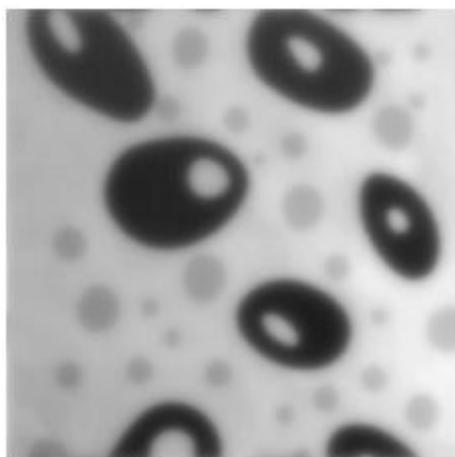


Рис. 4. Результат низкочастотной фильтрации Гаусса

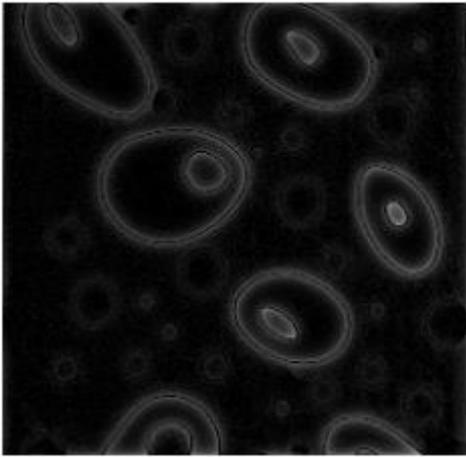


Рис. 5. Результат высокочастотной фильтрации Гаусса

3.4. *Фильтры Габора*. Фильтры Габора (рис. 6) принадлежат к семейству полосовых фильтров [10, 11]. Полосовые фильтры способны выявить диапазон частот сигнала в определенном промежутке и направлении, их широко используют для определения контуров на изображениях.

Импульсная переходная характеристика фильтра Габора определяется в виде произведения гауссовской функции на гармоническую:

$$\text{Gabor}(x, y, \lambda, \theta, \psi, \sigma, \gamma) = \exp\left(-\frac{x'^2 + \gamma^2 y'^2}{2\sigma^2}\right) \cos\left(2\pi\frac{x'}{\lambda} + \psi\right)$$

где  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ ;  $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$ ;  $\lambda$  - длина волны множителя-косинусы;  $\theta$  - определяет ориентацию нормали параллельных полос функции Габора в градусах;  $\psi$  - сдвиг фаз в градусах;  $\gamma$  - коэффициент сжатия, характеризующий эллиптичность функции Габора.

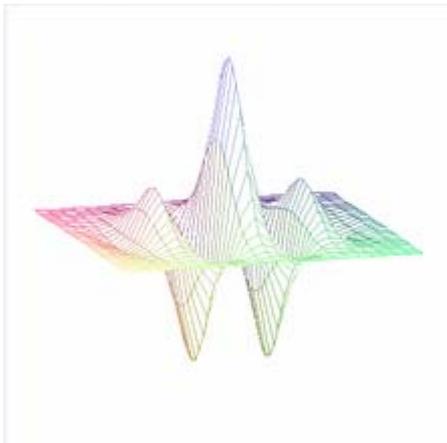


Рис. 6. Пример двумерного фильтра Габора

#### 4. Применение фильтров Габора к задаче выделения контуров игроков на видеоизображении

Сравнение результатов применения описанных в предыдущем разделе методов к задаче фильтрации игроков (таблица) показало эффективность фильтров Габора.

Сравнение методов фильтрации игроков для обработки видеоряда футбольного матча

Метод фильтрации	Время обработки фильтром	Эффективность, процент отфильтрованной полезной информации
Пороговая бинаризация	35 мс	20-40
Преобразование Фурье	300 мс	10-20
Фильтры Гаусса	400 мс	30-60
Фильтры Габора	900 мс	60-90

Обработка изображения фильтром Габора достигается путем усреднения значений обрабатываемого изображения по некоторой области в каждой точке. Соответственно, наложение фильтра Габора на изображение имеет вид:

$$I'(x, y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I\left(x - \frac{n}{2} + i, y - \frac{n}{2} - j\right) G(i, j).$$

На рис. 7 представлено наложение подобранного фильтра Габора на изображение футбольного матча. Подобранный фильтр Габора представлен на рис. 8 и определяется следующим выражением:

$$\text{Gabor}(x, y) = \exp\left(-\frac{x'^2 + 100y'^2}{2 * 49}\right) \cos(2\pi x' + 90).$$

В результате фильтрации удалось точно выделить игроков определенной команды.

Далее к результатам фильтрации необходимо применять различные методы анализа изображений. На рис. 9 представлено оконтуривание алгоритмом Фримена [1] изображения, отфильтрованного фильтром Габора, для выделения на исходном изображении расположения игроков (см. рис. 7).



Рис. 7. Исходное изображение футбольного матча

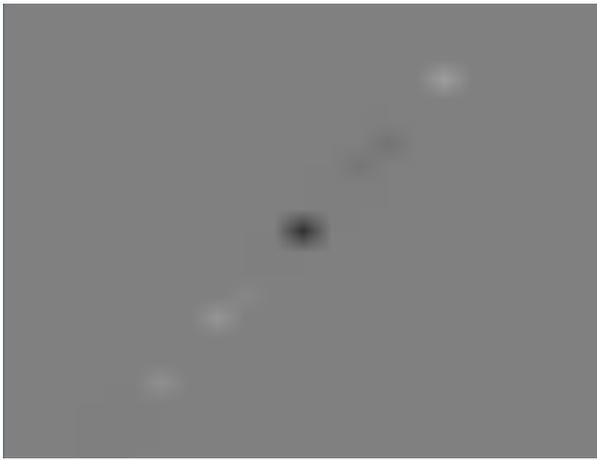


Рис. 8. Графическое изображения фильтра Габора



Рис. 9. Обнаружение игроков на исходном изображении

## 5. Выводы

Проанализированы существующие методы распознавания игроков и мяча на изображениях, а также наиболее распространенные методы фильтрации изображения (бинаризация по порогу, быстрое преобразование Фурье, фильтры Гаусса, фильтры Габора).

Продемонстрирована целесообразность применения фильтров Габора для фильтрации изображений в целях выделения на них игроков определенной команды.

*Научная новизна исследования* состоит в разработке эффективного метода обнаружения игроков на поле с извлечением логической информации об их взаимном расположении. Сущность предлагаемого метода состоит в фильтрации исходного изображения, применении пороговой обработки, оконтуривании полученных объектов на изображении и определении геометрических центров игроков.

*Практическая значимость.* Применение фильтров Габора к задаче выделения контуров игроков на видеоизображении позволяет существенно повысить эффективность тренировок, найти нужных команде игроков и повысить общий уровень игры.

**Литература:** 1. Сообщество любителей робототехники Robocraft [Электронный ресурс]. Режим доступа к ресурсу: <http://robocraft.ru>. 2. Xiao-Feng Tong. An Effective and Fast Soccer Ball Detection and Tracking Method / Xiao-Feng Tong, Han-Qing Lu, Qing-Shan Liu // Proceedings of the Pattern Recognition, 17th International Conference, August 23-26 2004. Stockholm, 2004. Vol. 4. P. 795 – 798. 3. T. D'Orazio. A Ball Detection Algorithm for Real Soccer Image Sequences / T. D'Orazio, N. Ancona, G. Cicirelli, M. Nitti // Proceedings of the 16th International Conference on Pattern Recognition, August 11-15. Stockholm, 2002. Vol. 1. P. 210 – 213. 4. Liang D. A scheme for ball detection and tracking in broadcast soccer video / D. Liang, Y. Liu, Q. Huang, W. Gao // Pacific-Rim Conf. Multimedia. – Nanjing, China, 2005. P. 864 – 875. 5. Yu X. Trajectory-based ball detection and tracking in broadcast soccer video / X. Yu, C. Xu, H. W. Leong // IEEE Transactions on Multimedia. 2006. Vol. 8, №6. P. 1164 – 1178. 6. T. D'Orazio. A new algorithm for ball recognition using circle Hough transform and neural classifier / T. D'Orazio, C. Guaragnella // Pattern Recognition, Elsevier. 2004. Vol. 37, № 3. P. 393 – 408. 7. X. F. Tong. An effective and fast soccer ball detection and tracking method / X. F. Tong, H.-Q. Lu // International Conference on Pattern Recognition. Stockholm 2004. Vol. 4. P. 795–798. 8. Jong-Yun Kim. Soccer Ball Tracking using Dynamic Kalman Filter with Velocity Control / Jong-Yun Kim, Tae-Yong Kim // Sixth International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization, 11-14 Aug. Tianjin, China, 2009. P. 367 – 374. 9. Naushad M. M. Ali. An Efficient Algorithm for Detection of Soccer Ball and Players [Электронный ресурс] / M. M. Naushad Ali, M. Abdullah-Al-Wadud – Department of Industrial and Management Engineering Hankuk University of Foreign Studies, 2012. <http://www.scribd.com/doc/229768789/Detecting-Soccer-Ball-and-Players>. 10. Wiki – техническое зрение. Technical Vision [Электронный ресурс]. 2014. Режим доступа к ресурсу: <http://wiki.technicalvision.ru>. 11. Кермани А. Коланкех. Нахождение параметров и удаление постоянной составляющей фильтрами Габора для обработки изображений / А. Кермани Коланкех, В.Г. Спицын, Ф. Хамкер // Известия Томского политехнического университета. Томск. 2011. Т. 318, №5. С. 57 – 59. 12. Dayan P. Theoretical Neuroscience: Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems / P. Dayan, L.F. Abbor Cambridge: MIT Press, 2001. 576 с.

Поступила в редколлегию 14.02.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Кириченко Л.О.

**Дубровин Валерий Иванович**, канд. техн. наук, профессор, зав. кафедрой программных средств Запорожского национального технического университета (ЗНТУ). Адрес: Украина, 69063, Запорожье, ул. Жуковского, 64, e-mail: [vdubrovin@gmail.com](mailto:vdubrovin@gmail.com)

**Твердохлеб Юлия Владимировна**, аспирантка кафедры программных средств ЗНТУ. Адрес: Украина, 69063, Запорожье, ул. Жуковского, 64, e-mail: [julia.tverдохleb@gmail.com](mailto:julia.tverдохleb@gmail.com)

**Панченко Дмитрий Викторович**, аспирант кафедры программных средств ЗНТУ. Адрес: Украина, 69063, Запорожье, ул. Жуковского, 64, e-mail: [panchenko.dm@gmail.com](mailto:panchenko.dm@gmail.com)



УДК 004.42

## СПЕЦИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙ СИСТЕМ ПІДТРИМКИ МЕДИЧНИХ КАРТОК

НЕЧИПОРЕНКО Ю. Л.

Здійснюється огляд інтернет-джерел стосовно специфікації функцій систем підтримки електронних медичних карток. Враховуючи існуючу тенденцію залучення мобільних пристроїв до ведення масиву медичних даних доцільна розробка ЕМК, яка може бути встановлена на особистому мобільному пристрої користувача.

### Вступ

На даний час відома достатньо велика кількість електронних медичних інформаційних систем (МІС) [2-7]. Одним з центральних і невід'ємних компонентів МІС, який ідентифікує пацієнта, є електронна медична картка. Медична картка форми № 025/о є індивідуальною та має містити інформацію, зміст та обсяг якої встановлено затвердженою інструкцією [13]. У разі ведення форми № 025/о в електронному форматі вона повинна включати в себе всі дані, які містяться на затвердженій формі паперового носія інформації.

*Мета дослідження* – огляд сучасних систем підтримки електронних медичних карток (ЕМК).  
*Методи дослідження* - вивчення джерел, спостереження, опис, порівняння.

### Сутність дослідження

Проведено огляд характеристик ЕМК, що розроблено в відомих МІС вітчизняних та закордонних розробників: "EMCiMED", "Доктор Елекс", "MedTime", "Medwork", "МЕДІАЛОГ", "PIAMC", за інформацією викладеною на сайтах [2-7].

"EMCiMED" організовано за модульною структурою. Кожен модуль виконує окрему функцію: реєстратура, амбулаторія, стаціонар, швидка допомога, лабораторія, фінанси тощо. Кожен модуль може працювати автономно, але за умови використання ядра системи, яке виконує функції ведення довідкової інформації для забезпечення реєстрації документів (подій) в організації, а також містить базу ЕМК, яка є складовою модуля "Реєстратура".

В модулі "Реєстратура" виконується "пошук картки (ЕМК)", в модулі "Амбулаторія" ведуться "амбулаторні карти", в модулі "Стаціонар" - "історії хвороби", в модулі "Швидка допомога" здійснюється "перегляд та реєстрація інформації в ЕМК під час роботи лікарської бригади за межами клініки". На жаль, на сайті не надано зовнішній

вигляд названих документів, а вигляд талона амбулаторного пацієнта, виписки з медичної карти амбулаторного (стаціонарного) хворого не дають інформації про повноту відповідності ЕМК вимогам МОЗУ. Медична карта стоматологічного хворого в EMCiMED відповідає формі 043/о. Окрім "Медичної карти амбулаторного хворого -026/о" в EMCiMED передбачено застосування таких карток як "Історія розвитку дитини 112/о", "Картка особи, яка підлягає медичному огляду -123/о", "Лікувальна карта призовника 053/о" тощо, разом 16 видів медичних карток. Передбачена можливість роботи з мобільними пристроями, які мають працювати під управлінням ОС Windows Mobile 5.0 або вище. Встановлення на ньому MS SQL 2005 Mobile, разом з локальною БД, дозволяє проведення автономної роботи віддаленим користувачам в умовах відсутності зв'язку з основним сервером даних. Синхронізація даних з основною БД виконується за запитом користувача. Клієнтська програма для мобільного пристрою виконана у вигляді основного модуля-завантажувача та набору програмних модулів, оновлення яких може виконуватися окремо. Комунікація з web-сервісом EMCiMED здійснюється за протоколом HTTP через з'єднання Wi-Fi або GPRS. Надано демоверсію програми, для її користування необхідна наявність логіна та пароля [2].

В ЕМК пацієнта МІС "Доктор Елекс" зберігається вся інформація про пацієнта - реєстраційні дані, результати оглядів лікаря, антропометричні виміри, лабораторні обстеження та різноманітні графічні дані (УЗД, рентген тощо). На жаль, на сайті не надано повний вигляд ЕМК, тому не можна визначити повноту відповідності ЕМК вимогам МОЗУ. Для введення даних в МІС та ЕМК "Доктор Елекс" замість набору тексту на клавіатурі застосовано технологію використання деревовидних шаблонів, яка дозволяє використовувати стандартний набір професійних термінів та виразів. Дані можна експортувати і надавати пацієнтам на мобільних носіях у зручному для них форматі, доступному для перегляду на будь-якому комп'ютері. Реалізована функція доступу персоналу клініки до ЕМК пацієнта з комп'ютерів локальної мережі медичної установи і віддаленого доступу з домашнього комп'ютера. Для забезпечення конфіденційності медичної інформації доступ до ЕМК і певних її секцій чітко регламентовано. В системі також ведеться протокол редагування, видалення та друку медичних даних [3].

Програма для автоматизації поліклініки "MedTime" складається з ряду автоматизованих робочих місць (АРМ) – приймального покою, реєстратури, лікаря поліклініки, стаціонару, лабораторії тощо. "MedTime" стежить за правильністю заповнення електронної історії хвороби (форма 003у/о), нагадує, якщо не вказані деякі значення (діагноз,

дата виписки тощо). Є вбудований, редагований довідник лікарських засобів. На сайті "MedTime" [4] є демоверсія для огляду та використання програми.

Система "MedWork" ("Мала клініка") призначена для невеликих клінік і приватних кабінетів, забезпечує введення, збереження та обробку інформації на всіх основних етапах лікувального процесу. Заповнення ЕМК в системі ведеться з використанням формалізованих схем лікування, що поповнюються, і довідників, що налаштовуються. Архітектура системи є відкритою, це робить можливим підключення до неї програмних модулів, розроблених користувачами, що дозволяє функціонально розширювати систему по мірі розширення клініки або введення нових схем лікування. "MedWork" є комплексним рішенням. Ключовим поняттям системи є профіль: реєстратура, приймальне відділення тощо. В типовій конфігурації розроблено більше 60 профілів для різних типів медустанов. ЕМК відповідає вимогам державного стандарту «Електронна історія хвороби» (ГОСТ Р 52636-2006). Забезпечена безпека доступу до ЕМК з урахуванням прав доступу користувачів до медичної інформації, затвердженої в медичній установі. Дозволяє в електронному вигляді передавати пацієнту його ЕМК на різних носіях у форматі, доступному для перегляду на комп'ютері. Є можливість віддаленої роботи з розкладом роботи лікарів і кабінетів через портал [www.medihost.ru](http://www.medihost.ru) [5].

МІС "МЕДІАЛОГ" розроблено як комплексне рішення, вона складається з модулів і опцій. Кожен модуль містить певні функціональні можливості, які дозволяють медичній установі автоматизувати певні види своєї діяльності. Кожна опція включена до одного з модулів і містить додаткову функціональність, відсутню в базовому постачанні модуля. Система "МЕДІАЛОГ" автоматизує всі аспекти управління клініко-діагностичною лабораторією, а також забезпечує інтеграцію із зовнішніми інформаційними системами [6].

Розробником МІС "РІАМС" є московська фірма "Медкор", ініціаторами - організації з інформатизації охорони здоров'я в Росії і МОЗ. "РІАМС" реалізована як єдина регіональна багаторівнева система управління, що передбачає створення єдиної інформаційної бази для лікувально-профілактичних установ, територіальних органів управління охороною здоров'я всіх рівнів, страхових медичних організацій регіону. Застосування ЕМК як окремого документа в "РІАМС" не передбачено [7]. Проект Google Health (діяв протягом 2009-2011 рр.) був задуманий як онлайн сховище інформації медичного характеру. Користувачі служби могли завантажувати на сервери в інтернеті відомості про стан свого здоров'я та історії хвороби, а також

обмінюватися даними з лікарем. Google Health мав вбудовану систему повідомлень, яка попереджала користувачів про можливі негативні наслідки прийому тих чи інших лікарських препаратів. На думку представників команди розробників проект зазнав невдачі не тільки тому, що він мав вузьку спеціалізацію (це одна з причин), але й тому, що в США, які є світовим лідером у впровадженні ІТ, електронні системи в медицині ще не отримали належного розповсюдження [8].

Microsoft HealthVault являє собою веб-платформу від Microsoft для зберігання і підтримки здоров'я та фізичної інформації. Експлуатація сайту почалась з 2007 р. і можлива як для осіб, так і для медичних працівників. З 2010 року Microsoft HealthVault був запуснений також і у Великобританії, сайт [www.healthvault.co.uk](http://www.healthvault.co.uk). Людина взаємодіє з HealthVault-запис через сайт HealthVault, або, як правило, через додаток, який спілкується з платформою HealthVault. HealthVault дозволяє завантажувати дані від деяких пристроїв, таких як вимірювачі частоти серцевих скорочень, монітори артеріального тиску і Wi-Fi-ваги і тонометр, що підключаються до iOS. Вона також може бути використана для пошуку і завантаження драйвера для медичного обладнання. HealthVault підтримує зберігання медичних зображень на основі DICOM, які через центр зв'язку можуть завантажувати і викачувати споживачі, а також треті сторони. HealthVault підтримує багато форматів, включаючи стандарти США з обміну, такі як Continuity of Care Document (CCD) та Continuity of Care Record (CCR) [9].

World Medical Card розроблено з метою організувати доступ до персональної медичної інформації в міжнародному масштабі. World Medical Card сьогодні складається з трьох основних елементів: онлайн веб-профіль здоров'я ("onWeb"); WAP-основи мобільних додатків телефону, яка надає доступ до даних, що можуть бути перекладені на мову за вибором ("OnMobile"); фізичних (тобто не електронних) карт зі стислим резюме здоров'я власника інформації ("onCard") [10].

Dossia є системою обслуговування персональних медичних записів (ПМЗ). Поряд з HealthVault Microsoft і Google, Google Health, Dossia є одним з найбільших систем ПМЗ в світі. Dossia заснована на програмному забезпеченні з відкритим вихідним кодом, випустила свій API влітку 2009 року. Відрізняється від традиційних послуг ПМЗ, надаючи користувачеві доступ до медичної інформації, незалежно від медичного страхування, роботодавця або лікаря. Користувачі мають можливість завантажувати свої записи в електронній формі у будь-який час [11].

## Висновки

*Отримані результати:* стисла специфікація функцій систем підтримки ЕМК, яка наведена в таблиці.

В розглянутих системах ЕМК реалізовано порізному: як документ, який застосовується виключно в рамках МІС (EMCiMED, MedTime, Medwork, МЕДІАЛОГ); може експортуватись і надаватись пацієнтам на мобільні носії (EMCiMED); "onWeb" та "OnMobile" (Google Health, MS HealthVault, World Medical Card, Dossia); у спрощеному вигляді для мобільного пристрою з можливістю встановлення додаткових модулів (Android market). Враховуючи існуючу тенденцію залучення мобільних пристроїв та носіїв інформації до ведення масиву медичних даних доцільна розробка вітчизняного аналогу ЕМК, яка

може бути встановлена на особистому мобільному пристрої користувача (пацієнта). Відповідність форми ЕМК в МІС, які заявлено як такі, що прийняті в експлуатацію в Україні, вимогам МОЗУ потребує окремого вивчення, але слід відмітити, що не всі поля, які встановлені інструкцією МОЗУ щодо форми 025/о, наявні в ЕМК розглянутих МІС.

*Практичне значення:* специфікацію функцій ЕМК, яка сформована в результаті аналітичного огляду джерел, доцільно врахувати при проектуванні ЕМК, що має бути розміщена на мобільному пристрої.

*Подальший розвиток* системи може здійснюватись в напрямі організації сполучення мобільної ЕМК з різними МІС медичних закладів, застосування інтернет-сервісів.

Функціональність	ЕМК, МІС									
	Емсімед	Доктор Елекс	MedTime	Medwork	Медіалог	Google Health	MS HealthValue	World Medical Card	Dossia	Android market
Кількість форм ЕМК	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Відповідність форм ЕМК вимогам національних стандартів	+/-	+/-	+	+/-	+	+/-				
Підтримка HL7							+			
Розміщення ЕМК на мобільному пристрої	+						+	+		
Застосування шаблонів при вводі тексту	+	+	+	+	+					
Видача даних на мобільний носій пацієнту		+	+	+		+	+	+	+	+
Онлайн веб-профіль здоров'я						+	+	+	+	
Зберігання медичних зображень на основі DICOM	+	+			+		+	+		
Довідник захворювань МКХ-10				+	+					+
Довідник лікарських препаратів (VIDAL)			+		+					+
Інші Інтернет-сервіси	-			+		+	+	+	+	+
Можливість здійснювати помітки безпосередньо на рисунку в ЕМК					+					
Графіки, що показують зміну чисельних показників (вага, лейкоцити в крові тощо) в ЕМК					+					
Взаємодія зі сканером, цифровою камерою					+					

**Література:** 1. Медична картка пацієнта. <http://www.moz.gov.ua/ua/portal>. 2. МІС"EMCiMED". <http://mcmmed.ua/>. 3. МІС"ДокторЕлекс". <http://doctor.eleks.com/Home-uk.aspx>. 4. МІС "MedTime". <http://www.med-soft.net/>. 5. МІС "Medwork". <http://www.medwork.ru/>. 6. МІС "МЕДІАЛОГ". <http://www.medialog.ru/>. 7. МІС "PIAMC". <http://www.medcom.ru/>. 8. Проект Google Health. <http://www.google.com/health/>. 9. Веб-платформа Microsoft. <http://www.healthvault.com/>. 10. World Medical Card. <http://www.wmc-card.com/>. 11. Personal health record service Dossia. <http://www.dossia.org/>. 12. Додатки для Android. <http://www.android-market.com.ua/>. 13. Нечипоренко Ю. Л. Системи підтримки електронних медичних карток // Запорозький медичний журнал. 2013. №1. С. 103-105.

Надійшла до редколегії 19.02.2014

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук Корніч Г. В.

**Нечипоренко Юрій Леонідович**, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри програмування та інформаційних технологій, Енергодарський інститут державного та муніципального управління ім. Р. Г. Хеноха "Класичного приватного університету". Наукові інтереси: ПЗ для медичних інформаційних систем, фотоперетворювачі. Хоббі: гірський туризм, баскетбол, фото. Адреса: Україна, 71503, м. Енергодар Запорізької обл., вул. Комсомольська, 3а; тел./факс (06139) 33235, e-mail: humaniver.pro@gmail.com

## МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ МУЛЬТИМЕДІЙНИХ ВЕБ-СИСТЕМ

*РИШКОВЕЦЬ Ю. В.*

Оглядаються вітчизняні та міжнародні стандарти оцінювання якості програмного забезпечення. Пропонується метод оцінювання якості мультимедійних Веб-систем на прикладі Веб-галерей, який передбачає визначення показників якості на основі класифікованих функціональних можливостей.

### 1. Вступ

Для оцінювання якості програмних продуктів існує багато різноманітних моделей та стандартів як національних, так і міжнародних. Поряд з цим часто використовують методи оцінювання якості схожих програмних продуктів, які за необхідності доповнюють певними показниками якості. Але інколи треба суттєво модифікувати та уточнити існуючі стандарти чи методи оцінювання якості програмних продуктів для їхнього подальшого застосування до певного виду програмного забезпечення.

Метою дослідження є розробка методу оцінювання якості мультимедійних Веб-систем.

### 2. Аналіз методів оцінювання програмних продуктів

На сучасному етапі становлення інформаційного суспільства мультимедійні Веб-системи є невід'ємною компонентою більшості ресурсів глобального середовища World Wide Web, тому вони мають довільні форми подання та різну функціональність, які переважно залежать від індивідуального бачення власника чи розробника відповідного ресурсу.

Для створення якісного програмного продукту розробник повинен користуватися різноманітними технологіями та стандартами побудови якісного програмного забезпечення (ПЗ). Якість програмного забезпечення визначається набором загальних характеристик, які відображають погляд користувача.

Сьогодні немає окремого підходу щодо оцінювання якості мультимедійних Веб-систем, а вирішення цієї задачі дасть змогу підвищити їхню якість.

Розглянемо вирішення задачі для схожих Веб-систем, зокрема на прикладі Веб-галереї.

Найбільш схожим до Веб-галереї за структурою є Веб-форум, про що свідчать такі аналогії:

- 1) розділ Веб-форуму відповідає тематичному розділу Веб-галереї;
- 2) дискусія Веб-форуму ставиться у відповідність експозиції Веб-галереї;
- 3) опитування у Веб-форумі аналогічне голосуванню у Веб-галереї;
- 4) дописи користувачів Веб-форуму прирівнюються до коментарів експозиції Веб-галереї.

На основі цих тверджень Веб-форум та Веб-галерея за структурою є аналогами, тому розглянемо оціню-

вання ефективності Веб-форуму, щоб визначити, чи застосовний цей підхід для оцінювання якості Веб-галереї.

У [1] досліджується задача підвищення ефективності Веб-форуму, в якій важлива роль відводиться якості ПЗ. Оцінювання ефективності Веб-форуму автор здійснює на основі міжнародного стандарту оцінювання якості програмних продуктів ISO/IEC 9126 [2, 3]. Крім того, оцінювання Веб-форуму ґрунтується на аналізі дописів користувачів, а оскільки аналогом допису є коментар, то підвищення ефективності Веб-галереї може здійснюватись на основі критеріїв підвищення ефективності Веб-форуму (оцінювання допису, коментар допису). Зауважимо, що основним призначенням Веб-галереї є подання релевантної мультимедійної інформації користувачу, а не збільшення кількості якісних коментарів. Тому підвищення ефективності Веб-галереї на основі критеріїв підвищення ефективності Веб-форуму застосовне лише у частині, що стосується голосувань та коментарів.

Виходячи з цього, критерії підвищення ефективності Веб-форуму не дають змоги у повному обсязі оцінити якість Веб-галереї, тому розглянемо інші підходи щодо оцінювання якості програмного продукту, зокрема Веб-галереї.

До відомих моделей якості програмного продукту належать моделі Маккола, Боема, Ваттса, Дюча і Віліса, а також модель ISO/IEC 25010 [4- 8]. Кожна з цих моделей є удосконаленням попередньої [9].

Міжнародний стандарт якості програмного продукту ISO/IEC 25010 складається з таких частин:

- модель якості;
- показники якості:
  - зовнішні метрики оцінюють якість робочого програмного продукту;
  - внутрішні метрики оцінюють якість під час розробки програмного продукту та на етапі тестування;
  - метрики якості використання оцінюють якість під час використання програмного продукту у специфічному середовищі та контексті.

Крім того, поняття якості програмного забезпечення та її складові характеристики описані у таких державних стандартах України:

- ДСТУ 2844-94;
- ДСТУ 2850-94;
- ДСТУ ISO/IEC 12119:2003.

Стандарт ДСТУ 2844-94 описує базові показники якості та їхні підхарактеристики, а два інші стандарти якості ПЗ лише доповнюють ці показники новими підхарактеристиками [10-12].

ISO/IEC 25010 дає змогу оцінити якість програмного продукту за більшою кількістю показників, ніж національні стандарти якості ПЗ, які описують показники якості, аналогічні характеристикам міжнародного

стандарту. При цьому національні стандарти не лише містять меншу кількість показників якості, а й визначають різні вимоги щодо якості за певними характеристиками.

### 3. Метод оцінювання якості мультимедійних Веб-систем

Для оцінювання якості Веб-галерей не існує спеціальної моделі оцінювання якості. Національні стандарти якості ПЗ не можуть бути використані для проведення оцінювання якості Веб-галерей внаслідок обмеженості набору під характеристик, характеристик практичності та мобільності. Отже, для оцінювання якості Веб-галерей використаємо міжнародний стандарт ISO/IEC 25010, зокрема, його зовнішні метрики [13], тому що у нашому дослідженні потрібно оцінити якість функціонуючих Веб-галерей.

Крім того, вибір підхарактеристик стандарту ISO/IEC 25010, за якими необхідно провести оцінювання Веб-галереї, зумовлений вимогами, згідно з якими вона повинна мати такі властивості:

- забезпечувати певну множину функцій з певним ступенем точності, а також неперервне використання інформації;
- бути зрозумілою користувачу, зручною у роботі та легкою у вивченні;
- забезпечувати адаптацію до певних особливостей організаційного середовища;
- взаємодіяти з іншими системами.

Більшість характеристик стандарту ISO/IEC 25010 не

відповідає сформульованим вимогам, що ставляться до якості Веб-галерей, оскільки визначення цих характеристик залежать від конкретних апаратних та програмних засобів, навиків або поведінки користувача у певній ситуації, розподілу прав доступу і тому є непридатними для оцінювання якості Веб-галереї. Отже, для оцінювання якості Веб-галереї використовуються такі з них:

1. Функціональна придатність:
  - функціональна повнота;
  - функціональна правильність.
2. Сумісність:
  - здатність до взаємодії.
3. Практичність:
  - доцільність розпізнавання;
  - придатність до вивчення.
4. Мобільність:
  - адаптованість.

Для визначення показників якості згідно зі стандартом ISO/IEC 25010 необхідно розробити систему оцінювання якості Веб-галерей та визначити систему розрахунку показників якості мультимедійної Веб-системи на її основі.

Проаналізувавши понад 500 авторитетних і популярних сайтів з Веб-галереями та враховуючи вимоги, які ставляться до Веб-галерей, ми сформували перелік функціональних можливостей [14], який класифіковано за категоріями, поданими у таблиці.

№ з/п	Категорія	№ з/п	Функціональна можливість
1	Опис	1	Текстовий опис
		2	Прив'язка зображення до географічного розташування
		3	Хмарка тегів
		4	Графічна мітка
		5	Медіа опис
2	Перегляд	6	Перегляд зображення
		7	Перегляд місцезнаходження зображення на географічній карті
		8	Перегляд графічної мітки
		9	Здійснення віртуальної подорожі
		10	Перегляд медіа
		11	Перегляд слайд-шоу
		12	Перегляд певної групи зображень (експозиція)
		13	Перегляд випадкового зображення
3	Оцінювання	14	Оцінювання зображення
		15	Коментар зображення
4	Взаємодія	16	Зовнішні посилання
		17	Вкладення та поширення в інші Веб-ресурси
		18	Консолідація інформаційного наповнення
5	Адаптація	19	Адаптація структури інформаційного наповнення

Підвищення ефективності Веб-галереї на основі функціональної категорії “Оцінювання” розглядати не будемо, тому що саме на основі її функціональних можливостей вирішується задача підвищення ефективності різних Веб-систем, зокрема Веб-форумів.

*Функціональна повнота* – це властивість програмного продукту забезпечити відповідну множину функціональних можливостей для вказаних задач і цілей користувача:

$$\text{Quality}_{\text{PL}}^{(1)} = 1 - A^{(1)} / B^{(1)}, \quad 0 \leq \text{Quality}_{\text{PL}}^{(1)} \leq 1, \quad (1)$$

де  $A^{(1)}$  – кількість нереалізованих функціональних можливостей;  $B^{(1)}$  – загальна кількість функціональних можливостей.

Даний показник якості визначається на основі всіх функціональних можливостей, поданих у таблиці.

*Функціональна правильність* – властивість програмного продукту забезпечувати правильні, узгоджені результати або дії із заданим ступенем точності. Вона оцінюється за такими метриками:

- коректність;
- похибка обчислень.

Функціональну правильність оцінимо за похибкою обчислень, тому що інша метрика безпосередньо залежить від реалізації даних за певним стандартом точності:

$$\text{Quality}_{\text{PL}}^{(2)} = 1 - A^{(2)} / B^{(2)}, \quad 0 \leq \text{Quality}_{\text{PL}}^{(2)} \leq 1, \quad (2)$$

де  $A^{(2)}$  – кількість переглянутих предметів, що не відповідають інтересам користувача;  $B^{(2)}$  – час перегляду Веб-галереї (за замовчуванням 40 хв.).

Таким чином, функціональна правильність визначається на основі функціональних можливостей категорії “Перегляд” (таблиця).

*Здатність до взаємодії* – це властивість програмного продукту забезпечити обмін інформацією з іншими системами та використання отриманої інформації. Вона оцінюється за такими метриками:

- з'єднання із зовнішньою системою;
- обмін даними на основі форматів даних.

Здатність до взаємодії оцінимо лише на основі обміну даними, що ґрунтується на форматах даних, тому що перша метрика повністю залежить від функцій та команд, які передаються між програмним забезпеченням та іншими системами чи обладнанням:

$$\text{Quality}_{\text{PL}}^{(3)} = A^{(3)} / B^{(3)}, \quad 0 \leq \text{Quality}_{\text{PL}}^{(3)} \leq 1, \quad (3)$$

де  $A^{(3)}$  – кількість форматів даних, що успішно використовуються для обміну даними з іншим програ-

мним забезпеченням;  $B^{(3)}$  – загальна кількість форматів даних для обміну.

Отже, здатність до взаємодії визначається для кожної з таких груп оціночних функцій:

- 1) зовнішні посилання та вкладення;
- 2) публікація даних;
- 3) консолідація даних.

У Веб-галереях для зовнішніх посилань та вкладень в інші Веб-ресурси використовують три формати даних – HTML, XHTML та PHP.

Публікація використовується для автоматичного збору даних (заголовків новин, блогів, публікацій, підкастів і т.п.) із зовнішніх джерел у форматах RSS або Atom, а також додатків соціальних мереж.

Консолідацію даних здійснюють на двох рівнях: інформаційної системи та СКБД. Оскільки другий рівень для зовнішнього доступу звичайного користувача закритий, то оцінювання будемо здійснювати на рівні IC. Для консолідації даних фактично використовуються два формати даних: мова структурованих запитів SQL та розширювана мова розмітки XML.

*Доцільність розпізнавання* – це властивість програмного продукту, яка дозволяє користувачу визначити, наскільки програмне забезпечення підходить для певного використання. Вона оцінюється за такими метриками:

- повнота опису;
- демонстрація можливостей (вид перегляду мультимедійної інформації).

Доцільність розпізнавання будемо оцінювати за демонстрацією можливостей, тому що перша метрика повністю залежить від зрозумілості опису функцій у програмному продукті:

$$\text{Quality}_{\text{PL}}^{(4)} = A^{(4)} / B^{(4)}, \quad 0 \leq \text{Quality}_{\text{PL}}^{(4)} \leq 1, \quad (4)$$

де  $A^{(4)}$  – кількість реалізованих видів перегляду (демонстрацій);  $B^{(4)}$  – кількість доступних видів перегляду (демонстрацій).

Демонстрація можливостей визначається на основі функціональних можливостей категорії “Перегляд” (таблиця).

*Придатність до вивчення* – це властивість програмного продукту бути вивченим користувачем з погляду його застосування. Вона оцінюється за такими метриками:

- простота вивчення функцій;
- повнота документації користувача і/або об'єкта допомоги.

Придатність до вивчення будемо оцінювати лише за простотою вивчення функцій, тому що інша метрика повністю залежить від реалізації та використання довідкової підсистеми інформаційної системи:

$$\text{Quality}_{PL}^{(5)} = \frac{\sum_{i=1}^k T_i N_i}{\sum_{i=1}^k N_i}, \quad 0 \leq \text{Quality}_{PL}^{(5)} \leq 1, \quad (5)$$

де  $T_i$  – середній час (хв.), що витрачається на доступ до елемента  $i$ -го рівня;  $N_i$  – кількість елементів  $i$ -го рівня;  $i$  – рівень розміщення елементів;  $k$  – загальна кількість рівнів розміщення елементів.

Враховуючи, що Веб-галерея має структуру дерева, то придатність до вивчення оцінюється як складність доступу до її елементів.

*Адаптованість* – це властивість програмного продукту бути пристосованим до різних середовищ без застосування додаткових дій чи засобів, крім тих, які для цього призначені. Вона оцінюється за такими метриками:

- адаптованість до середовища апаратного забезпечення;
- адаптованість до середовища системного програмного забезпечення;
- адаптованість до організаційного середовища.

$$\text{Quality}_{IS} = \frac{\text{Weight}_{DB} \text{Quality}_{DB} + \text{Weight}_{PL} \text{Quality}_{PL} + \text{Weight}_I \text{Quality}_I}{\text{Weight}_{DB} + \text{Weight}_{PL} + \text{Weight}_I}, \quad (7)$$

де  $\text{Quality}$  – якість компоненти або інформаційної системи;  $\text{Weight}$  – відповідний ваговий коефіцієнт;  $DB$  – позначення бази даних;  $PL$  – позначення прикладної логіки;  $I$  – позначення інтерфейсу.

Якщо прикладна логіка розглядається як інформаційний продукт, то вона передбачає довготривале використання. Тоді вагові коефіцієнти бази даних та інтерфейсів у показнику якості інформаційної системи прямують до нуля:

$$\text{Weight}_{DB} \rightarrow 0, \quad \text{Weight}_I \rightarrow 0.$$

Будемо вважати, що під час довготривалого функціонування програмного комплексу його якість повністю визначається якістю прикладної логіки:

$$\text{Quality}_{IS} = \text{Quality}_{PL}.$$

Якість прикладної логіки будемо оцінювати за характеристиками якості стандарту ISO/IEC 25010. Тоді організація прикладної логіки спрямована на максимізацію такої цільової функції:

Адаптованість будемо оцінювати лише за адаптованістю до організаційного середовища на основі функціональних можливостей, поданих у таблиці, тому що інші метрики повністю залежать від способу організації даних, системного чи апаратного забезпечення:

$$\text{Quality}_{PL}^{(6)} = A^{(6)} / B^{(6)}, \quad 0 \leq \text{Quality}_{PL}^{(6)} \leq 1, \quad (6)$$

де  $A^{(6)}$  – кількість успішно виконаних операцій над структурою інформаційного наповнення;  $B^{(6)}$  – загальна кількість операцій над структурою інформаційного наповнення.

Для визначення даного показника якості враховуються такі операції над структурою інформаційного наповнення мультимедійної Веб-системи:

- створення (звичайне та адаптивне);
- вилучення;
- оновлення (звичайне та адаптивне);
- поділ (звичайний та адаптивний).

Якість програмного комплексу Веб-галерея розглядається як нормована сума показників якості (1)–(6).

У [15] стверджується, що якість інформаційної системи (програмного комплексу) залежить від якості бази даних, прикладної логіки та інтерфейсів користувача:

$$\text{Quality}_{IS} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Weight}_{PL}^{(i)} \text{Quality}_{PL}^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \text{Weight}_{PL}^{(i)}} \rightarrow \max,$$

де  $\text{Quality}_{IS}$  – загальний показник якості програмного комплексу;

$\text{Quality}_{PL}^{(i)}$  – показник якості за ISO/IEC 25010;

$\text{Weight}_{PL}^{(i)}$  – ваговий коефіцієнт показника якості  $\text{Quality}_{PL}^{(i)}$ ;

$i$  – індекс показника якості,

$n$  – загальна кількість показників якості програмного комплексу.

Якщо певний показник якості визначається на основі кількох оціночних функцій, то відповідний зведений показник якості визначається так:

$$\text{Quality}_{PL}^{(i)} = \frac{\sum_{p=1}^{N_{(Quality)}^{(i)}} \text{Quality}_{PL}^{(i,p)}}{N_{(Quality)}^{(i)}},$$

де  $Quality_{PL}^{(i,p)}$  – показник якості р-ї оціночної функції; і – індекс показника якості; р – індекс оціночної функції;  $N_{(Quality)}^{(i)}$  – кількість оціночних функцій і-го показника якості.

У програмному комплексі вагові коефіцієнти показників якості задаються користувачами індивідуально для кожного показника, формуючи таким чином їхню пріоритетність. Щоб урахувати думку всіх експертів (користувачів), вагові коефіцієнти відповідного показника якості необхідно звести до одного значення. Зважаючи на це, вагові коефіцієнти показників якості визначаються таким чином:

$$Weight_{PL}^{(i)} = \frac{\sum_{u=1}^{N(Users)} Weight_{PL}^{(i,u)}}{N(Users)},$$

де  $Weight_{PL}^{(i,u)}$  – ваговий коефіцієнт і-го показника якості; і – індекс показника якості; u – індекс користувача;  $N(Users)$  – кількість користувачів.

### 3. Висновки

Проведено аналіз методів оцінювання якості програмного забезпечення та розроблено метод оцінювання якості мультимедійних Веб-систем шляхом аналізу їхніх функціональних можливостей, виходячи з характеристик функціональності, сумісності, практичності та мобільності, що дає змогу визначити такі показники якості, як функціональна повнота, функціональна правильність, здатність до взаємодії, доцільність розпізнавання, придатність до вивчення та адаптованість, а також загальний показник якості мультимедійної Веб-системи.

*Наукова новизна* полягає у розробці методу оцінювання якості мультимедійних Веб-систем.

*Практична цінність* полягає у визначенні показника якості мультимедійних Веб-систем.

**Література:** 1. *Серов Ю. О.* Методи та засоби побудови ефективних віртуальних спільнот на основі Веб-форумів : дис. ... канд. техн. наук : 01.05.03 / Серов Юрій Олегович. Львів, 2011. 166 с. 2. *Software engineering – Product quality – Part 1: Quality model [Electronic resource] / ISO/IEC 9126-1:2001.* Mode of access : WWW/URL : <http://www.iso.org/iso/en/CatalogueDetailPage.CatalogueDetail?CSNUMBER=22749&ICS1=35&ICS2=80&ICS3>. – 15.06.2011. – Title from the screen. 3. *Software engineering – Product quality – Part 2: External metrics [Electronic resource] / ISO/IEC TR 9126-2:2003.* Mode of access : WWW/URL : [http://www.iso.org/iso/iso\\_catalogue/catalogue\\_tc/catalogue\\_detail.htm?csnumber=22750](http://www.iso.org/iso/iso_catalogue/catalogue_tc/catalogue_detail.htm?csnumber=22750). 20.06.2011. Title from the screen. 4. *McCall J. A.* Concepts and definitions of software quality / J. A. McCall, P. K. Richards, G. F. Walters // *Factors in Software Quality*, NTIS. Vol. 1. 1977. 5. *Boehm B.W.* Characteristics of Software Quality / B. W. Boehm, J. R. Brown, H. Kaspar, M. Lipow, G. MacLeod

and M. J. Merritt // *TRW series of Software Technology*. North Holland. Amsterdam. 1978. 524 p. 6. *Watts R. A.* Measuring Software Quality / R. A. Watts. – Manchester : Blackwell Publishers. 1987. 128 p. 7. *Abel D. E.* Determining and Specifying the Quality Attributes of Software Products / D. E. Abel, T. P. Rout // *Austral. Comput. J.* Vol. 25. N. 3. 1993. P. 105-112. 8. *Systems and software engineering – Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE) – System and software quality models / ISO/IEC 25010.2:2008.* Mode of access: WWW/URL: [http://sa.inceptum.eu/sites/sa.inceptum.eu/files/Content/ISO\\_25010.pdf](http://sa.inceptum.eu/sites/sa.inceptum.eu/files/Content/ISO_25010.pdf). 16.02.2013. Title from the screen. 9. *Волкова С.О.* Дослідження існуючих підходів підвищення якості програмного забезпечення критичного застосування / С. О. Волкова, О. М. Трунов // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2008. № 6. С. 202-208. 10. *Інформаційні технології. Пакети програм. Тестування і вимоги до якості (ISO/IEC 12119:1994, IDT) : ДСТУ ISO/IEC 12119-2003.* Чинний від 2004-07-01. К. : Держспоживстандарт України, 2004. 26 с. (Національний стандарт України). 11. *Програмні засоби ЕОМ. Забезпечення якості. Показники та методи оцінювання якості програмного забезпечення : ДСТУ 2850-94.* Чинний від 1996-01-01. К. : Держстандарт України, 1996. 42 с. (Національний стандарт України). 12. *Програмні засоби ЕОМ. Забезпечення якості. Терміни та визначення : ДСТУ 2844-94.* Чинний від 1995-08-01. К. : Держстандарт України, 1995. 22 с. (Національний стандарт України). 13. *Systems and software engineering – Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE) – Measurement of system and software product quality / ISO/IEC 25023:2011.* Mode of access : WWW/URL : [http://pef.czu.cz/~papik/doc/MHJS/pdf/ISOIEC\\_25023\\_2011.pdf](http://pef.czu.cz/~papik/doc/MHJS/pdf/ISOIEC_25023_2011.pdf). 16.01.2013. Title from the screen. 14. *Ришковець Ю. В.* Формування критеріїв оцінювання Веб-галереї / Ю. В. Ришковець, П. І. Жежнич // 16-й міжнародний молодіжний форум “Радіоелектроніка і молодь в XXI ст.” : Зб. матеріалів форуму Т.8. Міжнародна конференція “Управління знаннями та конкурентна розвідка”. Харків : ХНУРЕ, 2012. С. 167-168. 15. *Жежнич П. І.* Методи та засоби організації реляційних баз часовозалежних даних: дис. ... д-ра техн. наук : 01.05.03 / Жежнич П.І. Львів, 2009. 361 с.

Надійшла до редколегії 28.02.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Русин Б.П.

**Ришковець Юрій Володимирович**, канд. техн. наук, асистент кафедри інформаційних систем та мереж Національного університету “Львівська політехніка”. Наукові інтереси: реляційні бази даних та бази часовозалежних даних, адаптивні інформаційні системи, технології консолідації даних, системи електронного урядування. Адреса: Україна, 79013, Львів, вул. С. Бандери, 12, тел. (032) 258-25-38.

Проводится обзор рынка приложений в сфере здравоохранения. Приводятся статистические данные, характеризующие развитие стратегии. Описываются задачи, которые необходимо решить для реализации запуска приложения, а также методы их решения. Приводятся неоспоримые доводы в пользу разработки и запуска медицинских приложений.

### 1. Введение

Мировые продажи новых смартфонов составляют 642,91 млн устройств за 2012 год [1]. Данные из графика (рис.1) позволяют проследить за тенденцией динамичного роста количества мобильных устройств с разными ОС. По данным Государственного комитета статистики в Азербайджане количество проданных новых телефонов составляет 182422 единицы, общей стоимостью 8680,5 тыс. долларов [2].

Современные мобильные телефоны в некоторых случаях даже превосходят стационарные персональные компьютеры по своим показателям производительности. А современные устройства связи (bluetooth, WiFi) превращают мобильное устройство в незаменимого помощника, который может быть присоединен к бытовым и хозяйственным приборам. К примеру, на сегодняшний день с помощью мобильного устройства мы можем управлять своими счетами, заказывать товары, управлять домом и автомобилем.

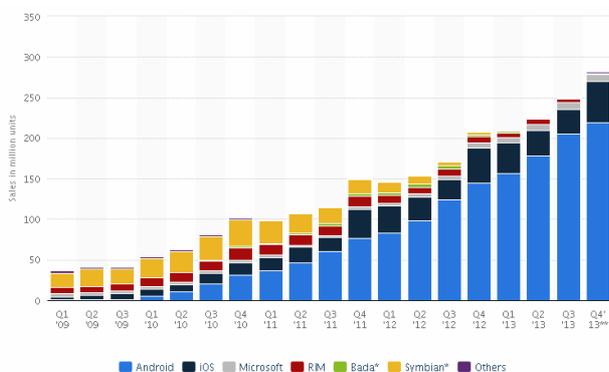


Рис. 1. Динамика продаж смартфонов

Научно-технический прогресс не обошел стороной и здравоохранение. Общее количество приложений для мобильных телефонов в этой области с начала 2010 года возросло втрое, и составляет сейчас примерно 40 000 приложений. Исследования рынка показали, что количество пользователей в 2011 году составляло 124 миллиона пользователей, а к концу 2012 года удвоилось и составило 250 миллионов пользователей. Емкость рынка увеличилась до 1,3 миллиарда пользователей по сравнению с 718 миллионами в 2011 году [3, с. 92-93].

### 2. Постановка задачи

Перед разработчиками и учеными стоит задача – разработать программное и техническое решение для постоянного мониторинга и раннего предупреждения заболевания, а также для помощи в диагностике, контроле, процессе лечения и ухода, в том числе и в восстановительной терапии и мониторинге состояния здоровья.

### 3. Этапы и методы решения

#### 3.1. Круглосуточный мониторинг состояния здоровья.

Мобильный интернет становится более быстрым и стабильным, и по своим параметрам приближается к стационарным подключениям. В то же время у многих жителей страны имеются телефоны с возможностью постоянного доступа к сети Интернет (24/7), независимо от местонахождения. При таких условиях существует возможность постоянной передачи данных о состоянии здоровья на определенный сервер для обработки или оповещения лечащего врача. Также в экстренной ситуации можно вызвать скорую помощь в автоматическом режиме.

Преимущество от приложения в сфере здоровья для пользователей заключается в особенностях эксплуатации смартфонов. Телефон постоянно находится с пользователем и позволяет содействовать измерениям (например, постоянный мониторинг сахара в крови для диабетиков), визуализировать важную информацию (к примеру, показывать колебания уровня сахара в крови), передавать в режиме реального времени данные лечащему врачу (к примеру, при критических показателях сахара). Благодаря передаче данных приложение способствует формированию целевых групп по общению и направленности как для врачей, так и для самих пользователей.

#### 3.2. Разбивка на целевые группы и предназначения.

Приложения для здоровья должны применяться для разных целевых групп. В этом контексте приложения делятся на два типа - для профилактических целей и для контроля состояния болезни. На сегодняшний день приложения для профилактики предоставляют данные о соблюдении правильного образа жизни и предупреждения болезней (это могут быть и календари питания, и контроль занятий по фитнесу). Вторая целевая группа - это люди, у которых уже имеются проблемы со здоровьем. Здесь приложение помогает контролировать прием лекарственных средств и следить за выполнением оздоровительных упражнений.

Приложения можно условно разделить на классические четыре фазы: предупреждение, диагностика, терапия, уход за больными. Такое приложение будет максимально полезным для всех целевых групп.

Приложения, созданные для поддержки здоровья, к примеру: Runtastic Pro – предназначено для людей, которые активно занимаются спортом, в особенности для бегунов и велосипедистов; Runtastic Heart Rate Pro – для контроля ритма сердца; Fitness Flow – для занятий по фитнесу, планировке занятий. Также существует приложение для диагностики.

3.3. *Прогнозы и варианты решения.* В данный момент происходит активное развитие приложений для здоровья. Однако если с приложениями для профилактики ситуация как-то стабилизировалась и позволяет прогнозировать темпы роста, то с приложениями для диагностики и помощи в лечении дела обстоят совершенно иначе.

Основной проблемой, ограничивающей возможность применения и точности получаемых данных, является то, что результаты, которые выдают приложения, основываются на определенных временных, пространственных или математических показателях. Поэтому эти данные нельзя считать достоверными и точными, что делает их бесполезными для использования в медицине. Конструкция телефонов не предусматривает наличие специальных датчиков, которые могут дать достоверные данные для точного прогноза.



Рис. 2. Разделения функциональных возможностей по группам [3]

Поэтому стратегия развития приложения для диагностики и помощи в лечении лежит в плоскости использования внешних устройств с датчиками (специализированные и сертифицированные для медицинских измерений) и их синхронизации и передачи данных. Датчики должны находиться в непосредственном контакте с пользователем. К примеру, в настоящий момент есть устройства для измерения давления, которые по беспроводному интерфейсу передают данные на смартфон. Этим функционалом новые приложения не будут ограничиваться. Это могут быть и браслеты, и специальные пластыри. А на телефоны будет возложена функция первичной обработки и передачи этих данных на сервера, а также их визуализация.

Соответственно, по определенному количеству получаемой информации устройство сможет предоставлять точные данные и рекомендации, а также на основании этих данных тренер или лечащий врач сможет дать свои заключения.

Приложения для помощи в лечении должны взять на себя функцию моментального извещения о состоянии больного, об улучшении или ухудшении здоровья, постоянного мониторинга состояния человека и передачи данных медицинскому персоналу, а также упрощения ведения карточек больных, назначения и контроля медицинских препаратов. Также приложения смогут дополнительно контролировать протекание болезни и назначения лечащего врача. К примеру, такие данные могут моментально передаваться в другую

поликлинику для помощи в экстренной ситуации, когда необходимо собрать консилиум врачей. В такой ситуации данные будут передаваться доли секунды, что, в свою очередь, способствует быстрому принятию решения о дальнейшем лечении.

Приложения для помощи в уходе за больными, кроме контроля принятия лекарственных средств и контроля показателей, позволят передавать данные лечащему врачу, который, непосредственно через приложения, сможет изменить и дополнить, при необходимости, параметры для быстрого восстановления.

#### 4. Выводы

Рынок приложений для здоровья еще слабо освоен, в особенности для диагностики, помощи в лечении и уходе. Практически не развит. Проблемы и задачи, которые стоят перед разработчиками, не могут быть решены только ими. В данной ситуации нужно полное понимание проблематики медицины и потребностей врачей, а врачам иметь понятия о преимуществах, которые предоставляют им приложения в диагностике и лечении, а также понимание пользователями необходимости применения программного и аппаратного обеспечения.

Что касается приложений для поддержки правильного образа жизни, их предостаточно, и вряд ли будет наблюдаться дальнейший их рост.

В данный момент можно прогнозировать развитие рынка аппаратных средств со специализированными датчиками для точного снятия показателей жизнедеятельности, а также развитие приложений, которые будут эти данные собирать, обрабатывать и структурировать, передавать в центры обработки, визуализировать для легкого восприятия, что, в свою очередь, облегчит принятие правильного решения.

**Литература:** 1. <http://www.statista.com/statistics/74592/quarterly-worldwide-smartphone-sales-by-operating-system-since-2009/> 2. <http://echo.az/article.php?aid=35710> 3. *Web&mobile Developer.* Neu Mediengesellschaft Ulm mbH, Bayerstrasse 16a, 80335 München ISBN 21944105. P. 92.

Поступила в редколлегию 12.03.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

**Абдуллаев Вугар Гаджимахмудович**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Компьютерные технологии и программирование» Азербайджанской Государственной Нефтяной Академии (АГНА), Институт Кибернетики НАНА. Научные интересы: информационные технологии, веб-программирование, мобильные приложения. Увлечения: электронная коммерция, B2B, B2C проекты, научные книги, спорт. Адрес: Азербайджан, AZ1129, Баку, ул. М. Гади, 53, кв. 81, тел. (99412)5712428, (050)3325483, e-mail: [abdulvugar@mail.com](mailto:abdulvugar@mail.com)

**Чуба Иван Владимирович**, программист «MSDLab». Научные интересы. информационные технологии, программирование. Увлечения: научные книги, спорт. Адрес: Украина, 09100, Киевская обл, Белая Церковь, ул. Митрофанова, 11-71. E-mail: [chuba.ivan@gmail.com](mailto:chuba.ivan@gmail.com)

**Аскеров Талех Камранович**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Компьютерные технологии и программирование» Азербайджанской Государственной Нефтяной Академии (АГНА). Научные интересы. информационные технологии, программирование. Увлечения: электронная коммерция, B2B, B2C проекты, научные книги, спорт. Адрес: Азербайджан, AZ1050, Баку, ул. Сабира, кв. 9, тел. (99412)4985993, e-mail: [talih\\_askerov@yahoo.com](mailto:talih_askerov@yahoo.com)

УДК 615.47:616-074

**Оптимізація вимірювальних апертур резонаторних датчиків для ближньопольової НВЧ діагностики біооб'єктів** / М.І. Сліпченко, Ю.О. Гордієнко, Г.М. Бородкіна // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С.3-6.

Проведено аналіз вихідних інформаційних параметрів резонаторних вимірювальних перетворювачів з коаксильною апертурою в умовах ближньопольової мікроскопії біологічних об'єктів. В результаті чисельного експерименту визначені параметри перетворювачів, які дозволяють отримати оптимальні співвідношення конструкційних елементів, що істотно зменшує похибки вимірювань.

Л. 4. Бібліогр.: 8 назв.

УДК 517.956

**Глобальна розв'язність перевизначеної сингулярної системи диференціально-алгебраїчних рівнянь і застосування у радіотехніці** / М. С. Філіпковська // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С.7-16.

Доведена теорема існування та єдиності глобального розв'язку перевизначеної системи диференціально-алгебраїчних рівнянь. Векторна форма системи має вигляд напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння з сингулярним характеристичним жмутком операторів. Для нелінійної правої частини рівняння не вимагається виконання обмеження типу глобальної умови Ліпшица. Досліджена модель радіотехнічного фільтра з нелінійними елементами та вказані обмеження, які забезпечують гладку еволюцію станів протягом як завгодно великого часового періоду.

Л. 1. Бібліогр.: 8 назв.

УДК 629.783:527.6

**Про електромагнітну природу гравітаційної взаємодії** / В.В. Рибін // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С. 17-19.

Розглянуто електромагнітну природу гравітаційної взаємодії на прикладі системи, яка складається з двох електронів. Представлено електрон як елементарний ізотропний сферичний випромінювач. Відзначена доцільність проведення експериментальної перевірки запропонованої гіпотези.

Бібліогр.: 3 назви.

УДК 624.396.2

**Автоматизація багатокритеріального вибору оптимального рішення при плануванні мереж мобільного зв'язку** // Д.В. Чеботарьова, В.М. Безрук // *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С.20-24.

Розглянуто деякі методи багатокритеріальної оптимізації, які можуть бути використані при плануванні мереж мобільного зв'язку. Представлені практичні аспекти вибору оптимальних проектних рішень з використанням створеного програмного засобу для вибору оптимального варіанту з урахуванням сукупності показників якості.

Табл. 3. Л. 1. Бібліогр.: 5 назв.

UDC 615.47:616-074

**Optimization Of Measuring Apertures Of Resonator Sensors For The Near-Field Microwave Diagnostics Of Bioobjects** / N. Slipchenko, Yu.E. Gordienko, A. Borodkina // *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 3-6.

The analysis of output information parameters of resonator measuring transducers with a coaxial aperture is carried out under conditions of near-field microscopy of biological objects. As a result of numerical experiment parameters of transformers which allow receiving optimum ratios of constructional elements are determined that significantly reduces errors of measurements.

Fig. 4. Ref.: 8 items.

UDC 517.956

**The global solvability of the overdetermined singular system of differential-algebraic equations and applications of radiotechnics** / M. S. Filipkovskaya // *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 7-16.

The existence and uniqueness theorem of the global solution of the overdetermined system of differential-algebraic equations is proved. The system vectorial form has the form of the semi-linear differential-algebraic equation with the singular characteristic operator pencil. The nonlinear right part of the equation is not required to satisfy the constraints of the global Lipschitz condition type. The radiotechnical filter model with nonlinear elements is researched and restrictions which ensure the smooth evolution of states throughout an arbitrary large period of time are given.

Fig. 1. Ref.: 8 items.

UDC 629.783:527.6

**About electromagnetic nature of gravitational interaction** / V.V. Rybin // *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 17-19.

Considered electromagnetic nature of gravitational interaction on the example system consisting of two electrons. Presented as an elementary electron isotropic spherical radiator. Awarded the feasibility of experimental verification of the proposed hypothesis.

Ref.: 3 items.

UDC 624.396.2

**Automation multicriteria choice of optimal solutions in the planning of mobile networks** // D.V. Chebotarev, V.M. Bezruk // *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 20-24.

Some methods multiobjective optimization, which can be used in the mobile communication network planning, have been considered. Practical aspects of optimal design solutions selection using established software tool for choosing the best option based on aggregate indicators of quality.

Tab. 3. Fig. 1. Ref.: 5 items.

УДК 517.9:532.5

**Про один метод чисельного аналізу в'язких течій, ускладнених масообміном (задача обтікання) / С.В. Колосова, С.М. Ламтюгова, М.В. Сидоров //** *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С. 25-30.

Розглянуто стаціонарну задачу масообміну тіла обертання з потоком в'язкої нестисливої рідини. Запропоновано чисельний метод її розв'язання, оснований на сумісному застосуванні методів R-функцій, послідовних наближень та Гальоркіна. Побудовано структуру розв'язку, яка повністю задовольняє крайові умови задачі, в тому числі і умову на нескінченності. Наведені результати чисельного експерименту.

Лл. 12. Бібліогр.: 15 назв.

UDC 517.9:532.5

**On one method of numerical analysis of viscous flows, complicated with the mass transfer (flow problem) / S.V. Kolosova, S.N. Lamtyugova, M.V. Sidorov //** *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 25-30.

The steady problem of mass transfer of the body of revolution with viscous incompressible fluid is considered. A numerical method for its solution, based on the joint use of the R-functions method, the successive approximations method and the Galerkin method, is proposed. The solution structure, that completely satisfies the boundary conditions of the problem, including the condition at infinity, is constructed. The results of numerical experiment are presented.

Fig. 12. Ref.: 15 items.

УДК 517.95 : 519.63

**Метод чисельного аналізу квазістаціонарних процесів перемішування у багатозв'язних областях / Г.В. Стаднікова //** *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С. 31-34.

Розглянуто задачу перемішування в'язкої рідини у багатозв'язній двовимірній області. Для її розв'язання запропоновано і обґрунтовано наближений метод, який базується на методах R-функцій і Рітца.

Бібліогр.: 18 назв.

UDC 517.95 : 519.63

**Numerical analysis method of quasistationary mixing processes in multiply connected domains / A.V. Stadnikova //** *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 31-34.

The problem of mixing of a viscous liquid in multiply connected two-dimensional domain was considered. The approximate approach based on the Ritz method and the R-functions method was suggested to solve this problem.

Ref.: 18 items.

УДК 519.859

**Квазі  $\Phi$ -функція для сфероконусів з поворотами / В.В. Сьомкін, А.М. Чугай, О.В. Панкратов //** *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С. 35-38.

Для математичного моделювання взаємодії тривимірних геометричних об'єктів, що породжуються із сфероконусу, застосовано апарат  $\Phi$ -функцій. З метою зменшення обчислювальних витрат побудовано квазі та псевдонормалізовану квазі  $\Phi$ -функції для двох сфероконусів з поворотами. Побудовані функції дозволяють враховувати мінімально припустимі відстані між об'єктами при розв'язанні оптимізаційних задач розміщення.

Лл.2. Бібліогр.: 8 назв.

UDC 519.859

**Quasi  $\Phi$ -function for spherocones with rotations / V.V. Semkin, A.M. Chugay, A.V. Pankratov //** *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 35-38.

In the paper for mathematical modeling of interaction of geometric 3D objects which are derived from a spherocone the  $\Phi$ -function technique is exploited. In order to decrease computational expenditures quasi and pseudo-normalized quasi  $\Phi$ -functions for two non-oriented spherocones are built. The functions allow us to consider shortest distances between the objects when solving optimization packing problems.

Fig. 2. Ref.: 8 items.

УДК 658.512.011:681.326:519.713

**Кіберфізичні системи як технології кіберуправління (аналітичний огляд) / В.І. Хаханов, В.І. Обрізан, А.С. Міщенко, І.В. Філіппенко //** *Радіоелектроніка та інформатика*. 2014. № 1. С. 39-45.

Пропонується технологія кіберуправління (human-free) соціальними (кадри і фінанси) ресурсами на основі двох хмарних сервісів: 1) розподіл державних замовлень і фінансів між структурними підрозділами на основі змагання матриць їх компетенцій за заданими метриками; 2) прерозподіл кадрових вакансій шляхом змагання матриць компетенцій претендентів за заданими метриками. Кіберсистеми засновані на використанні технологій: Internet of Things, Smart Everything, Big Data, паралельних віртуальних процесорів і орієнтована на обслуговування індивідуумів і університетських структур. Для кожного суб'єкта генеруються дві унікальні метрики компетенцій: 1) еталон кращих показників за кожною номінацією професійної діяльності; 2) поточні матриці компетенцій всіх суб'єктів, які заповнюються в процесі їх життєдіяльності, які ранжуються шляхом метричного порівняння результатів конструктивної активності з еталонними значеннями. Наводиться аналітичний огляд стану проблеми.

Бібліогр.: 25 назв.

УДК 658.512.011:681.326:519.713

**Cyber-physical systems as cyber-technology management (analytical review) / V.I. Hahanov, V.I. Obrizan, Mishchenko A.S., I.V. Filippenko //** *Radioelektronika i informatika*. 2014. N 1. P. 39-45.

Cyber-technology (human-free) for managing social resources (personnel and finance) based on two cloud services is proposed: 1) distribution of government contracts and finance between the structural units, based on the competition of the competence matrices for a given metric; 2) the distribution of staff vacancies by the competition of the competence matrices of applicants for a given metric. Cyber-systems are based on the use of the following technology: Internet of Things, Smart Everything, Big Data, parallel virtual processors; they are focused on individuals and university structures. For each subject they are generated two unique competencies metrics: 1) the standard of the best results in each category of professional activity; 2) The current matrices of competencies of all subjects filled out during their livelihoods, which are ranked by matrix comparing the results of the constructive activity with the reference values. An analytical overview of the problem is represented.

Ref.: 25 items.

<p>УДК 004.093  <b>Обробка відеоряду спортивних ігор з використанням фільтра Габора</b> / В.І. Дубровін, Ю.В. Твердохліб, Д.В. Панченко // <i>Радіоелектроніка та інформатика</i>. 2014. № 1. С.46-49.          Робота присвячена вирішенню задачі післяматчевого аналізу футбольного відеоряду, що дозволяє тренеру суттєво підвищити ефективність тренувань, знайти потрібних команді гравців та підвищити загальний рівень гри. Головною особливістю розробленого методу є застосування фільтрів Габора для виділення контурів гравців на відео- зображенні.          Табл. 1. Іл. 9. Бібліогр.: 12 назв.</p>	<p>UDC 004.093  <b>The sport games video series processing using Gabor filter</b> / V. Dubrovin, J. Tverdohleb, D. Panchenko // <i>Radioelektronika i informatika</i>. 2014. N 1. P.46-49.          In this paper the problem of post-match soccer video analysis is presented. This allows trains to significantly improve the training effectiveness, to find the necessary team players and to improve the overall level of the game. The main feature of this method is the using of Gabor filters for the edge players in the video series.          Tab. 1. Fig. 9. Ref.: 12 items.</p>
<p>УДК 004.42  <b>Специфікація функцій систем підтримки медичних карток</b> / Ю.Л. Нечипоренко // <i>Радіоелектроніка та інформатика</i>. 2014. № 1. С. 50-52.          Здійснено огляд інтернет-джерел стосовно специфікації функцій систем підтримки електронних медичних карток. Через існуючу тенденцію залучення мобільних пристроїв до ведення масиву медичних даних доцільна розробка ЕМК, яка може бути встановлена на особистому мобільному пристрої користувача.          Табл.1. Бібліогр.: 13назв.</p>	<p>UDC 004.42  <b>Specification of functions support medical records</b> / Nechyporenko Y. L. // <i>Radioelektronika i informatika</i>. 2014. N 1. P. 50-52.          A survey of online resources is performed regarding the specification of systems and functions for electronic medical cards support. Considering the existing tendency of increasing usage for mobile devices in handling medical data, we believe that the development of electronic medical card is expedient. Such EMC might be installed at a user's mobile device.          Tab.1.Ref.: 13 items.</p>
<p>УДК 004.05  <b>Метод оцінювання якості мультимедійних веб-систем</b> / Ю. В. Ришковець // <i>Радіоелектроніка та інформатика</i>. 2014. № 1. С. 53-57.          Здійснено огляд моделей та стандартів якості програмного продукту. Проаналізовано застосовність методу підвищення ефективності Веб-форуму до мультимедійних Веб-систем. Описано результати аналізу функціональних можливостей мультимедійних Веб-систем. Запропоновано метод оцінювання якості мультимедійних Веб-систем на прикладі Веб-галерей шляхом визначення показників якості на основі функціональних можливостей.          Табл. 1. Бібліогр.: 15 назв.</p>	<p>UDC 004.05  <b>The method of evaluating the quality of multimedia Web systems</b> / Yu. V. Ryshkovets // <i>Radioelektronika i informatika</i>. 2014. N 1. P. 53-57.          The models and standards of quality software is review. Applicability the method improving efficiency of Web forum to multimedia Web systems is analyzed. The results of analysis the functional capabilities multimedia Web systems are described. The method of evaluating the quality of multimedia Web systems on example, Web gallery through determining quality based on functional capabilities          Tab. 1. Ref.: 15 items.</p>
<p>УДК 007.3  <b>Мобільні додатки для здоров'я</b> // В.Г. Абдуллаєв, І.В. Чуба, Т.К. Аскеров // <i>Радіоелектроніка та інформатика</i>. 2014. № 1. С. 58-59.          Описано огляд ринку додатків в галузі охорони здоров'я. Наведені статистичні дані, що характеризують розвиток стратегії. Описані завдання, які вирішуються в реалізації запуску додатків, а також способи їх вирішення.          Іл. 2. Бібліогр.: 3 назви.</p>	<p>UDC 007.3  <b>Mobile applications for health</b> // V.H. Abdullayev, I.V. Chuba, T.K. Askerov // <i>Radioelektronika i informatika</i>. 2014. N 1. P.58-59.          The article briefly describes review of market of applications in field of health care. Statistical data describing strategy development are indicated herein. Tasks to be solved for implementation of application launch as well as methods of their solution are described. Indisputable arguments in favor of launch of medical applications are indicated.          Fig. 2. Ref.: 3 items.</p>

## ПРАВИЛА

оформления рукописей для авторов  
научно-технического журнала

### "Радиоэлектроника и информатика"

**Тематика:** радиотехника; электроника; телекоммуникации; компьютерные науки; компьютерная инженерия и техническая диагностика; системы и процессы управления; информационные технологии в науке, образовании, культуре, медицине, экономике, экологии, социологии.

**Формат страницы** — А4 (210x297 мм), поля: сверху — 15, справа, слева, снизу — 20 мм. Количество колонок — 2, интервал между ними — 5 мм. Редактор: Pagemaker 6.0 (можно, но нежелательно Word), гарнитура Times ET (Times New Roman Cyr), кегль — 10 пунктов, межстрочное расстояние — 110%, табуляция — 5 мм.

Объем рукописи — от 2 до 10 с. (языки: русский, украинский, английский). Текст рукописи должен быть структурирован и содержать все *основные части, характерные для научной статьи*: **введение** (отражает *актуальность*, формулирование *цели и задач* исследования); **сущность** (изложение основного материала исследования с описанием идеи, метода, и обоснованием полученных научных результатов); **выводы** (отражают результаты исследования, их *научную новизну* и *практическую значимость*, сравнение с лучшими аналогами, перспективы).

**Структура рукописи:** заголовок, аннотация, текст, литература, реферат (на украинском и английском языках), сведения об авторах.

#### ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ

УДК 519.713

#### НАЗВАНИЕ РУКОПИСИ

*ФАМИЛИЯ И.О.*

(Название желаемого раздела тематики)

**Аннотация** (на языке статьи, абзац 5-10 строк, кегль 9) помещается в начале статьи и содержит информацию о результатах описанных исследований.

Основной текст можно разделять на 2 и более подразделов с заголовками, выделенными полужирным шрифтом, пронумерованными арабскими цифрами, как показано в следующей строке.

#### 1. Название раздела

**Рисунки и таблицы** (черно-белые, контрастные) помещаются в текст после первой ссылки в виде *переносимых объектов* и отдельно нумеруются, при наличии более одного рисунка (таблицы), арабскими цифрами. Рисунок содержит подрисовочную центрированную подпись под иллюстрацией (вне рисунка), как показано на рис. 1.

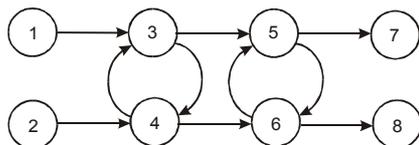


Рис. 1. Граф с контурами

Табличный заголовок располагается справа над таблицей (вне таблицы), что иллюстрируется табл. 1. Редакторы: CorelDraw, Table Editor, Excel.

Таблица 1

Шаг i	1	2	3	4	5	6
$\Phi(1,3)$	1	2	2	4	6	1

**Формулы** нумеруются при наличии ссылок на них в рукописи. Формулы, символы, переменные, встречающиеся в тексте, должны быть набраны как объекты Microsoft Equation. Рекомендуются высота формульных кеглей: переменная — 10 пунктов, индекс — 8, над- и подиндекс — 8, основной (индексный) математический символ — 12(10):

$$F_{i+i} = \sum_{j=1}^k F_j^{i-1+h^2} \cdot P_{R_{j+i}} + F^{j-1} + X \sum n^k \quad (1)$$

Формат переменных (желательно не курсивом — без наклона) в тексте и формулах должен быть идентичным. В тексте над- и подиндексы составляют 70 % от высоты кегля, которые рекомендуется опускать (поднимать) на 17 (33) % относительно основной строки.

**Литература** (включает опубликованные источники, на которые имеются ссылки в тексте, заключенные в квадратные скобки) печатается без отступа, кегль 9 пунктов.

Образец окончания текста рукописи (литература, сведения об авторах, реферат) представлен ниже.

**Литература:** 1. *Фамилия И.О.* Название книги. Город: Издательство, 1900. 000 с. 2. *Название сборника* / Под ред. И.О. *Фамилия*. Город: Издательство, 1900. 000 с. 3. *Фамилия И.О.* Название статьи // Название журнала. Название серии. 1997. Т. 00, № 00. С. 00-00.

Поступила в редколлегию 00.00.00

**Рецензент:** должность, ученая степень, Фамилия, И.О.

**Фамилия, имя, отчество**, ученая степень, звание, должность и место работы. Научные интересы. Увлечения и хобби. Адрес, контактные телефоны.

Рефераты представляются на украинском и английском языках.

УДК 000.000.00

**Назва статті** /Ініціали. Прізвище // *Радиоэлектроника та информатика*. 2000. № 00. С. 00-00.

Текст реферату.

Табл. 00. Лл. 00. Бібліогр.: 00 назв.

UDC 000.000.00

**Title of paper** /Initials. Surname // *Radioelektronika i informatika*. 2000. N 00. P. 000-000.

Text.

Tab. 00. Fig. 00. Ref.: 00 items.

#### Представление материалов

Рукопись, рефераты, сведения об авторах — в одном файле, *поименованном фамилией автора*, на дискете 3,5 дюйма. Твердая копия материалов — для граждан Украины — в одном экземпляре: рукопись, подписанная авторами, рефераты, акт экспертизы, внешняя рецензия, подписанная доктором наук, заявление на имя главного редактора со сведениями об авторах.

**Адрес редакции:** Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, ХНУРЭ, комната 321, тел. 70-21-326, e-mail: ri@kture.kharkov.ua; hahanov@kture.kharkov.ua. <http://www.ewdtest.com/ri>

Рекомендовано Ученым советом Харьковского национального университета радиоэлектроники (протокол № 3 от 27.03.2014)

Підписано до друку 27.03.2014. Формат 60·84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.

Умов. друк. арк. 10,2. Зам. № б/н. Тираж 300 прим. Ціна договірна.

Віддруковано у СПД ФО Степанов В.В.

61168, Харків, Акад. Павлова, 311.