

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ЗАПАСІВ ВОДИ У ВОДОЙМАХ ІЗ НЕРІВНИМ ДНОМ ПІД ЧАС ПОСУХИ

Петрович А.О., Жила О.В.

e-mail: olha.kuryzheva@nure.ua,

Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. БІ  
м. Харків, Україна

The paper considers the important environmental problem drying up of water bodies as a climate change result and anthropogenic impact. The paper describes the process of estimating the water reserves in an arbitrary reservoir with an uneven bottom using mathematical modelling. To model and analyze this phenomenon, the Monte-Carlo method is used for an approximate calculation, and an analytical calculation of the problem is carried out to assess the numerical method error. This method is effective for preliminary forecasting of the water volume in a reservoir and assessment of its resources, which is important for planning water supply in drought conditions.

Посухи в Україні стали серйозною екологічною проблемою, що впливає на сільське господарство, водні ресурси та екосистеми в цілому [1]. Зокрема, посухи є наслідком зміни клімату, що призводить до тривалих періодів без опадів, підвищення температури та зменшення рівня ґрунтових вод. Окрім цього, посухи мають значний вплив на економіку, адже вони призводять до збільшення цін на сільськогосподарську продукцію, погіршення продовольчої безпеки та створення соціальних напруженостей, особливо в регіонах, які найбільше постраждали від нестачі води.

Уявімо, що в деякому регіоні спостерігається посуха, і потрібно оцінити обсяг води в невеликій природній водоймі, наприклад, ставку або озері з нерівним дном. Дно водойми має форму, яка приблизно відповідає математичній функції

$$z = 5 - x^2 - y^2 \quad (1)$$

де  $z$  – глибина водойми в залежності від координат  $(x, y)$ .

Вода заповнює цю природну форму до рівня  $z = 0$ , тобто її обсяг визначається поверхнею води (нульова висота) та формою дна. Знання об'єму води важливе для планування водопостачання під час посухи, визначення потреб у штучному поповненні водойми, оцінки впливу змін рівня води на екосистему (зменшення площі середовища для риб та інших живих організмів). Водойма має площу, що обмежується радіусом 2м, дно нерівне і його форма описується функцією (1). У водоймі вже є вода, яка досягла рівня  $z = 0$ . Вся вода перебуває нижче цієї висоти. Для оцінки запасу води у водоймі (у  $\text{м}^3$ ) для попередження процесу початку висихання

необхідно визначити, скільки води залишилось. Для моделювання та аналізу даного явища зручно використовувати метод Монте-Карло для наближеного розрахунку [2], оскільки він дозволяє оцінити об'єм навіть для складних форм дна водойми. Обсяг води, отриманий у задачі, може бути використаний для прогнозування терміну, протягом якого ставок забезпечуватиме потреби людей, тварин або рослин. Моделювання процесу та його візуалізація виконується у пакеті символьних обчислень Maple (програмна версія 2023 року), який добре пристосований до реалізації різнорівневих інженерних задач [3].

Згідно з методом Монте-Карло необхідно випадковим чином згенерувати  $(x, y, z)$  у межах області, заданої нерівностями:  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 5$ . Перевірити, чи належать точки простору функції (1). Оцінити об'єм за відношенням кількості точок, які потрапили під поверхню, до загальної кількості згенерованих точок. Якщо генеруємо  $N$  випадкових точок у межах певного об'єму (обмежувального паралелепіпеда), тоді:

$$V_{\text{водойми}} \approx V_{\text{паралелепіпеда}} \cdot \frac{N_{\text{під поверхнею}}}{N_{\text{загальне}}}, \quad (2)$$

де  $V_{\text{паралелепіпеда}} = 20\pi \text{ м}^2$ ,  $N_{\text{під поверхнею}}$  – кількість точок, які лежать під поверхнею (1),  $N_{\text{загальне}}$  – загальна кількість згенерованих точок.

У результаті математичного моделювання методом Монте-Карло у пакеті Maple отримано наближене числове значення об'єму водойми  $V_{\text{водойми}} \approx 37,98358162 \text{ м}^3$  з візуалізацією функції (1) та випадкових точок, що були використані для обчислення (рис.1).

Окрім того в Maple був реалізований аналітичний (точний) метод підрахунку об'єму через подвійні інтеграли. Формула для обчислення об'єму водойми описується формулою:

$$V = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (5 - x^2 - y^2) dx dy. \quad (3)$$

Для обчислення інтегралу (3) необхідно виконати перехід до полярної системи координат:

$$V = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (5 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (5 - r^2) r dr d\phi. \quad (4)$$

У результаті аналітичного методу обчислення отримано точне значення об'єму водойми  $V_{\text{водойми}} \approx 37,69911185 \text{ м}^3$ .

Таким чином, похибка методу Монте-Карло складає 0.75%. Слід зазначити, що точність наближеного методу Монте-Карло залежить від вибору кількості точок  $N$ .

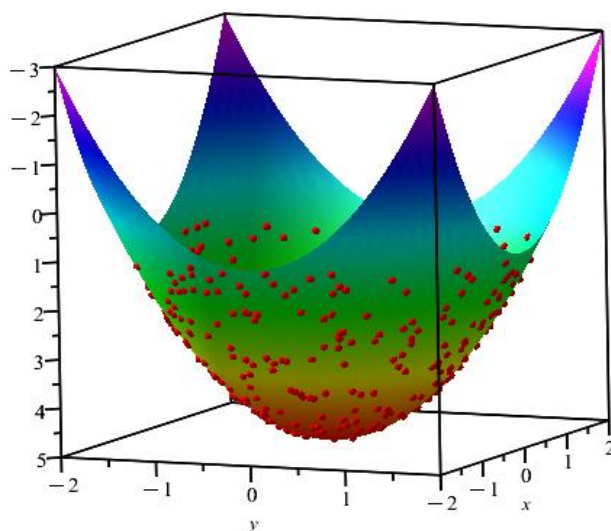


Рис.1 Візуалізація функції  $z = 5 - x^2 - y^2$  та випадкових точок (червоні точки на поверхні) при  $N := 500$ .

Оскільки похибка методу Монте-Карло менше 1%, то це свідчить про високу точність методу при відповідному виборі кількості випадкових точок. Цей метод є ефективним для попереднього прогнозування обсягу води в водоймі та оцінки її ресурсів, що важливо для планування водопостачання в умовах посухи. Окрім того, побудована у Maple математична модель може бути адаптована для поверхонь різної складності. Аналіз результатів обчислень підтвердив, що використання методу Монте-Карло в пакеті Maple дозволяє здійснювати надійні прогнози щодо запасів води, забезпечуючи важливу інформацію для екосистеми, а також для збереження та ефективного використання водних ресурсів у періоди зниження рівня води.

#### Список використаних джерел:

1. Балюк С.А., Медведєва Б.С. Адаптація агротехнологій до змін клімату: ґрунтово-агрохімічні аспекти// Носка, Харків, 2018. 363 с.
2. Матеріал з Вікіпедії. Метод Монте-Карло.  
[https://uk.wikipedia.org/wiki/Метод\\_Монте-Карло](https://uk.wikipedia.org/wiki/Метод_Монте-Карло)
3. Нікітенко О. М. Maple: Розв'язання інженерних та наукових задач// Харків : ХНУРЕ, 2014. – 289 с.